

Seminar za funkcionalnu analizu

9. listopada 2019.

C^* -algebre s CQ-svojstvom 1, 2

Mateo Tomašević

Abstract

Neka su A i B C^* -algebre s centrima $Z(A)$ odnosno $Z(B)$ te neka je $\phi : A \rightarrow B$ *-epimorfizam. Tada uvijek vrijedi inkluzija

$$\phi(Z(A)) \subseteq Z(B).$$

U ovoj situaciji je općenito $\phi(Z(A)) \neq Z(B)$. Za C^* -algebru A kažemo da zadovoljava **CQ-svojstvo** (engl. centre-quotient property, uvodi Archbold 1974.) ako za svaku C^* -algebru B i *-epimorfizam $\phi : A \rightarrow B$ vrijedi jednakost $\phi(Z(A)) = Z(B)$. Naziv dolazi od toga što C^* -algebra A zadovoljava CQ-svojstvo ako i samo ako za svaki obostran zatvoren ideal I u A vrijedi

$$q_I(Z(A)) = Z(A/I)$$

gdje je $q_I : A \rightarrow A/I$ kanonski epimorfizam.

U ova dva predavanja dat ćemo karakterizaciju *unitalnih* C^* -algebri koje zadovoljavaju CQ-svojstvo.

Misonou 1952. uvodi pojam **slabo centralne** C^* -algebre kao unitalne C^* -algebre takve da je preslikavanje

$$\eta_A : \text{Max } A \rightarrow \text{Max } Z(A), \quad \eta_A(M) = M \cap Z(A), \text{ za } M \in \text{Max } A$$

injektivno, gdje su $\text{Max } A$ i $\text{Max } Z(A)$ prostori maksimalnih ideala algebre A odnosno $Z(A)$.

Glavni rezultat koji prezentiramo je teorem danskog matematičara Jørgena Vesterstrøma iz 1971.:

Teorem (Vesterstrøm). *Za unitalnu C^* -algebru A ekvivalentno je:*

- (i) *A zadovoljava CQ-svojstvo.*
- (ii) *A je slabo centralna.*

Istaknuti primjeri slabo centralnih (unitalnih) C^* -algebri su:

- tzv. **centralne** C^* -algebre, koje se mogu okarakterizirati kao one čiji je prostor primitivnih ideala Hausdorffov,
- unitalne C^* -algebre koje imaju jedinstven maksimalan ideal (uključujući proste unitalne C^* -algebre), npr. $\mathbb{B}(\mathcal{H})$ gdje je \mathcal{H} separabilan beskonačnodimenzionalan Hilbertov prostor,
- Von Neumannove algebre.

R. Archbold i I. Gogić su 2019. poopćili Vesterstrømov teorem za općenite (ne nužno unitalne) C^* -algebre. Ta karakterizacija bit će prezentirana u trećem predavanju.