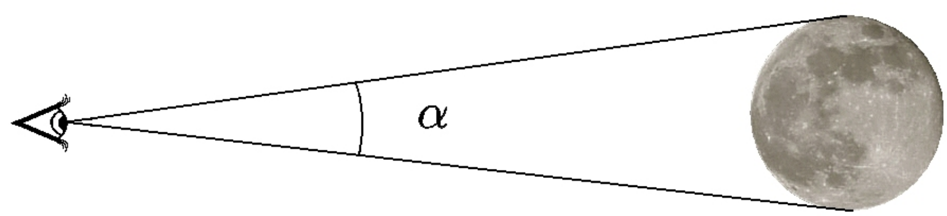
O veličini Mjeseca

Vedran Krčadinac[1], Zagreb

Jeste li ikada promatrali pun Mjesec u vedrim ljetnim noćima? Naročito ako je blizu horizonta, Mjesec izgleda ogromno. Ako je, naprotiv, bliže zenitu (točki koja se nalazi "ravno gore") ne djeluje tako impresivno. Kolika je zaista prividna veličina Mjeseca i zašto se čini da mijenja veličinu dok putuje nebom? Da bismo odgovorili na ta pitanja trebat će nam podaci o stvarnoj veličini Mjeseca, Zemlje, njihovoj međusobnoj udaljenosti i malo trigonometrije.

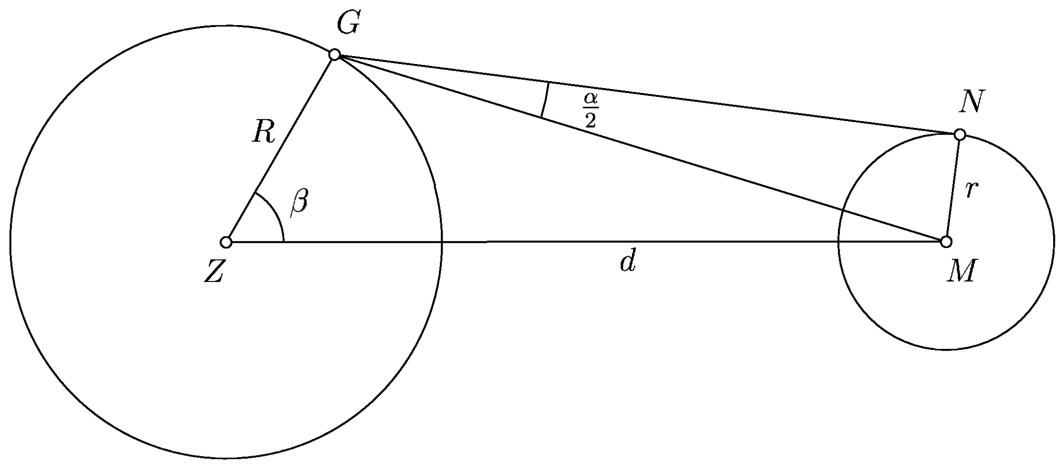


Slika 1.

Prividna veličina nebeskih tijela mjeri se stupnjevima, lučnim minutama i sekundama. Kao što je poznato puni krug ima 360 stupnjeva, ali s neke točke na Zemlji u danom trenutku vidimo samo pola "nebeske sfere", tj. 180 stupnjeva. Jedan stupanj dijeli se na 60 minuta, a jedna minuta na 60 sekundi. Kad kažemo da je veličina Mjeseca određen broj stupnjeva, minuta i sekundi, mislimo na mjerni broj kuta kojem je vrh u oku promatrača, a krakovi mu tangiraju Mjesec (slika 1). Zadatak je, dakle, izračunati kut α pod kojim vidimo Mjesec.

Mjesec i Zemlja su trodimenzionalna tijela. Da bismo mogli koristiti trigonometriju treba problem najprije svesti na dvije dimenzije. Promotrimo ravninu koja prolazi središtem Zemlje Z, središtem Mjeseca M i središtem naše glave G (slika 2). Označimo polumjer Zemlje R, polumjer Mjeseca r, a udaljenost središta Zemlje i Mjeseca d. Mi se naravno nalazimo na površini

[1]Autor je asistent na PMF - Matematičkom odjelu; e-mail: `krcko@math.hr`; `http://www.math.hr/~krcko`



Slika 2.

Zemlje, ali nije svejedno gdje. Kut pod kojim vidimo Mjesec ovisi o tome koliko smo od njega udaljeni, dakle o udaljenosti točaka G i M. Udaljenost možemo izraziti pomoću kuta $\beta = \sphericalangle GZM$; kasnije ćemo izračunati taj kut. Iz kosinusovog teorema primjenjenog na trokut ΔGZM dobivamo

$$|GM|^2 = R^2 + d^2 - 2Rd\cos\beta.$$

Promotrimo sada trokut ΔGMN, gdje je N diralište tangente iz G na kružnicu koja predstavlja Mjesec. U tom trokutu kut pri vrhu G iznosi pola kuta pod kojim vidimo Mjesec, $\frac{\alpha}{2}$. Osim toga znamo da je trokut pravokutan, jer je tangenta GN okomita na promjer MN; zato vrijedi

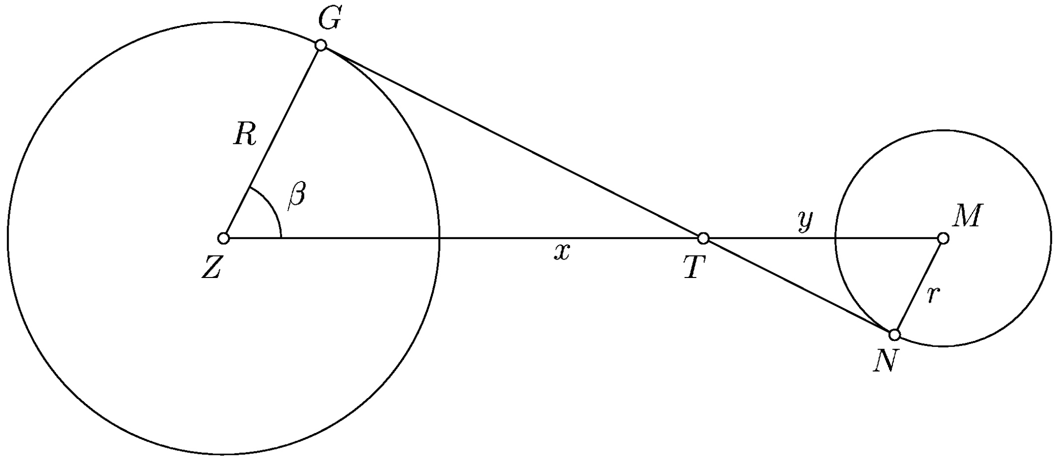
$$\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{|MN|}{|GM|} = \frac{r}{\sqrt{R^2 + d^2 - 2Rd\cos\beta}}.$$

Iz formule za sinus polovičnog kuta $\sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1}{2}(1-\cos\alpha)}$ dobivamo

$$\cos\alpha = 1 - 2\sin^2\frac{\alpha}{2} = 1 - \frac{2r^2}{R^2 + d^2 - 2Rd\cos\beta}.$$

Prema tome, kut pod kojim vidimo Mjesec iznosi

$$\alpha = \arccos\left(1 - \frac{2r^2}{R^2 + d^2 - 2Rd\cos\beta}\right).$$



Slika 3.

Još samo treba odrediti kut β. Očito je Mjesec u zenitu kada je $\beta = 0°$, pa ga u tom slučaju vidimo pod kutem

$$\alpha_z = \arccos\left(1 - \frac{2r^2}{R^2 + d^2 - 2Rd}\right).$$

Teže je odrediti kut β kad se Mjesec nalazi na horizontu. Za $\beta = 90°$ uopće ga ne bismo vidjeli. Naš je horizont tangenta u točki G na kružnicu koja predstavlja Zemlju, a u tom slučaju Mjesec leži s "nevidljive" strane horizonta. Želimo odrediti kut β kad Mjesec takne horizont, kao na slici 3. Označimo s T sjecište pravaca GN i ZM, te s $x = |ZT|$ i $y = |TM|$ naznačene udaljenosti. Očito je $x + y = d$, a iz sličnosti trokuta ΔZTG i ΔMTN slijedi $Ry = rx$. Rješavanjem ovog sustava dvije jednadžbe s dvije nepoznanice dobivamo

$$x = \frac{Rd}{R + r}.$$

Konačno, iz pravokutnog trokuta ΔZTG slijedi

$$\cos\beta = \frac{R}{x} = \frac{R + r}{d}.$$

Prema tome, Mjesec na horizontu vidimo pod kutem

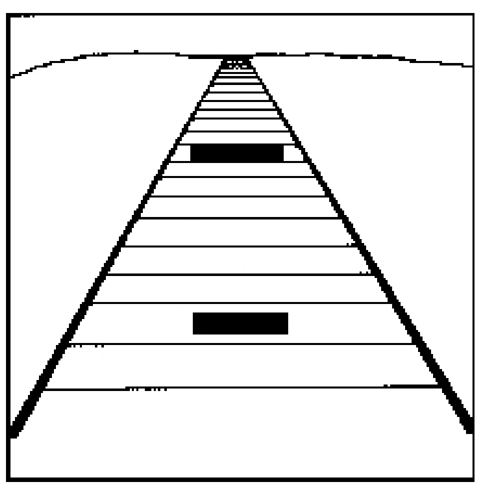
$$\alpha_h = \arccos\left(1 - \frac{2r^2}{R^2 + d^2 - 2R(R + r)}\right).$$

Da bismo izračunali konkretne vrijednosti α_z i α_h treba nam polumjer Zemlje R, Mjeseca r i udaljenost njihovih središta d. Te je veličine lakše odrediti nego što se u prvi mah čini. Dovoljno je u pretraživač Interneta kao što je Google ili Altavista unijeti nekoliko ključnih riječi (Earth, Moon, radius, distance...). Na taj način dobivaju se vrijednosti $R = 6400$ km, $r = 1700$ km, $d = 392500$ km. Sada je pomoću kalkulatora lako izračunati $\alpha_h = 0°29'47''$ i $\alpha_z = 0°30'16''$. To znači da Mjesec na horizontu vidimo pod kutem malo manjim od pola stupnja, a u zenitu malo većim od pola stupnja.

Došao je trenutak kad se moramo upitati vjerujemo li više vlastitim očima ili matematici. Na početku članka sam spomenuo, a vjerujem da će se čitatelj složiti, da Mjesec izgleda veći kad je blizu horizonta. Rezultat koji smo dobili upravo je obrnut!

U ovom slučaju ne radi se o greški u proračunu, nego nas zaista oči varaju. Mjesec se na horizontu čini većim zbog optičke varke. Naš vid je zasnovan na očima koje prikupljaju informacije i mozgu koji ih tumači. Za procjenu veličine predmeta mozak koristi kut pod kojim ga vidimo i udaljenost od predmeta. Vidjeli smo da se iz veličine predmeta i udaljenosti može izračunati kut, ali ide i obrnuto. Na temelju kuta i udaljenosti moguće je odrediti veličinu predmeta, što se u mozgu naravno dešava na nesvjesnoj razini.

Problem nastaje zbog toga što mozak ponekad krivo procijeni udaljenost od predmeta. Na primjer, gornji pravokutnik na slici 4 čini se veći od donjeg, iako su potpuno jednake veličine (ako ne vjerujete izmjerite ih centimetrom!). Zbog dojma perspektive kojeg stvaraju tračnice čini nam se da je gornji



Slika 4.

pravokutnik udaljeniji. Oba pravokutnika vide se pod istim kutem, pa naš mozak tumači da je gornji veći.

Sličnu iluziju možemo izazvati tako da se zagledamo u žarulju dovoljno dugo da na mrežnici oka ostane “mrlja”. Ako pogled skrenemo na papir, učinit će nam se da mrlja mijenja veličinu kad papir pomičemo naprijed–nazad. Naravno, mrlju vidimo pod istim kutem, ali mijenja se udaljenost od papira na kojem je vidimo.

Iluzija s Mjesecom također nastaje zbog krive procjene udaljenosti. Većina ljudi doživljava nebo kao elipsoid. Predmete koji se nalaze ravno gore (blizu zenita) doživljavamo kao relativno bliske, ali za predmete na horizontu znamo da su jako daleko. Možda je i bolje da nebo podsvjesno tumačimo kao malo viši strop, jer bi inače svaki pogled na gore izazivao užas; gledajući u vedro nebo gledamo ravno u beskonačnost. Izračunali smo da Mjesec zapravo jako malo mijenja prividnu veličinu dok putuje nebom. Razlika $\alpha_z - \alpha_h$ iznosi 29 lučnih sekundi, što je svega 1.6% prividne veličine Mjeseca. Tako malu razliku prostim okom ne možemo ni primijetiti. Kad je Mjesec blizu horizonta svjesni smo da je jako daleko, pa nam zato izgleda velik. Kad se nalazi blizu zenita krivo procjenjujemo njegovu udaljenost i zbog toga nam se čini manjim.

Ako se želite uvjeriti da nebo zaista doživljavamo kao elipsoid, možete pokus s mrljom od žarulje isprobati na nebu. Kad pogledate horizont mrlja će vam se činiti velika, a u zenitu će izgledati mala.

Za kraj primijetimo da Mjesec u većini slučajeva ne vidimo niti na horizontu niti u zenitu, nego negdje između. Kako u tom slučaju dobiti kut β, potreban za izračunavanje prividne veličine Mjeseca α? Prisjetimo se da je β kut s vrhom u središtu Zemlje, kojem jedan krak prolazi središtem Mjeseca, a drugi kroz mjesto na kojem se nalazimo. Središte Zemlje čak nam je manje dostupno od Mjeseca, pa kut β ne možemo izmjeriti direktno. Međutim, možemo izmjeriti kut γ između zenita i središta Mjeseca. Pokušajte sami izraziti vezu kuteva γ i β – trebat će vam samo malo trigonometrije. . .

Literatura

[1] C. J. Wenning, *New Thoughts on Understanding the Moon Illusion*, Planetarian, vol. 14, prosinac 1985.
`http://www.griffithobs.org/IPSMoonIllus.html`

[2] I. N. Bronštejn, K. A. Semendjajev, *Matematički priručnik za inženjere i studente*, Tehnička knjiga, Zagreb, 1991.