Polarni prostori

Vedran Krčadinac, 2012./2013.

Polarni prostori

V. Krčadinac, 2012./2013., 60 sati.

Polarni prostori opisuju geometriju vektorskog prostora sa seskvilinearnom ili kvadratnom formom na sličan način kao što projektivni prostori opisuju geometriju vektorskog prostora. Cilj kolegija je ponovniti osnove n-dimenzionalne projektivne geometrije, temeljito obraditi polarne prostore i objasniti ideje dijagramske geometrije i zgrada (*buildings*).

Uvod u projektivnu geometriju temeljit ćemo na knjizi [1]. Ponovit ćemo aksiomatski i analitički pristup projektivnoj geometriji i obraditi kvadratne skupove. Polarne prostore obradit ćemo koristeći se knjigama [3] i [4]. Objasnit ćemo klasifikaciju polariteta, seskvilinearnih i kvadratnih formi, Buekenhout-Shultove aksiome i generalizirane četverokute. Posebnu pažnju posvetit ćemo konačnom slučaju. Titsov rezultat o klasifikaciji polarnih prostora ranga većeg ili jednakog 3 obradit ćemo bez dokaza. Na kraju ćemo uklopiti projektivne i polarne prostore u dijagramsku geometriju i teoriju zgrada, koristeći se dijelovima knjige [2].

Ovisno o broju studenata, polaganje ispita predviđa se kroz individualne projektne zadatke (izlaganje na znanstvenom seminaru ili pisani rad), klasični usmeni ispit ili kombinaciju oba pristupa. Za studente koji se bave ovim područjem originalni znanstveni rad povezan s temom kolegija može zamijeniti polaganje ispita.

Literatura

1. A. Beutelspacher, U. Rosenbaum, *Projective geometry: from foundations to applications*, Cambridge University Press, 1998.

2. F. Buekenhout, A.M. Cohen, *Diagram geometry related to classical groups* (draft), 2012. `http://www.win.tue.nl/~amc/buek/book1n.pdf`

3. P.J. Cameron, *Projective and polar spaces* (lecture notes), Queen Mary and Westfield College, 2000. `http://www.maths.qmul.ac.uk/~pjc/pps/`

4. J. Ueberberg, *Foundations of incidence geometry. Projective and polar spaces*, Springer Verlag, 2011.

Polar spaces

V. Krčadinac, 2012./2013., 60 hours.

Polar spaces describe the geometry of vector spaces with a sesquilinear or quadratic form in a similar way as projective spaces describe the geometry of vector spaces. The goal of this course is to review the basics of n-dimensional projective geometry, thoroughly cover polar spaces, and explain the main ideas of diagram geometry and buildings.

The introduction to projective geometry will be based on the book [1]. We will review the axiomatic and the analytic approach to projective spaces and cover quadratic sets. For polar spaces, the books [3] and [4] will be used. We will explain the classification of polarities, sesquilinear and quadratic forms, the Buekenhout-Shult axioms, and generalized quadrangles. We will pay special attention to the finite case. Tits' result about the classification of polar spaces of rank greater than or equal to 3 will be covered without a complete proof. Finally, we will shed some light on projective and polar spaces as part of diagram geometry and the theory of buildings, using parts of the book [2].

Depending on the number of students, the exam will be based on individual project assignments (scientific seminars or written essays), a classic oral exam or a combination of both approaches. For students doing research in this field, an original scientific paper related to the topic of the course can replace the exam.

Bibliography

1. A. Beutelspacher, U. Rosenbaum, *Projective geometry: from foundations to applications*, Cambridge University Press, 1998.

2. F. Buekenhout, A.M. Cohen, *Diagram geometry related to classical groups* (draft), 2012. `http://www.win.tue.nl/~amc/buek/book1n.pdf`

3. P.J. Cameron, *Projective and polar spaces* (lecture notes), Queen Mary and Westfield College, 2000. `http://www.maths.qmul.ac.uk/~pjc/pps/`

4. J. Ueberberg, *Foundations of incidence geometry. Projective and polar spaces*, Springer Verlag, 2011.

Sadržaj

Verzija 9, 25. ožujka 2013.

1 Projektivni prostori

1.1 Analitički pristup

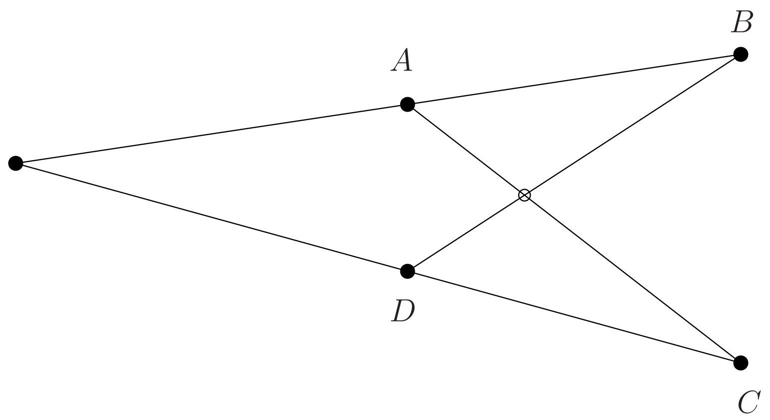
Definicija 1.1. Projektivni prostor *$PG(n, F)$ je vektorski prostor V dimenzije $n + 1$ nad poljem F (ne nužno komutativnim).* Točke *su jednodimenzionalni potprostori od V,* pravci *su dvodimenzionalni potprostori od V, a* ravnine *su trodimenzionalni potprostori od V. Općenito, k-dimenzionalni* projektivni potprostor *(k-ravnina) od $PG(n, F)$ je potprostor od V dimenzije $k + 1$.*

Incidencija projektivnih potprostora definira se preko inkluzije potprostora od V. Naprimjer, kažemo da točka T leži na pravcu p ako je odgovarajući jednodimenzionalni potprostor od V sadržan u odgovarajućem dvodimenzionalnom potprostoru od V.

Propozicija 1.2 (Aksiom o pravcima)**.** *Kroz svake dvije točke prolazi jedinstveni pravac.*

Dokaz. Svaka dva jednodimenzionalna potprostora od V razapinju jedinstveni dvodimenzionalni potprostor od V. □

Propozicija 1.3 (Veblen-Youngov aksiom)**.** *Neka su A, B, C, D četiri točke takve da pravac AB siječe pravac CD. Onda i pravac AC siječe pravac BD.*



Slika 1: Veblen-Youngov aksiom.

Dokaz. Neka je $A = \langle a \rangle$, $B = \langle b \rangle$, $C = \langle c \rangle$ i $D = \langle d \rangle$, pri čemu su $a, b, c, d \in V$. Tada je $AB = \{\alpha a + \beta b \mid \alpha, \beta \in F\}$ i $CD = \{\gamma c + \delta d \mid \gamma, \delta \in F\}$. Budući da se AB i CD sijeku, postoje $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in F$ koji nisu svi nula takvi da je $\alpha a + \beta b = \gamma c + \delta d$. No tada vektor $\alpha a - \gamma c = \delta d - \beta b$ razapinje jednodimenzionalni potprostor od V koji je sjecište pravaca AC i BD. □

Propozicija 1.4. *Na svakom pravcu leže bar tri točke.*

Dokaz. Pravac kao dvodimenzionalni potprostor od V sadrži dva linearno nezavisna vektora a i b. Lako se provjeri da su $\langle a \rangle$, $\langle b \rangle$ i $\langle a+b \rangle$ tri različite točke na tom pravcu. □

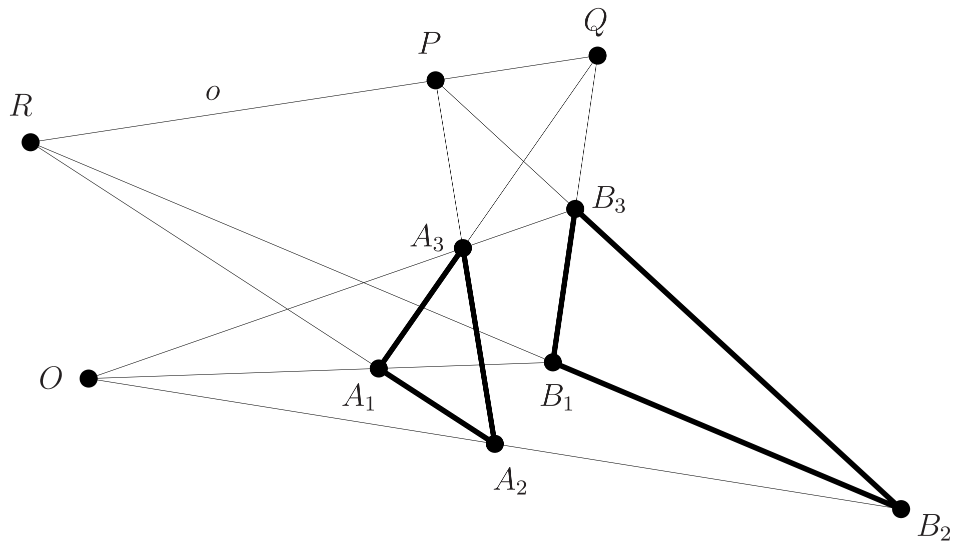
Propozicija 1.5. *Ako je $n \geq 2$, postoje bar dva pravca.*

Dokaz. Vektorski prostor V je dimenzije $n+1 \geq 3$ i ima bar dva dvodimenzionalna potprostora. Naprimjer, ako su $a, b, c \in V$ linearno nezavisni, možemo uzeti potprostore $\langle a, b \rangle$ i $\langle a, c \rangle$. □

Definicija 1.6. *Uređenu m-torku točaka $(A_1, \ldots, A_m)$ sa svojstvom da nikoje tri uzastopne točke nisu kolinearne nazivamo m-*terovrhom*. Uređaj shvaćamo ciklički (trojke A_{m-1}, A_m, A_1 i A_m, A_1, A_2 smatramo uzastopnim), a m-terovrh zapisujemo bez zagrada i zareza: $A_1 A_2 \cdots A_m$.*

Za trovrhe $A_1A_2A_3$ i $B_1B_2B_3$ kažemo da su *centralno perspektivni* ako spojnice odgovarajućih vrhova, A_1B_1, A_2B_2 i A_3B_3, prolaze jednom točkom O. Tu točku zovemo *centrom perspektiviteta.* Za trovrhe kažemo da su *osno perspektivni* ako se odgovarajuće stranice sijeku: $A_2A_3 \cap B_2B_3 = P$, $A_1A_3 \cap B_1B_3 = Q$, $A_1A_2 \cap B_1B_2 = R$, i ako točke P, Q, R leže na jednom pravcu o. Taj pravac zovemo *os perspektiviteta.*

Teorem 1.7 (Desargues)**.** *Ako su dva trovrha centralno perspektivni, onda su oni i osno perspektivni.*



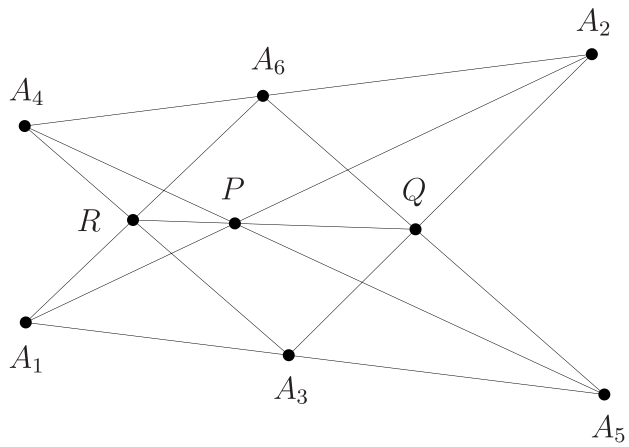
Slika 2: Desarguesov teorem.

Dokaz. Neka su $A_i = \langle a_i \rangle$ i $B_i = \langle b_i \rangle$, za neke $a_i, b_i \in V$, $i = 1, 2, 3$. Točka $O = \langle o \rangle$ leži na pravcima A_1B_1, A_2B_2 i A_3B_3. Zato postoje α_1, α_2, α_3, β_1, β_2, $\beta_3 \in F$ takvi da je $o = \alpha_1 a_1 + \beta_1 b_1 = \alpha_2 a_2 + \beta_2 b_2 = \alpha_3 a_3 + \beta_3 b_3$. Iz toga slijedi $p = \alpha_2 a_2 - \alpha_3 a_3 = \beta_3 b_3 - \beta_2 b_2$, pa je točka $P = \langle p \rangle$ sjecište pravaca A_2A_3 i B_2B_3 (iz Veblen-Youngova aksioma primijenjenog na točke A_2, B_2, A_3, B_3 također slijedi da se ti pravci sijeku). Analogno vidimo da se pravci A_1A_3 i B_1B_3 sijeku u točki $Q = \langle q \rangle$ za $q = \alpha_1 a_1 - \alpha_3 a_3 = \beta_3 b_3 - \beta_1 b_1$, a pravci A_1A_2 i B_1B_2 u točki $R = \langle r \rangle$ za $r = \alpha_1 a_1 - \alpha_2 a_2 = \beta_2 b_2 - \beta_1 b_1$. Točke P, Q, R su kolinearne jer su vektori p, q, r linearno zavisni; naime, vrijedi $p - q + r = 0$. □

U prostorima dimenzije $n \geq 3$ Desarguesov teorem može se dokazati geometrijski, bez korištenja linearne algebre (vidi dokaz teorema 1.29).

Definicija 1.8. *Za šesterovrh $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ kažemo da je* Paposov *ako točke A_1, A_3, A_5 leže na pravcu p, točke A_2, A_4, A_6 leže na pravcu q i ako se niti jedan od vrhova ne podudara sa sjecištem pravaca p i q.*

Teorem 1.9 (Paposov teorem)**.** *Polje F je komutativno ako i samo ako u prostoru $PG(n, F)$ za svaki Paposov šesterovrh $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ vrijedi da se parovi nasuprotnih stranica sijeku u trima kolinearnim točkama, tj. da točke $P = A_1A_2 \cap A_4A_5$, $Q = A_2A_3 \cap A_5A_6$ i $R = A_3A_4 \cap A_6A_1$ leže na pravcu.*



Slika 3: Paposov teorem.

Zadaci

Zadatak 1.1. *Nađite primjer polja F u kojem množenje nije komutativno. Postoji li konačno polje F s nekomutativnim množenjem?*

Zadatak 1.2. *Ako je $F = \mathbb{F}_q$ konačno polje s q elemenata, koliko u prostoru $PG(n, F)$ ima točaka, pravaca, ..., k-ravnina?*

Zadatak 1.3. *Dokažite Paposov teorem.*

1.2 Aksiomatski pristup

Projektivnu ravninu definiramo kao incidencijsku strukturu (točke, pravci, incidencija) koja zadovoljava sljedeće aksiome:

(P_1) kroz svake dvije točke prolazi jedinstveni pravac,

(P_2) svaka dva pravca sijeku se u jedinstvenoj točki,

(P_3) na svakom pravcu leže bar tri točke; postoje bar dva pravca.

Propozicija 1.10. *Ako je skup točaka i skup pravaca projektivne ravnine konačan, onda postoji prirodan broj $q \geq 2$ takav da vrijedi:*

1. *na svakom pravcu leži $q + 1$ točaka,*
2. *kroz svaku točku prolazi $q + 1$ pravaca,*
3. *ukupan broj točaka je $q^2 + q + 1$,*
4. *ukupan broj pravaca je $q^2 + q + 1$.*

Dokaz. Skup pravaca koji prolaze kroz točku T označavamo $[T]$, a skup točaka koje leže na pravcu p označavamo $[p]$. Za bilo koja dva pravca p_1, p_2 zbog aksioma (P_3) postoji točka C koja ne leži niti na jednom od njih. S pomoću točke C možemo uspostaviti bijekciju između skupova $[p_1]$ i $[p_2]$: točki $T \in p_1$ pridružimo sjecište pravaca CT i p_2 (to je *centralno projiciranje* s centrom C). Na sličan način uspostavljamo bijekciju između skupova $[T_1]$ i $[T_2]$, odnosno $[T]$ i $[p]$. Prema tome, u konačnom slučaju postoji prirodan broj $q \geq 2$ takav da je $\operatorname{card}[T] = \operatorname{card}[p] = q + 1$ za svaku točku T i za svaki pravac p. Da bismo prebrojili koliko ukupno ima točaka uzmemo čvrstu točku T_0; na svakom od $q + 1$ pravaca kroz T_0 osim te točke leži još q točaka. Zato je ukupan broj točaka $(q+1)q+1 = q^2+q+1$, a zbog dualnosti to je i ukupan broj pravaca. □

Broj q nazivamo *redom* projektivne ravnine. Sve poznate konačne projektivne ravnine imaju red koji je prim potencija, ali **nisu** sve izomorfne klasičnoj projektivnoj ravnini $PG(2, q)$ (to je oznaka za $PG(2, F)$ kada je $F = \mathbb{F}_q$ konačno polje).

Aksiome *projektivnog prostora* dobivamo oslabljivanjem zahtjeva (P_2), tj. zamjenom s Veblen-Youngovim aksiomom:

(P_2') ako su A, B, C, D četiri točke takve da pravac AB siječe pravac CD, onda i pravac AC siječe pravac BD.

U projektivnoj ravnini to je ispunjeno jer se svaka dva pravca sijeku. Općenito mogu postojati pravci koji se ne sijeku – zovemo ih *mimoilaznim* ili *mimosmjernim* pravcima (u projektivnoj geometriji nema paralelnih pravaca!). U apstraktnom projektivnom prostoru $\mathcal{P}$ (incidencijskoj strukturi koja zadovoljava aksiome (P_1), (P_2') i (P_3)) imamo samo točke i pravce (ravnine dimenzije 0 i 1), a u projektivnom prostoru $PG(n, F)$ imali smo ravnine dimenzije $k = 0, 1, \ldots, n$. Ovako definiramo ravnine u $\mathcal{P}$.

Definicija 1.11. Ravnina *ili* linearni skup *je svaki skup točaka $\mathcal{R}$ sa svojstvom da za svake dvije točke $A, B \in \mathcal{R}$ sadrži i sve točke pravca AB.*

Trivijalni primjeri ravnina su jednočlani skupovi (0-ravnine), skupovi oblika $[p]$ za neki pravac p (1-ravnine) i cijeli prostor. Za bilo koji skup točaka $\mathcal{S}$ definiramo *ravninu razapetu sa $\mathcal{S}$* (oznaka: $\langle \mathcal{S} \rangle$) kao presjek svih ravnina koje sadrže $\mathcal{S}$. Sljedeći teorem opisuje kako od točaka i pravaca gradimo ravnine većih dimenzija.

Teorem 1.12. *Neka je $\mathcal{R}$ ravnina i T točka koja joj ne pripada. Tada je $\langle \mathcal{R}, T \rangle = \bigcup\limits_{R \in \mathcal{R}} [RT]$, gdje $[RT]$ označava skup svih točaka na pravcu RT.*

Dokaz. ($\supseteq$) Skup $\langle \mathcal{R}, T \rangle$ je po definiciji linearan, pa za svaki $R \in \mathcal{R}$ vrijedi $\langle \mathcal{R}, T \rangle \supseteq [RT]$. Zato je $\langle \mathcal{R}, T \rangle \supseteq \bigcup\limits_{R \in \mathcal{R}} [RT]$.

($\subseteq$) Za obrnutu inkluziju dovoljno je dokazati da je $\mathcal{S} = \bigcup\limits_{R \in \mathcal{R}} [RT]$ linearni skup. Tada je $\langle \mathcal{R}, T \rangle \subseteq \mathcal{S}$ kao najmanji linearni skup koji sadrži $\mathcal{R}$ i T. Provjeravamo da za svake dvije točke $A, B \in \mathcal{S}$ vrijedi $[AB] \subseteq \mathcal{S}$. Tvrdnja je očita ako su $A, B \in \mathcal{R}$ ili ako je $T \in [AB]$ (tada je $[AB] = [RT]$ za neki $R \in \mathcal{R}$). Zato pretpostavimo da točke A, B nisu obje u $\mathcal{R}$ i da $[AB]$ ne sadrži točku T.

Najprije pretpostavimo da je $A \in \mathcal{R}$ i $B \notin \mathcal{R}$. Budući da je $B \in \mathcal{S}$, postoji $B' \in \mathcal{R}$ takav da je $B \in [B'T]$. Uzmimo proizvoljni $X \in [AB]$; AX siječe $B'T$ u točki B, pa po Veblen-Youngovu aksiomu AB' siječe XT u nekoj točki X'. Zbog linearnosti je $[B'A] \subseteq \mathcal{R}$, pa iz $X' \in [AB']$ slijedi $X' \in \mathcal{R}$. Dakle, $X \in [X'T] \subseteq \mathcal{S}$. Kako je točka $X \in [AB]$ bila proizvoljna, dokazali smo da je $[AB] \subseteq \mathcal{S}$.

Na kraju pretpostavimo da $A \notin \mathcal{R}$ i $B \notin \mathcal{R}$. Tada postoje točke $A', B' \in \mathcal{R}$ takve da je $A \in [A'T]$ i $B \in [B'T]$. Pravac AA' siječe BB' u točki T, pa po Veblen-Youngovu aksiomu AB siječe $A'B'$. Zbog linearnosti je $[A'B'] \subseteq \mathcal{R}$, dakle AB sadrži točku iz $\mathcal{R}$. Time smo ovaj slučaj sveli na prethodni. $\square$

Korolar 1.13. *Uz oznake kao u prethodnom teoremu, svaki pravac sadržan u* $\langle \mathcal{R}, T \rangle$ *siječe ravninu* $\mathcal{R}$*.*

Teorem 1.14 (svojstvo zamjene)**.** *Neka je* $\mathcal{R}$ *ravnina i* T *točka koja joj ne pripada. Ako je* $S \in \langle \mathcal{R}, T \rangle \setminus \mathcal{R}$*, onda je* $T \in \langle \mathcal{R}, S \rangle \setminus \mathcal{R}$*. Tada vrijedi* $\langle \mathcal{R}, T \rangle = \langle \mathcal{R}, S \rangle$*.*

Dokaz. Zbog teorema 1.12 iz $S \in \langle \mathcal{R}, T \rangle$ i $S \notin \mathcal{R}$ slijedi postojanje točke $S' \in \mathcal{R}$ takve da je $S \in [TS']$. Tada je očito $T \in [SS'] \subseteq \langle \mathcal{R}, S \rangle$. Budući da $\langle \mathcal{R}, T \rangle$ sadrži $\mathcal{R}$ i S, a $\langle \mathcal{R}, S \rangle$ je najmanja ravnina koja ih sadrži, vrijedi $\langle \mathcal{R}, S \rangle \subseteq \langle \mathcal{R}, T \rangle$. Analogno se dobije obrnuta inkluzija. □

Korolar 1.15. *Svaka dva linearna skupa razapeta ravninom* $\mathcal{R}$ *i točkom izvan* $\mathcal{R}$ *sijeku se u* $\mathcal{R}$*.*

Cilj nam je uvesti pojmove nezavisnosti, baze i dimenzije u apstraktni projektivni prostor $\mathcal{P}$. Svojstva su vrlo slična odgovarajućim pojmovima u vektorskom prostoru. Za skup točaka $\mathcal{S}$ kažemo da *razapinje* ili *generira* $\mathcal{P}$ ako vrijedi $\langle \mathcal{S} \rangle = \mathcal{P}$. Da bismo se ograničili na konačnodimenzionalne projektivne prostore treba nam sljedeći aksiom:

(P_4) postoji konačan skup točaka koji razapinje $\mathcal{P}$.

Definicija 1.16. *Za skup točaka* $\mathcal{S}$ *kažemo da je* nezavisan *ako za svaku točku* $T \in \mathcal{S}$ *vrijedi* $T \notin \langle \mathcal{S} \setminus \{T\} \rangle$*. Nezavisan skup točaka koji razapinje* $\mathcal{P}$ *zovemo* bazom*.*

Dokazi teorema u nastavku nalaze se u knjizi [2].

Teorem 1.17. *Skup točaka* $\mathcal{B}$ *je baza ako i samo ako je minimalni razapinjući skup od* $\mathcal{P}$*, tj. ako razapinje* $\mathcal{P}$*, a niti jedan pravi podskup od* $\mathcal{B}$ *ne razapinje* $\mathcal{P}$*.*

Teorem 1.18. *Neka je* $\mathcal{S}$ *konačan skup točaka koji razapinje* $\mathcal{P}$*. Onda postoji podskup* $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{S}$ *koji je baza. Posebno, projektivni prostor ima konačnu bazu.*

Lema 1.19. *Neka je* $\mathcal{S}$ *konačan nezavisan skup točaka i neka su* $\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2 \subseteq \mathcal{S}$ *njegovi podskupovi. Onda vrijedi* $\langle \mathcal{S}_1 \cap \mathcal{S}_2 \rangle = \langle \mathcal{S}_1 \rangle \cap \langle \mathcal{S}_2 \rangle$*.*

Lema 1.20. *Neka je* $\mathcal{B}$ *konačna baza i* T *bilo koja točka projektivnog prostora. Onda postoji točka* $B \in \mathcal{B}$ *takva da je* $(\mathcal{B} \setminus \{B\}) \cup \{T\}$ *također baza.*

Teorem 1.21 (Steinitzov teorem zamjene)**.** *Neka je* $\mathcal{B}$ *konačna baza projektivnog prostora koja sadrži* r *točaka. Ako je* $\mathcal{S}$ *nezavisan skup koji sadrži* s *točaka, onda je* $s \leq r$ *i postoji* $(r-s)$*-člani podskup* $\mathcal{B}' \subseteq \mathcal{B}$ *takav da je* $\mathcal{S} \cup \mathcal{B}'$ *baza.*

Korolar 1.22. *Svake dvije baze projektivnog prostora imaju jednako mnogo elemenata. Svaki nezavisni skup može se nadopuniti do baze.*

Definicija 1.23. *Ako je $n+1$ broj elemenata bilo koje baze, kažemo da je n* dimenzija *projektivnog prostora $\mathcal{P}$ i pišemo $n = \dim \mathcal{P}$.* Hiperravnina *je ravnina dimenzije $n-1$ u projektivnom prostoru dimenzije n.*

Propozicija 1.24. *Neka je $\mathcal{R}$ ravnina projektivnog prostora $\mathcal{P}$. Onda je $\dim \mathcal{R} \leq \dim \mathcal{P}$, a jednakost vrijedi ako i samo ako je $\mathcal{R} = \mathcal{P}$.*

Lema 1.25. *Neka je $\mathcal{P}$ projektivni prostor dimenzije n, a $\mathcal{R}$ ravnina dimenzije k. Onda postoji $n-k$ hiperravnina u $\mathcal{P}$ takvih da je njihov presjek $\mathcal{R}$.*

Teorem 1.26. *Za svake dvije ravnine $\mathcal{R}_1$, $\mathcal{R}_2$ vrijedi formula $\dim\langle \mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2\rangle = \dim \mathcal{R}_1 + \dim \mathcal{R}_2 - \dim(\mathcal{R}_1 \cap \mathcal{R}_2)$.*

Aksiom (P_3) služi da izbjegnemo degenerirane slučajeve projektivnih prostora kao što su jedna točka bez pravaca, ili sve točke na jednom pravcu. Ovo je slabija verzija aksioma nedegeneriranosti:

(P_3') na svakom pravcu leže bar dvije točke.

Incidencijsku strukturu koja zadovoljava aksiome (P_1), (P_2') i (P_3') zovemo *generalizirani projektivni prostor*. Osim spomenutih degeneriranih projektivnih prostora (jedna točka bez pravaca; jedan pravac na kojem leže sve točke), primjere dobivamo konstrukcijom sume. Neka je $\{\mathcal{P}_i \mid i \in I\}$ familija (degeneriranih) projektivnih prostora. *Suma* te familije je incidencijska struktura koja se sastoji od disjunktne unije točaka od $\mathcal{P}_i$, pravaca iz $\mathcal{P}_i$ i po jednog dvočlanog pravca za svaki par točaka iz različitih komponenti sume. Lako se provjeri da suma zadovoljava aksiome (P_1), (P_2') i (P_3'), tj. da je generalizirani projektivni prostor. Štoviše, na taj se način dobiva svaki generalizirani projektivni prostor.

Teorem 1.27. *Svaki generalizirani projektivni prostor je suma neke familije projektivnih prostora i degeneriranih projektivnih prostora.*

Dokaz. Vidi [8], teorem 3.6. □

Vidjeli smo da strukturu potprostora (ravnina) projektivnog prostora $\mathcal{P}$ možemo rekonstruirati iz točaka, pravaca i incidencije među njima. Skup svih potprostora čini obzirom na inkluziju $\subseteq$ parcijalno uređen skup. Taj je p.u. skup rešetka, jer ima najmanji element $\emptyset$, najveći element $\mathcal{P}$ i za svake dvije ravnine $\mathcal{R}_1$, $\mathcal{R}_2$ postoji infimum $\mathcal{R}_1 \cap \mathcal{R}_2$ i supremum $\langle \mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2\rangle$. Projektivni prostori mogu se aksiomatizirati kao rešetke koje zadovoljavaju ova dodatna svojstva:

1. modularnost: ako je $\mathcal{R}_1 \subseteq \mathcal{R}_3$, onda za svaki $\mathcal{R}_2$ vrijedi $\langle \mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2 \cap \mathcal{R}_3 \rangle = \langle \mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2 \rangle \cap \mathcal{R}_3$,

2. atomarnost: za svaki $\mathcal{R} \neq \emptyset$ postoje atomi $\mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_k$ takvi da je $\mathcal{R} = \langle \mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_k \rangle$.

Pritom se *atomi* definiraju kao minimalni elementi u rešetki bez najmanjeg elementa $\emptyset$. Pokazuje se da su modularne i atomarne rešetke ekvivalentne konačnodimenzionalnim generaliziranim projektivnim prostorima.

Postoje i drugi načini aksiomatizacije projektivnih prostora, naprimjer preko svojstava operacije zatvaranja $\langle\, .\, \rangle$ koja skupu točaka pridružuje ravninu koju razapinje, ili preko svojstava nezavisnih skupova (*matroidi*). Više o alternativnim aksiomima projektivnih prostora možete pročitati u knjizi [13].

U ovoj skripti koristit ćemo aksiome i jezik incidencijske geometrije, ne samo za projektivne prostore nego i za druge vrste geometrija.

Zadaci

Zadatak 1.4. *Dokažite Steinitzov teorem zamjene i sve potrebne pomoćne tvrdnje.*

Zadatak 1.5. *Dokažite teorem 1.26 i sve potrebne pomoćne tvrdnje.*

Zadatak 1.6. *Dokažite teorem 1.27.*

1.3 Reprezentacijski teoremi

Upoznali smo model projektivnog prostora $PG(n, F)$ nad poljem F i apstraktne projektivne prostore definirane aksiomima. Postavlja se pitanje jesu li $PG(n, F)$ jedini primjeri projektivnih prostora, ili postoje drugi, neizomorfni modeli?

Definicija 1.28. *Neka su $\mathcal{P}_1 = (\mathcal{T}_1, \mathcal{L}_1, I_1)$ i $\mathcal{P}_2 = (\mathcal{T}_2, \mathcal{L}_2, I_2)$ incidencijske strukture. Kažemo da su one* izomorfne *ako postoje bijekcije $\varphi : \mathcal{T}_1 \to \mathcal{T}_2$ i $\psi : \mathcal{L}_1 \to \mathcal{L}_2$ takve da za sve $T \in \mathcal{T}_1$, $\ell \in \mathcal{L}_1$ vrijedi $T\, I_1\, \ell \iff \varphi(T)\, I_2\, \psi(\ell)$.*

Izomorfizam projektivnih prostora preslikava ravnine u ravnine i pritom čuva dimenziju. Po definiciji čuva samo incidenciju između točaka i pravaca, ali vidjeli smo da je to dovoljno za rekonstruirati kompletnu strukturu potprostora.

Teorem 1.29. *U svakom projektivnom prostoru dimenzije $n \geq 3$ vrijedi Desarguesov teorem: ako su dva trovrha centralno perspektivni, onda su oni i osno perspektivni.*

Dokaz. Ako trovrsi $A_1A_2A_3$ i $B_1B_2B_3$ ne leže u istoj ravnini, točke P, Q i R očito pripadaju ravnini u kojoj je $A_1A_2A_3$ i ravnini u kojoj je $B_1B_2B_3$ (oznake su kao na slici 2). Presjek te dvije ravnine je pravac, jer ravnine leže u trodimenzionalnom potprostoru razapetom pravcima kroz O. Dakle, P, Q i R su na pravcu. Slučaj kad su trovrsi u istoj ravnini je kompliciraniji i ovisi o činjenici da je ravnina uložena u prostor.

Neka trovrsi leže u istoj ravnini π i neka su O' i O'' točke izvan π takve da su O, O' i O'' kolinearne. Pravac A_1B_1 siječe pravac $O'O''$ u točki O, pa po Veblen-Youngovu aksiomu A_1O' siječe B_1O'' u nekoj točki C_1. Analogno definiramo $C_2 = A_2O' \cap B_2O''$ i $C_3 = A_3O' \cap B_3O''$. Točke C_1, C_2, C_3 čine trovrh koji ne leži u ravnini π. Presjek ravnine razapete s $C_1C_2C_3$ i ravnine π je pravac; označimo ga o. Trovrsi $A_1A_2A_3$ i $C_1C_2C_3$ su perspektivni iz centra O' i ne leže u istoj ravnini, pa po prvom slučaju zaključujemo da $P' = A_2A_3 \cap C_2C_3$, $Q' = A_1A_3 \cap C_1C_3$ i $R' = A_1A_2 \cap C_1C_2$ leže na pravcu o. Analogno, $P'' = B_2B_3 \cap C_2C_3$, $Q'' = B_1B_3 \cap C_1C_3$ i $R'' = B_1B_2 \cap C_1C_2$ leže na o. Točke P' i P'' se podudaraju jer su obje presjek pravaca o i C_2C_3, a pravci A_2A_3 i B_2B_3 također se sijeku u toj točki. Analogno, $Q' = Q'' = o \cap C_1C_3 = A_1A_3 \cap B_1B_3$ i $R' = R'' = o \cap C_1C_2 = A_1A_2 \cap B_1B_2$. Dakle, točke P, Q, R leže na pravcu o. $\square$

Pretpostavka da je dimenzija barem 3 je nužna – postoje projektivne ravnine u kojima ne vrijedi Desarguesov teorem. U cjelini 5.9 skripte [21] (str. 49–51) opisan je jedan konačan primjer, takozvana Hallova ravnina reda 9. Najpoznatiji beskonačni primjer je Moultonova ravnina, opisana u cjelini 2.6 knjige [2] (str. 76–78) i u [8] na str. 20. Tamo je opisana i konstrukcija slobodnih projektivnih ravnina kojom možemo dobiti mnoge primjere beskonačnih ravnina u kojima ne vrijedi Desarguesov teorem.

Desarguesov teorem je važan zato što karakterizira klasične projektivne prostore $PG(n, F)$.

Teorem 1.30. *Neka je $\mathcal{P}$ projektivni prostor dimenzije n u kojem vrijedi Desarguesov teorem. Onda postoji polje F takvo da je $\mathcal{P}$ izomorfan s $PG(n, F)$.*

Korolar 1.31. *Svaki projektivni prostor dimenzije $n \geq 3$ izomorfan je s $PG(n, F)$ za neko polje F.*

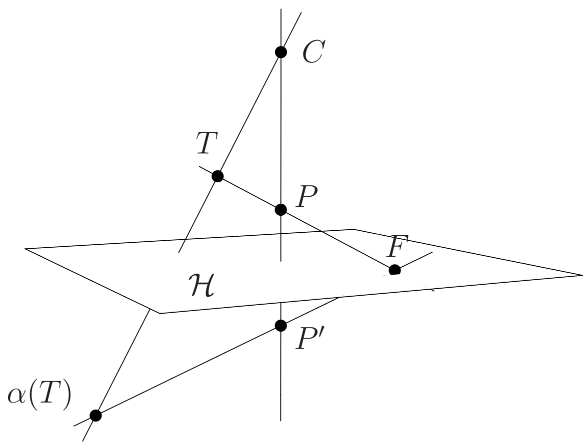
Teorem 1.30 može se dokazati s pomoću koordinatizacije. U apstraktnom projektivnom prostoru izaberemo koordinatni četverovrh i uvedemo binarne operacije zbrajanja i množenja (vidi [8, cjelina 1.3]). Algebarska svojstva binarnih operacija odgovaraju konfiguracijskim teoremima u projektivnom prostoru, a iz Desarguesova teorema slijedi da operacije čine polje F (ne nužno komutativno). Na kraju se pokazuje da je prostor od kojeg smo krenuli izomofan s $PG(n, F)$ za tako definirano polje F. Druga tehnika dokazivanja oslanja se na kolineacije.

Definicija 1.32. Kolineacija *ili* automorfizam *projektivnog prostora je izomorfizam na samoga sebe.*

Skup svih kolineacija čini grupu obzirom na kompoziciju, *punu grupu kolineacija* projektivnog prostora. U dokazu teorema 1.30 važnu ulogu igraju centralne kolineacije.

Definicija 1.33. *Za kolineaciju α kažemo da je* centralna kolineacija *ako postoji točka C i hiperravnina $\mathcal{H}$ takva da α fiksira svaki pravac kroz C i svaku točku na $\mathcal{H}$.*

Točku C zovemo *centar*, a hiperravninu $\mathcal{H}$ *os* centralne kolineacije. Skup svih centralnih kolineacija s čvrstim centrom i osi također čini grupu. Ako osim centra i osi znamo jedan par pridruženih točaka $P' = \alpha(P)$, djelovanje od α je potpuno određeno s $\alpha(T) = CT \cap FP'$, gdje je $F = PT \cap \mathcal{H}$.



Slika 4: Centralna kolineacija.

Desarguesov teorem osigurava egzistenciju centralne kolineacije za svaki izbor točaka P i P'.

Teorem 1.34. *Ako u projektivnom prostoru vrijedi Desarguesov teorem, onda za svaku točku C, hiperravninu $\mathcal{H}$ i za svaki par točaka P i P' izvan $\mathcal{H}$ takve da su C, P i P' kolinearne i međusobno različite postoji jedinstvena centralna kolineacija α s centrom C i osi $\mathcal{H}$ koja preslikava P na P'.*

Dokaz. Vidi [2], teorem 3.1.8. $\square$

Ako centar C leži na osi $\mathcal{H}$ centralnu kolineaciju zovemo *elacija*, a u suprotnom zovemo je *homologija*. Aditivna grupa polja pojavljuje se kao skup svih elacija s čvrstim centrom i osi, a multiplikativna grupa kao skup svih homologija (naravno, u projektivnom prostoru u kojemu vrijedi Desarguesov teorem).

Zbog teorema 1.30 prostore $PG(n, F)$ zovemo i *Desarguesovim projektivnim prostorima.* Za projektivne prostore u kojima vrijedi Paposov teorem pokazuje se da su izomorfni s $PG(n, F)$ za komutativno polje F. Iz toga slijedi da je Paposov teorem jači od Desarguesovog, a to se može dokazati i direktno (geometrijski).

Primjere kolineacije projektivnog prostora $PG(n, F)$ dobivamo od regularnih linearnih operatora odgovarajućeg $(n + 1)$-dimenzionalnog vektorskog prostora V. Zaista, regularni operator $A \in GL(V)$ preslikava potprostore u potprostore i pritom čuva dimenziju i inkluziju. Drugi način na koji možemo dobiti kolineaciju je od automorfizma polja F; vektore iz V shvaćamo kao uređene $(n + 1)$-torke elemenata iz F i sa $\sigma \in \mathrm{Aut}(F)$ djelujemo na sve koordinate. I to je bijekcija koja čuva incidenciju između točaka i pravaca (jednodimenzionalnih i dvodimenzionalnih potprostora od V). Preslikavanja koja obuhvaćaju obje vrste kolineacija su takozvani polulinearni operatori.

Definicija 1.35. *Za funkciju $A : V \to V$ kažemo da je* polulinearni operator *ako je aditivna: $A(x + y) = A(x) + A(y)$ i ako postoji automorfizam polja $\sigma \in \mathrm{Aut}\, F$ takav da vrijedi $A(\alpha x) = \sigma(\alpha)A(x)$.*

Skup svih regularnih (bijektivnih) polulinearnih operatora označavamo $\Gamma L(V)$, odnosno $\Gamma L(n+1, F)$ za $V = F^{n+1}$. Ona je semidirektan produkt od $\mathrm{Aut}(F)$ i $GL(V)$. Svaki regularni polulinearni operator inducira kolineaciju od $PG(n, F)$, ali može se dogoditi da dva različita operatora $A, B \in \Gamma L(V)$ induciraju istu kolineaciju. Tada su ta dva operatora proporcionalna, tj. postoji $\alpha \in F \setminus \{0\}$ takav da je $B = \alpha A$. Stoga je skup svih kolineacija induciranih polulinearnim operatorima izomorfan kvocijentnoj grupi $\Gamma L(n+1, F)/S =: P\Gamma L(n + 1, F)$, a skup svih kolineacija induciranih linearnim operatorima kvocijentnoj grupi $GL(n + 1, F)/S =: PGL(n + 1, F)$. Pritom je S skup svih skalarnih operatora

$$S = \{A : V \to V \mid A(x) = \alpha x \text{ za neki } \alpha \in F \setminus \{0\}\},$$

koji je normalna podgupa od $\Gamma L(n+1, F)$ i od $GL(n+1, F)$. Temeljni teorem projektivne geometrije kaže da je za $n > 1$ *svaka* kolineacija od $PG(n, F)$ inducirana polulinearnim operatorom.

Teorem 1.36 (Temeljni teorem projektivne geometrije). *Puna grupa automorfizama projektivnog prostora $PG(n, F)$ dimenzije $n \geq 2$ izomorfna je s $P\Gamma L(n+1, F)$.*

Teorem ne vrijedi za $PG(1, F)$ jer se on sastoji od samo jednog pravca na kojemu leže sve točke. Bilo koja permutacija točaka je kolineacija jednodimenzionalnog projektivnog prostora.

Zadaci

Zadatak 1.7. *Neka je $\mathcal{P}$ apstraktni projektivni prostor u kojem vrijedi Paposov teorem. Dokažite da tada u $\mathcal{P}$ vrijedi Desarguesov teorem.*

Zadatak 1.8. *Dokažite da su polulinearni operatori $A, B \in \Gamma L(n+1, F)$ koji induciraju istu kolineaciju od $PG(n, F)$ (tj. na isti način djeluju na jednodimenzionalne potprostore od V) proporcionalni: $B = \alpha A$ za neki $\alpha \in F \setminus \{0\}$.*

Zadatak 1.9. *Dokažite da grupa* projektivnih kolineacija $PGL(n+1, F)$ *djeluje 2-tranzitivno na točke projektivnog prostora $PG(n, F)$. Dokažite da je za $n = 1$ djelovanje 3-tranzitivno, a za $n > 1$ nije 3-tranzitivno.*

1.4 Afini prostori

Afine prostore prvo definiramo analitički, slično kao projektivne.

Definicija 1.37. Afini prostor $AG(n, F)$ *je vektorski prostor V dimenzije n nad poljem F (ne nužno komutativnim).* Točke *su vektori od V,* pravci *su jednodimenzionalne linearne mnogostrukosti od V, a* ravnine *dvodimenzionalne linearne mnogostrukosti od V. Općenito, k-dimenzionalni* afini potprostor *(k-ravnina) od $AG(n, F)$ je linearna mnogostrukost od V dimenzije k (translat k-dimenzionalnog vektorskog potprostora).*

Lako je provjeriti da u $AG(n, F)$ vrijedi aksiom o pravcima i ovi aksiomi nedegeneriranosti: na svakom pravcu leže bar dvije točke; ako je $n \geq 2$ postoje bar dva pravca. Za pravce u $AG(n, F)$ kažemo da su *paralelni* ako su translati istog jednodimenzionalnog potprostora od V.

Propozicija 1.38 (Aksiom o paralelama). *Za svaki pravac p i točku T u $AG(n, F)$, postoji jedinstveni pravac r kroz T paralelan s p.*

Dokaz. Pravac p je translat nekog jednodimenzionalnog potprostora $\langle a \rangle$ od V. Jedinstvena paralela s p kroz T je očito $T + \langle a \rangle$ (sjetimo se da su točke vektori iz V). □

Definicija 1.39. Afina ravnina *je incidencijska struktura koja zadovoljava:*

(A_1) *kroz svake dvije točke prolazi jedinstveni pravac,*

(A_2) *za svaki pravac p i točku T koja ne leži na p, postoji jedinstveni pravac kroz T koji ne siječe p,*

(A_3) *na svakom pravcu leže bar dvije točke; postoje bar dva pravca.*

Primjer afine ravnine je $AG(2, F)$, a daljnje primjere dobivamo od projektivnih ravnina brisanjem jednog pravca i točaka na njemu. Ako krenemo od nedesarguesovske projektivne ravnine dobit ćemo afinu ravninu koja nije izomorfna s $AG(2, F)$. U konačnom slučaju postoji prirodan broj q takav da na svakom pravcu afine ravnine leži q točaka, kroz svaku točku prolazi $q + 1$ pravaca, ukupan broj točaka je q^2, a ukupan broj pravaca $q^2 + q$.

Postoji više aksiomatika za apstraktne afine prostore. Polazimo od linearnog prostora $\mathcal{A}$, tj. incidencijske strukture koja zadovoljava aksiome (A_1) i (A_3). *Paralelnost* je relacija ekvivalencije $\|$ na skupu pravaca koja zadovoljava aksiom o paralelama:

(A_2') za svaki pravac p i točku T, postoji jedinstveni pravac r kroz T takav da je $r \parallel p$.

Zbog refleksivnosti relacije $\|$ ovdje ne isključujemo mogućnost da T leži na p (tada je $r = p$). Paralelni pravci se podudaraju ili su disjunktni: kad bi se dva paralelna pravca p, r sijekla u točki T, imali bismo dvije paralele s p kroz T. Za razliku od afinih ravnina, općenito mogu postojati disjunktni pravci koji nisu paralelni (kažemo da su *mimoilazni*).

Potprostore linearnog prostora definiramo isto kao za projektivne prostore (vidi definiciju 1.11). Za linearni prostor $\mathcal{A}$ s relacijom paralelnosti $\|$ definiramo *afine potprostore* kao potprostore zatvorene obzirom na $\|$. To znači da za svaki pravac p i točku T iz potprostora jedinstvena paralela s p kroz T također pripada potprostoru. Presjek afinih potprostora je afini potprostor, pa za proizvoljan skup točaka $\mathcal{S}$ možemo definirati afini potprostor razapet sa $\mathcal{S}$ kao presjek svih afinih potprostora koji sadrže $\mathcal{S}$. Koristimo oznaku $\langle \mathcal{S} \rangle_{\|}$.

Definicija 1.40. Afini prostor *je incidencijska struktura s relacijom ekvivalencije $\|$ na pravcima koja zadovoljava aksiome (A_1), (A_2'), (A_3) i aksiom*

(A_4) *svaki afini potprostor od $\mathcal{A}$ razapet s tri nekolinearne točke je afina ravnina.*

Alternativni sustavi aksioma za afine prostore nalaze se u knjizi [2] na str. 51–53 i u cjelini 3.5 knjige [8]. Prostori $AG(n,F)$ zadovoljavaju aksiome afinog prostora. Primjere afinih prostora dobivamo i tako da iz apstraktnog projektivnog prostora izbacimo sve točke jedne hiperravnine. Na taj način možemo dobiti svaki afini prostor.

Teorem 1.41. *Neka je $\mathcal{A}$ afini prostor. Onda postoji projektivni prostor $\mathcal{P}$ i hiperravnina $\mathcal{H}$ u $\mathcal{P}$ takva da je $\mathcal{A} = \mathcal{P} \setminus \mathcal{H}$.*

Dokaz. Vidi [31], teorem 5.5. □

Ovaj teorem nam omogućuje da definicije baze i dimenzije prenesemo s projektivnih na afine prostore, kao i reprezentacijske teoreme.

Teorem 1.42. *Neka je $\mathcal{A}$ afini prostor dimenzije n u kojem vrijedi Desarguesov teorem. Onda postoji polje F takvo da je $\mathcal{A}$ izomorfan s $AG(n,F)$.*

Teorem 1.43. *Svaki afini prostor dimenzije $n \geq 3$ izomorfan je s $AG(n,F)$ za neko polje F.*

Kolineacije afinog prostora čuvaju paralelizam. Ako $AG(n,F)$ reprezentiramo kao $PG(n,F) \setminus \mathcal{H}$ za neku hiperravninu $\mathcal{H}$, pokazuje se da kolineacije od $AG(n,F)$ odgovaraju kolineacijama od $PG(n,F)$ koje fiksiraju $\mathcal{H}$. Elacije s osi $\mathcal{H}$ zovemo *translacijama*; skup svih translacija je grupa automorfizama od $AG(n,F)$ koja je izomorfna s F^n.

Teorem 1.44. *Puna grupa automorfizama afinog prostora $AG(n,F)$ dimenzije $n \geq 2$ izomorfna je sa semidirektnim produktom grupe translacija i grupe $\Gamma L(n,F)$; označavamo je $A\Gamma L(n,F)$.*

Zadaci

Zadatak 1.10. *Dokažite da se svaka afina ravnina može nadopuniti do projektivne ravnine dodavanjem "pravca u beskonačnosti".*

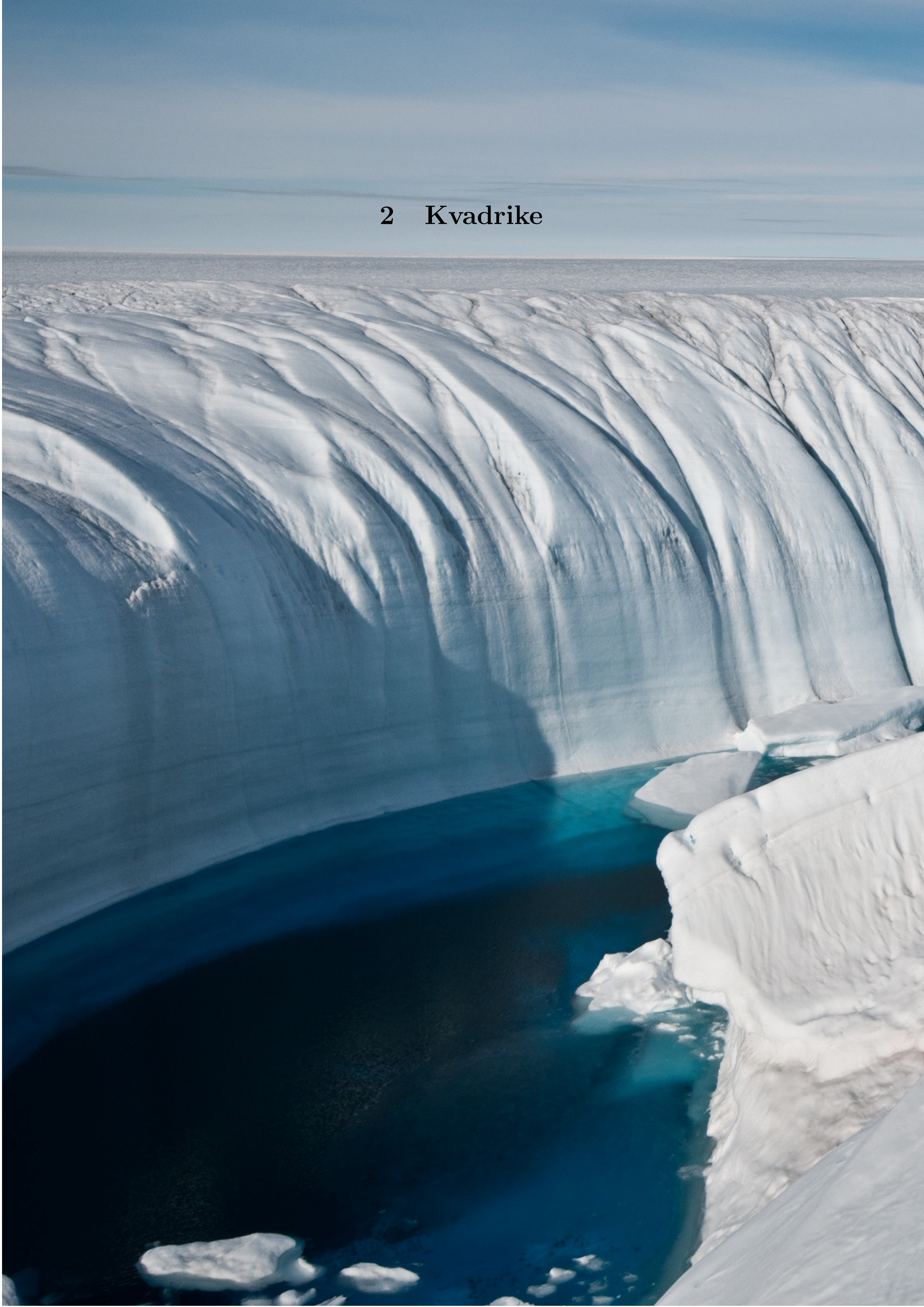
Zadatak 1.11. *Neka je $\mathcal{P}$ incidencijska struktura koja zadovoljava aksiome (P_1) i (P_3). Dokažite da je u $\mathcal{P}$ Veblen-Youngov aksiom (P_2') ekvivalentan s aksiomom*

(P_2'') *svaki potprostor od $\mathcal{P}$ razapet s tri nekolinearne točke je projektivna ravnina.*

Zamjenom aksioma (P_2') s (P_2'') dobivamo definiciju projektivnih prostora analognu definiciji 1.40.

Zadatak 1.12. *Neka je $\mathcal{A}$ apstraktni afini prostor. Ako su pravci incidentni s bar tri točke, dokažite da je svaki potprostor od $\mathcal{A}$ afini potprostor, tj. zatvoren je obzirom na relaciju paralelnosti. Ako su pravci incidentni samo s dvije točke, dokažite da postoje potprostori od $\mathcal{A}$ koji nisu afini.*

2 Kvadrike



2.1 Bilinearne i kvadratne forme

U ovom poglavlju V je konačnodimenzionalni vektorski prostor nad komutativnim poljem F.

Definicija 2.1. Bilinearna forma *na V je funkcija $B : V \times V \to F$ koja je linearna u obje koordinate, tj. takva da za sve $x, y, z \in V$ i $\alpha, \beta \in F$ vrijedi*

(1) $B(\alpha x + \beta y, z) = \alpha B(x, z) + \beta B(y, z)$,

(2) $B(x, \alpha y + \beta z) = \alpha B(x, y) + \beta B(x, z)$.

Za $F = \mathbb{R}$ ili $\mathbb{C}$ primjeri bilinearnih formi su skalarni produkti na V, ali općenito B ne mora zadovoljavati zahtjeve nenegativnosti i regularnosti. Nad općim poljem F nenegativnost nema smisla, a regularnost definiramo ovako. Bilinearna forma B definira dva linearna operatora s V u dualni prostor V^* (prostor svih linearnih funkcionala $f : V \to F$). Za $a \in V$ definiramo $L_B(a) : V \to F$ sa $L_B(a)(x) = B(x, a)$, $\forall x \in V$. Zbog linearnosti od B u prvoj koordinati funkcional $L_B(a)$ je linearan, tj. $L_B(a) \in V^*$. Zbog linearnosti u drugoj koordinati $L_B : V \to V^*$ je linearni operator. Analogno definiramo linearni operator $R_B : V \to V^*$, $R_B(a)(x) = B(a, x)$. Kažemo da je bilinearna forma B *regularna* ili *nedegenerirana* ako je linearni operator $L_B : V \to V^*$ regularan. Vidjet ćemo da je to ekvivalentno s regularnosti linearnog operatora $R_B : V \to V^*$.

Propozicija 2.2. *Bilinearna forma B je regularna ako i samo ako $L_B(a)$ nije nulfunkcional, za sve $a \in V$, $a \neq 0$.*

Dokaz. Domena i kodomena od L_B su iste dimenzije, pa je regularnost od L_B ekvivalentna s trivijalnosti jezgre. □

Prema tome, bilinearna forma je regularna ako za svaki $a \in V$, $a \neq 0$ postoji $x \in V$ takav da je $B(x, a) \neq 0$. Neka je $e_1, \ldots, e_n$ baza od V. Bilinearna forma određuje $n \times n$ matricu $B = [b_{ij}]$ čiji su elementi $b_{ij} = B(e_i, e_j)$. Ta matrica potpuno određuje bilinearnu formu: za $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ i $y = \sum_{j=1}^n y_j e_j$ vrijedi

$$B(x, y) = B(\sum_{i=1}^n x_i e_i, \sum_{j=1}^n y_j e_j) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i y_j B(e_i, e_j) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n b_{ij} x_i y_j.$$

Ako koordinatne vektora x i y u bazi $e_1, \ldots, e_n$ zapišemo u stupčane matrice X i Y, vrijedi formula

$$B(x, y) = X^\tau \cdot B \cdot Y.$$

Propozicija 2.3. *Ekvivalentno je:*

(1) *matrica bilinearne forme B je regularna,*

(2) *linearni operator $L_B : V \to V^*$ je regularan,*

(3) *linearni operator $R_B : V \to V^*$ je regularan.*

Dokaz. Neka je $f_1, \dots, f_n$ dualna baza od $e_1, \dots, e_n$, tj. $f_i(e_j) = \delta_{ij}$ (Kroneckerov simbol je $\delta_{ij} = 1$ za $i = j$, a $\delta_{ij} = 0$ za $i \neq j$). Lako se provjeri da je $B = [b_{ij}]$ matrica linearnog operatora L_B u paru baza $(e_1, \dots, e_n)$, $(f_1, \dots, f_n)$, a transponirana matrica B^τ odgovara operatoru R_B. □

Sad je jasno da možemo definirati *rang* bilinearne forme B kao rang linearnog operatora L_B ili R_B, a to se podudara s rangom matrice pridružene bilinearnoj formi. Bilinearna forma je regularna ako i samo ako je maksimalnog ranga n. Ovako se mijenja matrica bilinearne forme s promjenom baze:

Propozicija 2.4. *Neka bilinearna forma u bazi $e_1, \dots, e_n$ ima matricu $B = [b_{ij}]$, a u bazi $e'_1, \dots, e'_n$ matricu $B' = [b'_{ij}]$. Onda je $B' = T^\tau \cdot B \cdot T$, pri čemu je T matrica prijelaza iz prve baze u drugu.*

Dokaz. Matrica prijelaza ima elemente $T = [t_{ij}]$ ako je $e'_j = \sum_{i=1}^n t_{ij} e_i$. Stoga je $b'_{ij} = B(e'_i, e'_j) = B(\sum_{k=1}^n t_{ki} e_k, \sum_{l=1}^n t_{lj} e_l) = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n t_{ki} b_{kl} t_{lj}$. Vidimo da vrijedi $B' = T^\tau \cdot B \cdot T$. □

Za matrice B, B' iz prethodne propozicije kažemo da su *kongruentne*. Za razliku od linearnih operatora, determinanta nije invarijanta matričnog zapisa bilinearne forme. Determinantu $\det B'$ dobivamo od $\det B$ množenjem s $(\det T)^2$. Determinanta bilinearne forme B određena je do na množenje nenul kvadratom u polju F.

Definicija 2.5. *Kažemo da je bilinearna forma B* simetrična *ili* ortogonalna *ako za sve $x, y \in V$ vrijedi $B(x, y) = B(y, x)$, a* antisimetrična *ili* alternirajuća *ili* simplektička *ako vrijedi $B(x, y) = -B(y, x)$.*

Propozicija 2.6.

(1) *B je simetrična ako i samo ako ima simetričnu matricu u nekoj (ili u svakoj) bazi od V.*

(2) *B je antisimetrična ako i samo ako ima antisimetričnu matricu u nekoj (ili u svakoj) bazi od V.*

Dokaz. Očito je u svakoj bazi matrica simetrične bilinearne forme simetrična, a matrica antisimetrične bilinearne forme antisimetrična. Pretpostavimo da u nekoj bazi B ima (anti)simetričnu matricu. Onda iz formule $B(x,y) = X^\tau \cdot B \cdot Y$ slijedi da je B (anti)simetrična bilinearna forma. Naime, s desne strane je 1×1 matrica pa je $B(x,y) = (X^\tau \cdot B \cdot Y)^\tau = Y^\tau \cdot B^\tau \cdot X$. □

Kvadrike su povezane sa simetričnim bilinearnim formama. Nad poljem karakteristike 2 simetrične i antisimetrične forme se podudaraju. Nad poljem karakteristike različite od 2 antisimetrične forme možemo karakterizirati na sljedeći način:

Propozicija 2.7. *Neka je* $\operatorname{char} F \neq 2$. *Onda je bilinearna forma B antisimetrična ako i samo ako za svaki $x \in V$ vrijedi $B(x,x) = 0$.*

Dokaz. Ako je B antisimetrična, očito je $B(x,x) = -B(x,x)$, tj. $2B(x,x) = 0$, a za $\operatorname{char} F \neq 2$ možemo podijeliti s 2. Obrnuto, iz $B(x+y, x+y) = 0$ dobivamo $B(x,x) + B(x,y) + B(y,x) + B(y,y) = 0$, odnosno $B(x,y) = -B(y,x)$. □

Definicija 2.8. *Vektor $x \in V$ je* ortogonalan *na vektor $y \in V$ ako vrijedi $B(x,y) = 0$. Potprostor $U \leq V$ je* ortogonalan *na potprostor $W \leq V$ ako je svaki vektor iz U ortogonalan na svaki vektor iz W.*

Za simetrične i antisimetrične bilinearne forme ortogonalnost je simetrična relacija. Od sada pretpostavljamo da B ima jedno od ta dva svojstva; tada vrijedi $B(x,y) = 0 \iff B(y,x) = 0$ (bilinearne forme s tim svojstvom nazivaju se *refleksivnim*).

Definicija 2.9. *Za $S \subseteq V$ definiramo $S^\perp = \{x \in V \mid B(x,y) = 0, \forall y \in S\}$.*

Propozicija 2.10. *Za svaki podskup $S \subseteq V$ skup $S^\perp$ je potprostor od V.*

Dokaz. Za proizvoljne $x, y \in S^\perp$ i $\alpha, \beta \in F$ vrijedi $B(\alpha x + \beta y, z) = \alpha B(x,z) + \beta B(y,z) = \alpha \cdot 0 + \beta \cdot 0 = 0$, $\forall z \in S$. Dakle, $\alpha x + \beta y \in S^\perp$. □

Propozicija 2.11. *Bilinearna forma B je nedegenerirana ako i samo ako je $V^\perp = \{0\}$.*

Dokaz. ($\Rightarrow$) Neka je B nedegenerirana. Kad bi postojao $a \in V^\perp$, $a \neq 0$, onda bi $L_B(a)$ bio nulfunkcional. Dakle, $V^\perp = \{0\}$.
($\Leftarrow$) Neka je $V^\perp = \{0\}$. Za proizvoljni $a \in V$, $a \neq 0$ vrijedi $a \notin V^\perp$, pa postoji $x \in V$ takav da je $B(x,a) \neq 0$. Prema tome, $L_B(a)$ nije nulfunkcional. □

Teorem 2.12. *Neka je B regularna bilinearna forma. Onda za svaki potprostor $U \leq V$ vrijedi*

(1) $\dim U + \dim U^\perp = n = \dim V$,

(2) $(U^\perp)^\perp = U$.

Dokaz. (1) Neka je $a_1, \ldots, a_k$ baza za U. Lako se provjeri da je $x \in U^\perp$ ako i samo ako je $B(x, a_1) = \ldots = B(x, a_k) = 0$. Ako je $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ prikaz vektora x u bazi $e_1, \ldots, e_n$, uvjet je ekvivalentan sa sljedećim sustavom od k homogenih linearnih jednadžbi:

$$\sum_{i=1}^n B(e_i, a_j) x_i = 0, \ \ j = 1, \ldots, k.$$

Ako dokažemo da je matrica tog sustava punog ranga, slijedit će da je skup rješenja potprostor dimenzije $n-k$. Dovoljno je dokazati da su reci matrice sustava $[B(e_1, a_j) \cdots B(e_n, a_j)]$, $j = 1, \ldots, k$ linearno nezavisni. Pretpostavimo da je

$$\sum_{j=1}^k \alpha_j \left[B(e_1, a_j) \cdots B(e_n, a_j)\right] = [0 \cdots 0] \,.$$

Iz toga slijedi

$$B(e_i, \sum_{j=1}^k \alpha_j a_j) = 0, \ \ i = 1, \ldots, n,$$

tj. $\sum_{j=1}^k \alpha_j a_j \in V^\perp$. Zbog regularnosti od B slijedi $\sum_{j=1}^k \alpha_j a_j = 0$, a zbog linearne nezavisnosti od $a_1, \ldots, a_k$ slijedi $\alpha_1 = \ldots = \alpha_k = 0$.
(2) Iz definicije direktno slijedi $U \subseteq (U^\perp)^\perp$. Po prethodnoj tvrdnji riječ je o potprostorima iste dimenzije, pa vrijedi jednakost. □

Dimenzije od U i $U^\perp$ su "komplementarne", ali potprostor $U^\perp$ nije uvijek ortogonalni komplement jer može imati netrivijalni presjek s U. Naprimjer, za $V = (\mathbb{F}_2)^2$ i $B(x,y) = x_1 y_1 + x_2 y_2$ vrijedi $U = \langle (1,1) \rangle = U^\perp$ jer je $(1,1) \perp (1,1)$. Ako se potprostori $U_1, U_2 \leq V$ sijeku trivijalno ($U_1 \cap U_2 = \{0\}$) i ako su ortogonalni, onda direktnu sumu $U_1 \oplus U_2$ zovemo *ortogonalna suma.*

Propozicija 2.13. *Ako za potprostore vrijedi $U_1 \subseteq U_2$, onda je $U_2^\perp \subseteq U_1^\perp$.*

Dokaz. Ako je $x \in U_2^\perp$, onda za sve $y \in U_2$ vrijedi $B(x,y) = 0$. Posebno, to vrijedi za sve $y \in U_1 \subseteq U_2$ pa je $x \in U_1^\perp$. □

Za regularnu bilinearnu formu B preslikavanje $U \mapsto U^\perp$ je involucija na skupu svih potprostora od V, tj. bijekcija koja je sama sebi inverz (zbog $(U^\perp)^\perp = U$). Po prethodnoj propoziciji to preslikavanje "okreće" inkluziju i zovemo ga *polaritet* definiran s B.

Definicija 2.14. *Za vektor $x \in V$ kažemo da je* izotropan *ako je $B(x,x) = 0$. Za potprostor $U \leq V$ kažemo da je* izotropan *ako je $U \cap U^{\perp} \neq \{0\}$, a* totalno izotropan *ako je $U \subseteq U^{\perp}$.*

Propozicija 2.15. *Ako je potprostor izotropan, onda sadrži bar jedan izotropni vektor različit od nulvektora.*

Dokaz. Po definiciji za izotropan potprostor $U \leq V$ postoji $x \in U \cap U^{\perp}$, $x \neq 0$. Očito je $B(x,x) = 0$, tj. x je izotropni vektor. □

Obrat ne vrijedi: npr. na prostoru $V = (\mathbb{F}_p)^p$ za p prost bilinearna forma $B(x,y) = \sum_{i=1}^{p} x_i y_i$ je nedegenerirana, tj. vrijedi $V^{\perp} = \{0\}$. Prema tome V nije izotropan, ali sadrži izotropni vektor $(1,\ldots,1)$.

Propozicija 2.16. *Ako je potprostor totalno izotropan, onda su svi vektori koje sadrži izotropni.*

Dokaz. Po definiciji vrijedi $U \subseteq U^{\perp}$, tj. svaki vektor $x \in U$ je ortogonalan na sve vektore iz U. Posebno, $B(x,x) = 0$. □

U propoziciji 2.7 vidjeli smo da je za $\operatorname{char} F \neq 2$ antisimetričnost od B ekvivalentna svojstvu da su svi vektori iz V izotropni. Za simetrične bilinearne forme i za $\operatorname{char} F \neq 2$ vrijedi obrat propozicije 2.16:

Propozicija 2.17. *Neka je B simetrična bilinearna forma i* $\operatorname{char} F \neq 2$. *Ako su svi vektori iz potprostora $U \leq V$ izotropni, onda je U totalno izotropan potprostor.*

Dokaz. Neka su vektori iz U izotropni. Tvrdimo da je $U \subseteq U^{\perp}$, tj. da za sve $x, y \in U$ vrijedi $B(x,y) = 0$. Vektor $x + y \in U$ je izotropan, pa vrijedi $0 = B(x+y, x+y) = B(x,x) + B(x,y) + B(y,x) + B(y,y) = 2B(x,y)$ (koristimo simetričnost od B). U poljima karakteristike različite od 2 iz toga slijedi $B(x,y) = 0$. □

Tvrdnja ne vrijedi za $\operatorname{char} F = 2$. Naprimjer, u prostoru $V = (\mathbb{F}_2)^2$ sa simetričnom bilinearnom formom $B(x,y) = x_1 y_2 + x_2 y_1$ sva četiri vektora su izotropna: $B((0,0),(0,0)) = 0$, $B((1,0),(1,0)) = 0$, $B((0,1),(0,1)) = 0$, $B((1,1),\,(1,1)) = 0$, ali V nije totalno izotropan. Forma B je regularna i vrijedi $V^{\perp} = \{0\}$ (posebno, $V \not\subseteq V^{\perp}$). Za $\operatorname{char} F \neq 2$ simetrične bilinearne forme mogu se dijagonalizirati na sljedeći način:

Teorem 2.18. *Neka je B simetrična bilinearna forma i* $\operatorname{char} F \neq 2$. *Onda postoje neizotropni vektori $x_1, \ldots, x_r$ i izotropni vektori $y_1, \ldots, y_s$ takvi da je*

$$V = \langle x_1 \rangle \oplus \cdots \oplus \langle x_r \rangle \oplus \langle y_1 \rangle \oplus \cdots \oplus \langle y_s \rangle,$$

pri čemu je suma ortogonalna.

Dokaz. Kažemo da je potprostor $U \leq V$ *nerastavljiv* ako ga se ne može prikazati kao ortogonalnu sumu dvaju netrivijalnih potprostora. Očito je V ortogonalna suma nerastavljivih potprostora. Dovoljno je pokazati da su nerastavljivi potprostori dimenzije 1. Pretpostavimo da je U nerastavljiv. Ako je totalno izotropan, onda je svaki prikaz od U kao direktne sume ujedno ortogonalna suma, pa je U nužno dimenzije 1. Ako U nije totalno izotropan, onda po propoziciji 2.17 postoji neizotropan vektor $x \in U$. Potprostor U možemo prikazati kao ortogonalnu sumu $U = \langle x \rangle \oplus (\langle x \rangle^\perp \cap U)$, pa zbog nerastavljivosti opet mora biti dimenzije 1. $\square$

U bazi $x_1, \ldots, x_r, y_1, \ldots, y_s$ iz prethodnog teorema B ima dijagonalnu matricu. Matrica na prvih r mjesta glavne dijagonale ima nenul elemente, a na ostalim mjestima ima nule. Vidimo da je r rang bilinearne forme B i zato je jednoznačno određen (ali baza $x_1, \ldots, x_r, y_1, \ldots, y_s$ naravno nije jedinstvena). Bazu možemo izabrati tako da nenul elementi na glavnoj dijagonali budu "normalizirani" do na množenje nenul kvadratom u polju F. Naprimjer, u polju $\mathbb{C}$ svi elementi su kvadrati pa možemo postići da na dijagonali bude r jedinica. Nad poljem $\mathbb{R}$ možemo postići da na dijagonali budu nule, jedinice i minus jedinice, pri čemu je broj negativnih i pozitivnih elemenata također invarijanta od B (to je Sylvesterov zakon inercije, vidi [18, teorem 14.4.2] ili [17, teorem 10.2.5]).

Ako je $\operatorname{char} F = 2$ ne može se svaka simetrična bilinearna forma dijagonalizirati. Naprimjer, za formu $B(x,y) = x_1y_2 + x_2y_1$ na prostoru $V = (\mathbb{F}_2)^2$ ne postoji ortogonalna baza jer je $B((1,0),(0,1)) = B((1,0),(1,1)) = B((0,1),(1,1)) = 1$.

Kanonski oblik matrice antisimetrične bilinearne forme je blok-dijagonalni s 2×2 podmatricama oblika $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ na dijagonali, a može se postići nad poljem bilo koje karakteristike (vidi [25, korolar 9.80]). Iz toga slijedi da je rang antisimetrične bilinearne forme uvijek paran.

Definicija 2.19. *Za funkciju $Q : V \to F$ kažemo da je* kvadratna forma *na V ako vrijedi:*

(1) $Q(\alpha x) = \alpha^2 Q(x)$, *za svaki $\alpha \in F$ i $x \in V$,*

(2) *preslikavanje $B_Q(x,y) = Q(x+y) - Q(x) - Q(y)$ je bilinearna forma.*

Preslikavanje B_Q iz svojstva (2) očito je simetrična bilinearna forma. Nad poljima karakteristike različite od 2 kvadratna forma je jednoznačno određena s B_Q.

Propozicija 2.20. *Za* $\operatorname{char} F \neq 2$ *vrijedi* $Q(x) = \frac{1}{2} B_Q(x,x)$.

Dokaz. $B_Q(x, x) = Q(2x) - Q(x) - Q(x) = 4Q(x) - 2Q(x) = 2Q(x)$. $\square$

Za $\operatorname{char} F = 2$ različitim kvadratnim formama može biti pridružena ista bilinearna forma. Naprimjer, za $V = (\mathbb{F}_2)^2$ i za kvadratne forme $Q(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$, $R(x_1, x_2) = 0$ vrijedi $B_Q = B_R = 0$. Općenito, primjere bilinearnih formi dobivamo kao homogene kvadratne polinome. Neka je $e_1, \ldots, e_n$ baza od V i neka $x \in V$ ima prikaz $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$. Izaberemo bilo koju $n \times n$ matricu $Q = [q_{ij}]$ i definiramo $Q(x) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n q_{ij} x_i x_j$. Lako se provjeri da je Q kvadratna forma, pri čemu je $B_Q(x, y) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n q_{ij}(x_i y_j + x_j y_i)$. Ako koordinate od x zapišemo u stupčanu matricu X, vrijedi formula $Q(x) = X^\tau \cdot Q \cdot X$. Na taj način možemo dobiti svaku kvadratnu formu:

Propozicija 2.21. *Neka je Q kvadratna forma na vektorskom prostoru V s bazom $e_1, \ldots, e_n$. Onda postoji matrica $Q = [q_{ij}]$ takva da za svaki vektor $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ vrijedi $Q(x) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n q_{ij} x_i x_j$.*

Dokaz. Definiramo $q_{ii} = Q(e_i)$, $q_{ij} = B_Q(e_i, e_j)$ za $i < j$ i $q_{ij} = 0$ za $i > j$. Indukcijom po k pokazuje se da je $Q(\sum_{i=1}^k x_i e_i) = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k q_{ij} x_i x_j$, za $k = 1, \ldots, n$ (vidi [31, teorem 5.3.2]). $\square$

Matrica $Q = [q_{ij}]$ iz prethodne propozicije nije jedinstvena. U dokazu smo definirali gornjetrokutastu matricu, a mogli smo je definirati i kao donjetrokutastu. Za polje karakteristike $\operatorname{char} F \neq 2$ može se postići da $Q = [q_{ij}]$ bude simetrična matrica, stavljajući $q_{ij} = q_{ji} = \frac{1}{2} B_Q(e_i, e_j)$ za $i \neq j$. Tada je $Q = \frac{1}{2} B$, pri čemu je B matrica simetrične bilinearne forme B_Q u istoj bazi.

Definicija 2.22. *Neka je Q kvadratna forma na V. Za vektor $x \in V$ kažemo da je* singularan *ako je $Q(x) = 0$. Za potprostor $U \subseteq V$ kažemo da je* singularan *ako sadrži singularni vektor $x \neq 0$, a* totalno singularan *ako su svi vektori iz U singularni.*

Za $\operatorname{char} F \neq 2$ vektor x je singularan obzirom na Q ako i samo ako je izotropan obzirom na B_Q, a potprostor U je (totalno) singularan ako i samo ako je (totalno) izotropan. Za $\operatorname{char} F = 2$ tvrdnja ne vrijedi: za kvadratnu formu $Q(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$ na $V = (\mathbb{F}_2)^2$ vektori $(1, 0)$ i $(0, 1)$ nisu singularni, a pridružena bilinearna forma je $B_Q = 0$ pa je cijeli V totalno izotropan.

Neka je V vektorski prostor s kvadratnom formom Q. *Izometrija* od V je regularni linearni operator $A : V \to V$ sa svojstvom $Q(x) = Q(Ax)$, za svaki $x \in V$. Skup svih izometrija obzirom na kompoziciju čini grupu koju zovemo *grupa izometrija* ili *ortogonalna grupa* od V. Ako imamo potprostor $U \leq V$, injektivni linearni operator $A : U \to V$ sa svojstvom $Q(x) = Q(Ax)$ za svaki $x \in U$ zovemo *metričkom injekcijom.* Postavlja se pitanje može li se A proširiti do izometrije od V?

Teorem 2.23 (Wittov teorem o proširenju). *Neka je Q kvadratna forma na V kojoj je pridružena bilinearna forma B_Q regularna i neka je $U \leq V$ potprostor. Svaka metrička injekcija $A : U \to V$ može se proširiti do izometrije od V.*

Dokaz. Vidi [22], teorem B.3 na str. 255. □

Iz Wittovog teorema o proširenju slijedi da ortogonalna grupa od V djeluje tranzitivno na skupu svih singularnih vektora različitih od 0. Ako su $x, y \in V \setminus \{0\}$ singularni, onda je linearni operator $A : \langle x \rangle \to V$ definiran s $A(\alpha x) = \alpha y$ metrička injekcija (jer je $Q(\alpha x) = Q(\alpha y) = 0$). Možemo je proširiti do izometrije koja preslikava x u y. Štoviše, ortogonalna grupa djeluje tranzitivno na skupu svih totalno singularnih potprostora od V iste dimenzije (dokaz je sličan).

Korolar 2.24. *Neka je Q kvadratna forma na V kojoj je pridružena bilinearna forma B_Q regularna. Svaka dva maksimalna totalno singularna potprostora od V imaju istu dimenziju.*

Dokaz. Neka su $U_1, U_2 \leq V$ maksimalni totalno singularni potprostori. To znači: ako je $U_i \subseteq U$ i U totalno singularan potprostor, onda je $U_i = U$. Neka je $a_1, \ldots, a_k$ baza od U_1 i $b_1, \ldots, b_l$ baza od U_2. Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je $k \leq l$ i definirati linearni operator $A : U_1 \to V$ djelovanjem na bazi: $Aa_i = b_i$, $i = 1, \ldots, k$. Očito je $Q(x) = Q(Ax) = 0$ za svaki $x \in U_1$, pa je A metrička injekcija. Proširimo je do izometrije $A : V \to V$ i definiramo $U = A^{-1}(U_2)$. To je totalno singularan potprostor koji je nadskup od U_1, pa zbog maksimalnosti slijedi $U_1 = U$. Time smo dokazali da je $k = l$, tj. $\dim U_1 = \dim U_2$. □

Definiramo *indeks* kvadratne forme Q za koju je B_Q regularna kao dimenziju maksimalnog totalno singularnog potprostora od V.

Zadaci

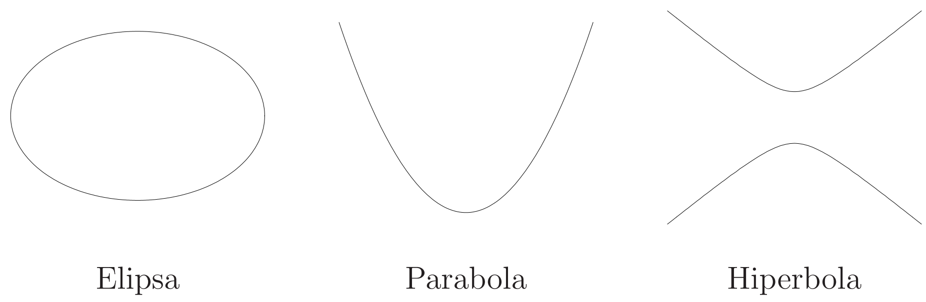
Zadatak 2.1. *Neka su $f, g : V \to F$ linearni funkcionali na V; onda je $B(x, y) = f(x) \cdot g(y)$ bilinearna forma na V. Dokažite da se bilinearna forma može prikazati u tom obliku ako i samo ako je ranga manjeg od 2.*

Zadatak 2.2. *Dokažite da se nad poljem karakteristike različite od 2 svaka bilinearna forma može na jednoznačan način prikazati kao suma jedne simetrične i jedne antisimetrične bilinearne forme.*

Zadatak 2.3. *Dokažite da indeks kvadratne forme Q za koju je B_Q regularna ne može biti veći od $\frac{1}{2} \dim V$.*

2.2 Kvadrike

Kvadrike su $(n-1)$-dimenzionalne plohe drugog reda u n-dimenzionalnom prostoru. Najjednostavniji primjeri su krivulje drugog reda (konike) u ravnini. U realnoj afinoj ravnini postoje tri tipa konika: elipse, parabole i hiperbole.



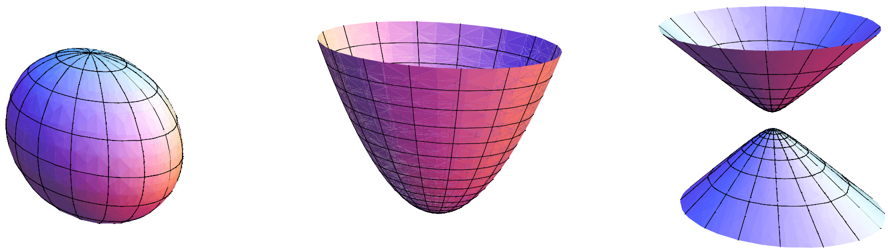
Slika 5: Konike u $AG(2, \mathbb{R})$.

U projektivnoj ravnini $PG(2, F)$ nedegenerirane konike sve su međusobno projektivno ekvivalentne. Afine konike razlikuju se prema položaju u odnosu na "pravac u beskonačnosti" ℓ_∞. Elipsa nema zajedničkih točaka s ℓ_∞, paraboli je ℓ_∞ tangenta, a hiperboli sekanta. U trodimenzionalnom realnom afinom prostoru postoji pet tipova nedegeneriranih kvadrika (vidi sliku 6). Projektivno gledano, dva su tipa nedegeneriranih kvadrika u $PG(3, F)$: eliptička kvadrika i hiperbolička kvadrika. Eliposid, eliptički paraboloid i dvoplohni hiperboloid nastaju od eliptičke kvadrike koju "ravnina u beskonačnosti" π_∞ ne siječe, odnosno na koju je tangentna ili sekantna ravnina. Jednoplohni hiperboloid i hiperbolički paraboloid su hiperboličke kvadrike kojima je π_∞ sekantna, odnosno tangentna ravnina.

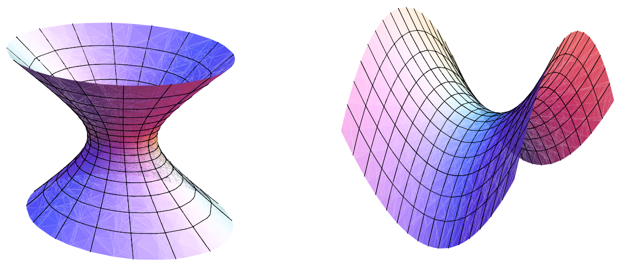
Definicija 2.25. Kvadrika *u $PG(n, F)$ je skup točaka $\mathcal{Q}$ zadan kao skup svih totalno singularnih jednodimenzionalnih potprostora neke kvadratne forme Q na odgovarajućem $(n+1)$-dimenzionalnom vektorskom prostoru V.*

Neka je $e_0, e_1, \ldots, e_n$ baza vektorskog prostora V. Točke iz $PG(n, F)$ prikazujemo njihovim homogenim koordinatama: $T = \langle x_0, x_1, \ldots, x_n \rangle$, ako je $T = \langle x \rangle$, $x = \sum_{i=0}^n x_i e_i$. Vidjeli smo da je koordinatni zapis kvadratne forme homogeni kvadratni polinom $Q(x) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n q_{ij} x_i x_j$. Prema tome, kvadrika $\mathcal{Q}$ je skup nultočaka homogenog kvadratnog polinoma.

Nad poljem karakteristike $\operatorname{char} F \neq 2$ totalno singularni potprostori kvadratne forme Q podudaraju se s totalno izotropnim potprostorima pridružene bilinearne forme B_Q. Stoga kvadriku $\mathcal{Q}$ možemo definirati i kao skup jednodi-



Elipsoid Eliptički paraboloid Dvoplohni hiperboloid



Jednoplohni hiperboloid Hiperbolički paraboloid

Slika 6: Nedegenerirane kvadrike u $AG(3, \mathbb{R})$.

menzionalnih totalno izotropnih potprostora simetrične bilinearne forme (vidi lemu 2.28).

Konačno, ako je forma B_Q regularna, onda definira polaritet $U \mapsto U^\perp$. To je involucija na skupu svih potprostora od $PG(n, F)$ koja "okreće" inkluziju. Posebno, točke od $PG(n, F)$ (jednodimenzionalne potprostore od V) preslikava na hiperravnine, i obrnuto. Za točku $T = \langle x \rangle$ kažemo da je *apsolutna* ako leži na pridruženoj hiperravnini $\langle x \rangle^\perp$, a inače kažemo da je *neapsolutna*. Budući da je x izotropan ako i samo ako je $x \in \langle x \rangle^\perp$, kvadriku $\mathcal{Q}$ možemo definirati i kao skup svih apsolutnih točaka ortogonalnog polariteta od $PG(n, F)$ (to je polaritet induciran simetričnom bilinearnom formom).

Lema 2.26. *Neka su $A = \langle a \rangle$ i $B = \langle b \rangle$ dvije točke na kvadrici $\mathcal{Q}$. Pravac AB je sadržan u $\mathcal{Q}$ ako i samo ako je $B_Q(a, b) = 0$.*

Dokaz. ($\Rightarrow$) Ako je $Q(a) = Q(b) = B_Q(a, b) = 0$, onda za sve $\alpha, \beta \in F$ vrijedi $Q(\alpha a + \beta b) = B_Q(\alpha a, \beta b) + Q(\alpha a) + Q(\beta b) = \alpha\beta B_Q(a, b) + \alpha^2 Q(a) + \beta^2 Q(b) = 0$. Prema tome, svaka točka pravca AB je na $\mathcal{Q}$.
($\Leftarrow$) Neka su sve točke pravca AB na kvadrici $\mathcal{Q}$; posebno, $Q(a) = Q(b) = Q(a + b) = 0$. Tada je $B_Q(a, b) = Q(a + b) - Q(a) - Q(b) = 0$. $\square$

Propozicija 2.27. *Ako pravac ima tri zajedničke točke s $\mathcal{Q}$, onda je cijeli sadržan u $\mathcal{Q}$.*

Dokaz. Neka su $A = \langle a \rangle$, $B = \langle b \rangle$ i $C = \langle c \rangle$ tri zajedničke točke pravca i kvadrike $\mathcal{Q}$, tj. $Q(a) = Q(b) = Q(c) = 0$. Točka C je na pravcu AB, pa postoje $\alpha, \beta \in F$ takvi da je $c = \alpha a + \beta b$. Nadalje, $\alpha, \beta \neq 0$ jer je $C \neq A, B$. Računamo: $0 = Q(c) = Q(\alpha a + \beta b) = B_Q(\alpha a, \beta b) + Q(\alpha a) + Q(\beta b) = \alpha\beta B_Q(a, b) + \alpha^2 Q(a) + \beta^2 Q(b)$. Iz $\alpha, \beta \neq 0$ i $Q(a) = Q(b) = 0$ slijedi $B_Q(a, b) = 0$. Prema lemi 2.26 pravac AB je cijeli sadržan u $\mathcal{Q}$. $\square$

Pravci koji nisu sadržani u $\mathcal{Q}$ sijeku $\mathcal{Q}$ u nula, jednoj ili u dvije točke. Prema tome zovemo ih *vanjskim pravcima*, *tangentama* ili *sekantama*. Pravce sadržane u $\mathcal{Q}$ kratko zovemo *$\mathcal{Q}$-pravcima*. Sjetimo se da smo za $S \subseteq V$ definirali $S^\perp = \{x \in V \mid B_Q(x, y) = 0, \forall y \in S\}$.

Lema 2.28. *Za svaku točku $T = \langle x \rangle$ u $PG(n, F)$ vrijedi: ako je $T \in \mathcal{Q}$, onda je $x \in \langle x \rangle^\perp$. Za $\operatorname{char} F \neq 2$ vrijedi i obrat: ako je $x \in \langle x \rangle^\perp$, onda je $T \in \mathcal{Q}$.*

Dokaz. Ako je $T \in \mathcal{Q}$, onda je $Q(x) = 0$. Slijedi $B_Q(x, x) = Q(2x) - Q(x) - Q(x) = 4Q(x) - 2Q(x) = 0$, tj. $x \perp x$. Za obrat pretpostavimo da je $\operatorname{char} F \neq 0$ i $B_Q(x, x) = 0$. Iz $B_Q(x, x) = Q(2x) - Q(x) - Q(x) = 2Q(x) = 0$ zbog $2 \neq 0$ slijedi $Q(x) = 0$, tj. $T \in \mathcal{Q}$. $\square$

Za $\operatorname{char} F = 2$ obrat ne vrijedi. Naprimjer, uzmimo $V = (\mathbb{F}_2)^3$, tj. $PG(2, 2)$ i kvadratnu formu $Q(x_0, x_1, x_2) = x_0^2 + x_1^2 + x_2^2$. Točka $x = (1, 0, 0)$ ne pripada kvadrici $\mathcal{Q}$, ali vrijedi $B_Q(1, 0, 0) = Q(0, 0, 0) - Q(1, 0, 0) - Q(1, 0, 0) = 0 + 1 + 1 = 0$.

Lema 2.29. *Skup $\langle x \rangle^\perp$ je hiperravnina ili cijeli V, za svaku točku $T = \langle x \rangle$ u $PG(n, F)$.*

Dokaz. Skup $\langle x \rangle^\perp$ podudara se s jezgrom linearnog funkcionala $L_{B_Q}(x) : V \to F$. Ako je $L_{B_Q}(x)$ nulfunkcional jezgra mu je cijeli V, a u suprotnom je hiperravnina (jer mu je slika dimenzije jedan). $\square$

Ako je $T = \langle x \rangle \in \mathcal{Q}$ točka na kvadrici, skup $\langle x \rangle^\perp$ zovemo *tangencijalni prostor* na $\mathcal{Q}$ u točki T i označavamo s $\mathcal{Q}_T$.

Propozicija 2.30. *Tangencijalni prostor $\mathcal{Q}_T$ je unija svih pravaca kroz T koji su tangente na $\mathcal{Q}$ ili su $\mathcal{Q}$-pravci.*

Dokaz. ($\supseteq$) Prvo dokazujemo da pravci kroz T koji su tangente na $\mathcal{Q}$ ili su $\mathcal{Q}$-pravci leže u $\mathcal{Q}_T = \langle x \rangle^\perp$. Pretpostavimo suprotno, da pravac p kroz T nije sadržan u $\langle x \rangle^\perp$. Dokazat ćemo da je tada p sekanta. Ako je $p = \langle x, y \rangle$, onda $y \notin \langle x \rangle^\perp$ (inače bi vrijedilo $p \subseteq \langle x \rangle^\perp$), tj. $B_Q(x,y) \neq 0$. Točku $A \neq T$ na pravcu p možemo zapisati kao $A = \langle \alpha x + y \rangle$. Vrijedi $A \in \mathcal{Q}$ ako i samo ako je $0 = Q(\alpha x + y) = B_Q(\alpha x, y) + Q(\alpha x) + Q(y) = \alpha B_Q(x,y) + \alpha Q(x) + Q(y) = \alpha B_Q(x,y) + Q(y)$. Vidimo da je uvjet $A \in \mathcal{Q}$ ekvivalentan s $\alpha = -\frac{Q(y)}{B_Q(x,y)}$, pa na pravcu p ostim T postoji točno još jedna točka iz $\mathcal{Q}$. Dakle, p je sekanta.
($\subseteq$) Sada dokazujemo da je za svaku točku $A = \langle a \rangle \in \langle x \rangle^\perp$ (tj. takvu da je $B_Q(x,a) = 0$) pravac TA tangenta ili $\mathcal{Q}$-pravac. Ako je $A \in \mathcal{Q}$, onda je po lemi 2.26 pravac TA sadržan u $\mathcal{Q}$. U suprotnom, ako je $Q(a) \neq 0$, tvdimo da sve točke na TA osim T ne pripadaju kvadrici, tj. da je TA tangenta. Točku na TA različitu od T možemo zapisati kao $\langle \alpha x + a \rangle$. Računajući $Q(\alpha x + a) = B_Q(\alpha x, a) + Q(\alpha x) + Q(a) = \alpha B_Q(x,a) + \alpha Q(x) + Q(a) = Q(a) \neq 0$ vidimo da točka ne pripada kvadrici $\mathcal{Q}$. $\square$

Propozicija 2.31. *Neka je kvadratni funkcional u bazi $e_0, \ldots, e_n$ dan formulom $Q(x) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n q_{ij} x_i x_j$ i neka je $P = \langle p_0, \ldots, p_n \rangle \in \mathcal{Q}$ točka na kvadrici. Onda je jednadžba tangencijalnog prostora $\mathcal{Q}_P$ dana jednadžbom*

$$\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n q_{ij}(x_i p_j + p_i x_j) = 0.$$

Dokaz. To znači: točka $T = \langle x_0, \ldots, x_n \rangle$ pripada tangencijalnom prostoru $\mathcal{Q}_P$ ako i samo ako zadovoljava jednadžbu. Označimo $p = (p_0, \ldots, p_n)$ i $x = (x_0, \ldots, x_n)$. Tada je $T \in \mathcal{Q}_P \iff x \in \langle p \rangle^\perp \iff B_Q(x,p) = 0 \iff Q(x+p) - Q(x) - Q(p) = 0 \iff \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n q_{ij}(x_i + p_i)(x_j + p_j) - \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n q_{ij} x_i x_j - \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n q_{ij} p_i p_j = 0 \iff \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n q_{ij}(x_i p_j + p_i x_j) = 0$. $\square$

Jednadžbu tangencijalnog prostora možemo zapisati s pomoću parcijalnih derivacija od Q. Jednadžba iz propozicije ekvivalentna je s:

$$\sum_{i=0}^n x_i \sum_{j=0}^n q_{ij} p_j + \sum_{j=0}^n x_j \sum_{i=0}^n q_{ij} p_i = 0,$$

$$\sum_{i=0}^n x_i \sum_{j=0}^n q_{ij} p_j + \sum_{i=0}^n x_i \sum_{j=0}^n q_{ji} p_j = 0,$$

$$\sum_{i=0}^n x_i \sum_{j=0}^n (q_{ij} + q_{ji}) p_j = 0.$$

Budući da je $\frac{\partial Q}{\partial x_i}(p) = \sum_{j=0}^{n}(q_{ij} + q_{ji})p_j$, to možemo zapisati kao

$$\sum_{i=0}^{n} \frac{\partial Q}{\partial x_i}(p) \cdot x_i = 0.$$

Kažemo da je točka T na kvadrici $\mathcal{Q}$ *singularna* ako je tangencijalni prostor $\mathcal{Q}_T$ cijeli V. Skup svih singularnih točaka zovemo *radikal* kvadrike i označavamo rad $\mathcal{Q}$.

Propozicija 2.32. *Radikal kvadrike je potprostor od $PG(n, F)$.*

Dokaz. Neka su $A = \langle a \rangle$ i $B = \langle b \rangle$ singularne točke kvadrike, tj. $Q(a) = Q(b) = 0$ i $\langle a \rangle^\perp = \langle b \rangle^\perp = V$. Očito je tada $B_Q(a, b) = 0$, pa je po lemi 2.26 pravac AB podskup od $\mathcal{Q}$. Treba još dokazati da su sve točke na tom pravcu singularne. Zaista, za $\alpha, \beta \in F$ i za bilo koji $x \in V$ vrijedi $B_Q(\alpha a + \beta b, x) = \alpha B_Q(a, x) + \beta B_Q(b, x) = \alpha \cdot 0 + \beta \cdot 0 = 0$, pa je $\langle \alpha a + \beta b \rangle^\perp = V$. $\square$

Za kvadriku koja nema singularnih točaka kažemo da je *nedegenerirana.* Radikal je tada prazan skup, što smatramo potprostorom projektivne dimenzije -1. Odgovarajuće svojstvo kvadratne forme Q je ovo: ako je $Q(x) = 0$ i $\langle x \rangle^\perp = V$ (odnosno $B_Q(x, y) = 0$ za sve $y \in V$), onda je $x = 0$. Kvadratne forme s tim svojstvom nazivamo *nedegeneriranim.* Očito vrijedi:

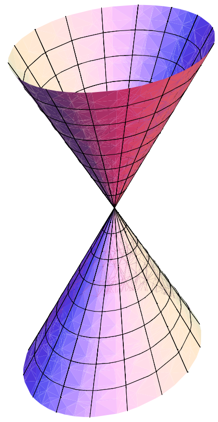
Propozicija 2.33. *Kvadrika $\mathcal{Q}$ je nedegenerirana ako i samo ako je kvadratna forma Q nedegenerirana.*

Ako je bilinearna forma B_Q regularna, onda je kvadratna forma Q nedegenerirana. Obrat ne vrijedi za $\operatorname{char} F = 2$; naprimjer, kvadratna forma $Q(x_0, x_1, x_2) = x_0 x_1 + x_2^2$ na $V = (\mathbb{F}_2)^3$ je nedegenerirana, ali odgovarajuća bilinearna forma $B_Q(x, y) = x_0 y_1 + x_1 y_0$ nije regularna je je $\langle (0, 0, 1) \rangle^\perp = V$.

Tipičan primjer degenerirane kvadrike je konus u trodimenzionalnom prostoru (vidi sliku 7). Vrh konusa je singularna točka, a sve ostale točke konusa nisu singularne. Općenito definiramo *kvadratni konus* u $PG(n, F)$ na sljedeći način. Rastavimo vektorski prostor V kao direktnu sumu netrivijalnih potprostora $V = V_1 \oplus V_2$ i odgovarajuće ravnine u $PG(n, F)$ označimo s Π_1 i Π_2. Neka je $\mathcal{Q}'$ nedegenerirana kvadrika u Π_1. Konus s bazom $\mathcal{Q}'$ i vrhom Π_2 je skup točaka na pravcima koji spajaju točke iz $\mathcal{Q}'$ s točkama iz Π_2.

Propozicija 2.34. *Kvadratni konus je degenerirana kvadrika s radikalom Π_2.*

Dokaz. Izaberemo bazu $e_0, \ldots, e_n$ za V tako da je $e_0, \ldots, e_k$ baza za V_1, a $e_{k+1}, \ldots, e_n$ baza za V_2 (zbog netrivijalnosti rastava je $k < n$). Neka je



Slika 7: Konus u $AG(3,\mathbb{R})$.

$Q'(x_0,\dots,x_k) = \sum_{i=0}^k \sum_{j=0}^k q_{ij}x_ix_j$ kvadratni funkcional na V_1 koji zadaje $\mathcal{Q}'$ u bazi $e_0,\dots,e_k$. Proširimo ga do kvadratnog funkcionala $Q(x_0,\dots,x_k, x_{k+1},\dots,x_n) = \sum_{i=0}^k \sum_{j=0}^k q_{ij}x_ix_j$ na V koji ne ovisi o varijablama $x_{k+1},\dots,x_n$. Tvrdimo da se kvadrika $\mathcal{Q}$ zadana s Q podudara s našim konusom. Proizvoljna točka kvadrike $T = \langle x_0,\dots,x_n\rangle \in \mathcal{Q}$ zadovoljava $Q(x_0,\dots,x_n) = Q'(x_0,\dots,x_k) = 0$ (jer Q ne ovisi o zadnjih $n-k$ varijabli). Stoga točka $A = \langle a\rangle$, $a = \sum_{i=0}^k x_ie_i$ pripada kvadrici $\mathcal{Q}'$, a točka $B = \langle b\rangle$, $b = \sum_{i=k+1}^n x_ie_i$ očito pripada ravnini Π_2. Točka $T = \langle a+b\rangle$ leži na pravcu AB. Obrnuto, bilo koja točka $T = \langle \alpha a + \beta b\rangle$ na pravcu AB za $A = \langle a\rangle \in \mathcal{Q}'$ i $B = \langle b\rangle \in \Pi_2$ zadovoljava $Q(\alpha a + \beta b) = Q'(\alpha a) = \alpha^2 Q'(a) = 0$, pa pripada kvadrici $\mathcal{Q}$.

Još trebamo dokazati da je vrh konusa Π_2 radikal kvadrike $\mathcal{Q}$. Točke $B = \langle b\rangle \in \Pi_2$ su singularne jer vrijedi $B_Q(b,x) = Q(b+x) - Q(b) - Q(x) = Q(x) - Q(x) = 0$ za svaki $x \in V$, tj. $\langle b\rangle^\perp = V$. Obrnuto, singularnu točku od $\mathcal{Q}$ možemo napisati kao $T = \langle a+b\rangle$, za $a \in V_1$, $Q'(a) = 0$ i $b \in V_2$. Zbog nedegeneriranosti od $\mathcal{Q}'$ iz $\langle a+b\rangle^\perp = V$ slijedi $a = 0$, pa je $T \in \Pi_2$. □

Teorem 2.35. *Svaka degenerirana kvadrika $\mathcal{Q}$ je kvadratni konus s bazom $\mathcal{Q}'$ i vrhom* rad $\mathcal{Q}$ *za neku nedegeneriranu kvadriku $\mathcal{Q}'$ u potprostoru od $PG(n,F)$.*

Zbog ovog teorema možemo se ograničiti na proučavanje nedegeneriranih kvadrika.

Zadaci

Zadatak 2.4. *Ako je* char $F \neq 2$ *i ako je kvadratna forma Q nedegenerirana, dokažite da je tada pridružena bilinearna forma B_Q regularna.*

Zadatak 2.5. *Neka je* $Q(x_0,\dots,x_n)=\sum_{i=0}^n\sum_{j=0}^n q_{ij}x_ix_j$ *kvadratna forma zadana kao homogeni kvadratni polinom u* $n+1$ *varijabli. Dokažite da je* Q *degenerirana ako i samo ako se linearnom zamjenom varijabli može svesti na polinom u manje od* $n+1$ *varijabli.*

Zadatak 2.6. *Dokažite teorem 2.35.*

2.3 Kvadratni skupovi

Kvadratne skupove u projektivnom prostoru uveo je F. Buekenhout [4] kao aksiomatski pristup kvadrikama. Temeljito su obrađeni u knjizi [2] i od tamo su preuzeti dokazi iz ove cjeline. U nastavku, neka je $\mathcal{Q}$ neki skup točaka u apstraktnom n-dimenzionalnom projektivnom prostoru $\mathcal{P}$. Pravac koji siječe $\mathcal{Q}$ u jednoj točki zovemo tangentom, a pravac koji je potpuno sadržan u $\mathcal{Q}$ zovemo $\mathcal{Q}$-pravcem. Definiramo tangencijalni prostor motivirani propozicijom 2.30.

Definicija 2.36. *Za* $T\in\mathcal{Q}$ tangencijalni prostor $\mathcal{Q}_T$ *je unija svih pravaca kroz* T *koji su tangente ili su* $\mathcal{Q}$*-pravci.*

Ako je $\mathcal{Q}$ kvadrika u $PG(n,F)$ i $T=\langle x\rangle$ njezina točka, tangencijalni prostor $\mathcal{Q}_T$ podudara se s $\langle x\rangle^\perp$ (propozicija 2.30), a to je hiperravnina ili cijeli prostor (lema 2.29). Općenito tangencijalni prostor ne mora biti potprostor od $\mathcal{P}$. Naprimjer, ako je $\mathcal{Q}=\{T_1,T_2\}$ dvočlan skup, $\mathcal{Q}_{T_1}$ i $\mathcal{Q}_{T_2}$ se sastoje od svih točaka iz $\mathcal{P}$ osim točaka na spojnici T_1T_2, a to nije potprostor. Ograničit ćemo se na skupove $\mathcal{Q}$ za koje tangencijalni prostori jesu potprostori i koje pravci sijeku na isti način kao kvadrike.

Definicija 2.37. *Za* $\mathcal{Q}$ *kažemo da je* kvadratni skup *u* $\mathcal{P}$ *ako zadovoljava*

1. *za svaki* $T\in\mathcal{Q}$*, tangencijalni prostor* $\mathcal{Q}_T$ *je hiperravnina ili cijeli* $\mathcal{P}$*,*
2. *ako pravac ima tri zajedničke točke s* $\mathcal{Q}$*, onda je cijeli sadržan u* $\mathcal{Q}$*.*

Kvadrike zadovoljavaju te aksiome: prvi aksiom zbog leme 2.29, a drugi aksiom zbog propozicije 2.27. Prema tome, kvadrike su kvadratni skupovi u $PG(n,F)$. Singularne točke i radikal kvadratnog skupa $\mathcal{Q}$ definiramo isto kao za kvadrike: točka $T\in\mathcal{Q}$ je *singularna* ako je tangencijalni prostor $\mathcal{Q}_T$ cijeli $\mathcal{P}$, a rad $\mathcal{Q}$ je skup svih singularnih točaka od $\mathcal{Q}$. To je potprostor i u ovom općenitijem kontekstu.

Propozicija 2.38. *Radikal kvadratnog skupa je potprostor od* $\mathcal{P}$*.*

Dokaz. Vidi [2], teorem 4.1.2 (a) na str. 139. □

Kvadratni skup kojemu je radikal prazan skup (potprostor dimenzije -1) nazivamo *nedegeneriranim.* Kao i za kvadrike, svaki kvadratni skup je konus nad nedegeneriranim kvadratnim skupom.

Teorem 2.39. *Neka je $\mathcal{Q}$ kvadratni skup u projektivnom prostoru $\mathcal{P}$.*

(a) Neka je $\mathcal{R}$ direktni komplement od $\operatorname{rad} \mathcal{Q}$*, tj. potprostor od $\mathcal{P}$ takav da je $\mathcal{R} \cap \operatorname{rad} \mathcal{Q} = \emptyset$ i $\langle \mathcal{R}, \operatorname{rad} \mathcal{Q} \rangle = \mathcal{P}$. Onda je $\mathcal{Q}' = \mathcal{Q} \cap \mathcal{R}$ nedegenerirani kvadratni skup u $\mathcal{R}$.*

(b) $\mathcal{Q}$ je konus s vrhom $\operatorname{rad} \mathcal{Q}$ *i bazom $\mathcal{Q}'$, tj. sastoji se od točaka koje leže na spojnicama VT, za $V \in \operatorname{rad} \mathcal{Q}$ i $T \in \mathcal{Q}'$.*

Dokaz. Vidi [2], teorem 4.1.2 (b) i (c). □

U nastavku se ograničavamo na nedegenerirane kvadratne skupove. Svi njihovi tangencijalni prostori su hiperravnine, a pridruživanje $T \mapsto \mathcal{Q}_T$ je injektivno:

Lema 2.40. *Neka je $\mathcal{Q}$ nedegenerirani kvadratni skup. Ako su $T_1, T_2 \in \mathcal{Q}$ različite točke, onda je $\mathcal{Q}_{T_1} \neq \mathcal{Q}_{T_2}$.*

Dokaz. Vidi [2], lema 4.1.3 na str. 140. □

Sljedeća propozicija pokazuje kako izgledaju presjeci nedegeneriranog kvadratnog skupa s hiperravninama.

Propozicija 2.41. *Neka je $\mathcal{Q}$ nedegenerirani kvadratni skup.*

(a) Ako je $\mathcal{R}$ hiperravnina koja nije tangencijalna na $\mathcal{Q}$, onda je $\mathcal{Q}' = \mathcal{Q} \cap \mathcal{R}$ nedegenerirani kvadratni skup u $\mathcal{R}$.

(b) Ako je $T \in \mathcal{Q}$ i $\mathcal{R}$ direktni komplement od T u $\mathcal{Q}_T$, onda je $\mathcal{Q}' = \mathcal{Q} \cap \mathcal{R}$ nedegenerirani kvadratni skup u $\mathcal{R}$.

Dokaz. Vidi [2], lema 4.1.4 na str. 141. □

Prema tome, $\mathcal{Q} \cap \mathcal{Q}_T$ je konus u $\mathcal{Q}_T$ s vrhom T i bazom $\mathcal{Q}'$ iz (b) dijela propozicije. Sad ćemo proučiti strukturu potprostora od $\mathcal{P}$ sadržanih u nedegeneriranom kvadratnom skupu $\mathcal{Q}$. To je jedan od klasičnih primjera polarnog prostora. Potprostore sadržane u $\mathcal{Q}$ kratko zovemo *$\mathcal{Q}$-potprostorima.*

Definicija 2.42. *Neka je $\mathcal{Q}$ kvadratni skup i $t-1$ maksimalna dimenzija $\mathcal{Q}$-potprostora. Onda broj t zovemo* indeksom *od $\mathcal{Q}$, a $\mathcal{Q}$-potprostore dimenzije* $t-1$ maksimalnim $\mathcal{Q}$-potprostorima.

Eliptička kvadrika u $PG(3,F)$ je kvadratni skup indeksa 1 jer ne sadrži pravce, a hiperbolička kvadrika u $PG(3,F)$ je kvadratni skup indeksa 2 jer sadrži pravce i ne sadrži ravnine.

Propozicija 2.43. *Neka je $\mathcal{Q}$ nedegenerirani kvadratni skup indeksa t u $\mathcal{P}$. Za svaki maksimalni $\mathcal{Q}$-potprostor $\mathcal{U}$ i točku $T \in \mathcal{Q} \setminus \mathcal{U}$ postoji jedinstveni maksimalni $\mathcal{Q}$-potprostor $\mathcal{V}$ takav da je $T \in \mathcal{V}$ i $\dim(\mathcal{U} \cap \mathcal{V}) = t-2$. Potprostor $\mathcal{V}$ sadrži sve točke iz $\mathcal{U}$ koje leže na $\mathcal{Q}$-pravcima kroz T.*

Dokaz. Tangencijalni prostor $\mathcal{Q}_T$ je hiperravnina i ne sadrži potprostor $\mathcal{U}$. Zato je $\mathcal{V}' = \mathcal{Q}_T \cap \mathcal{U}$ potprostor dimenzije $t-2$ (za jedan manje od $\dim \mathcal{U}$) i sadržan je u $\mathcal{Q}$ (jer je podskup od $\mathcal{U}$). Spojnice točke T s točkama iz $\mathcal{V}'$ su $\mathcal{Q}$-pravci, jer leže u tangencijalnom prostoru, a nisu tangente. Stoga je $\mathcal{V} = \langle \mathcal{V}', T \rangle$ maksimalni $\mathcal{Q}$-potprostor (dimenzije $t-1$) koji sadrži T. Štoviše, svaki $\mathcal{Q}$-potprostor $\mathcal{W}$ koji sadrži T i siječe $\mathcal{U}$ u $(t-2)$-dimenzionalnom potprostoru podudara se s $\mathcal{V}$. Dimenzija mu je veća od $t-2$, a manja od indeksa t pa je $\mathcal{W}$ maksimalan ($\dim \mathcal{W} = t-1$). Spojnice T s točkama iz $\mathcal{U} \cap \mathcal{W}$ su $\mathcal{Q}$-pravci, pa je $\mathcal{U} \cap \mathcal{W} = \mathcal{V}'$ i $\mathcal{W} = \langle \mathcal{V}', T \rangle = \mathcal{V}$. Zadnja tvrdnja propozicije slijedi iz definicije od $\mathcal{V}$; skup svih točaka iz $\mathcal{U}$ koje leže na $\mathcal{Q}$-pravcima kroz T očito se podudara s $\mathcal{V}'$. $\square$

Posebno, na hiperboličkoj kvadrici $\mathcal{Q}$ u $PG(3,F)$ kroz svaku točku T i $\mathcal{Q}$-pravac p koji nisu incidentni, postoji $\mathcal{Q}$-pravac q kroz T koji siječe p. Iz propozicije slijedi da su maksimalni potprostori nedegeneriranog kvadratnog skupa "ravnomjerno raspoređeni" po cijelom skupu:

Korolar 2.44. *Neka je $\mathcal{Q}$ nedegenerirani kvadratni skup u $\mathcal{P}$. Kroz svaku točku od $\mathcal{Q}$ prolazi maksimalni $\mathcal{Q}$-potprostor.*

Lema 2.45. *Neka je $\mathcal{Q}$ kvadratni skup i $\mathcal{S}$ njegov podskup sa svojstvom da je spojnica bilo koje dvije točke iz $\mathcal{S}$ $\mathcal{Q}$-pravac. Tada je $\langle \mathcal{S} \rangle$ $\mathcal{Q}$-potprostor.*

Dokaz. Dovoljno je dokazati lemu za konačne skupove $\mathcal{S}$. Naime, zbog konačnodimenzionalnosti od $\mathcal{P}$ postoji konačan podskup $\mathcal{S}_0 \subseteq \mathcal{S}$ takav da je $\langle \mathcal{S}_0 \rangle = \langle \mathcal{S} \rangle$. Dokaz ide indukcijom po $|\mathcal{S}|$. Za $|\mathcal{S}| = 0$ ili 1 je $\langle \mathcal{S} \rangle$ prazan skup ili jedna točka iz $\mathcal{Q}$, a to su $\mathcal{Q}$-potprostori. Za $|\mathcal{S}| = 2$ je $\langle \mathcal{S} \rangle$ spojnica dvije točke iz $\mathcal{S}$, a to je $\mathcal{Q}$-pravac. Za $|\mathcal{S}| > 2$ pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za bilo koji skup od $|\mathcal{S}| - 1$ elemenata. Izaberemo proizvoljnu točku $S \in \mathcal{S}$ i stavimo $\mathcal{V} = \langle \mathcal{S} \setminus \{S\} \rangle$. Po pretpostavci indukcije $\mathcal{V}$ je $\mathcal{Q}$-potprostor. Ako je $S \in \mathcal{V}$ tvrdnja vrijedi (jer je tada $\langle \mathcal{S} \rangle = \mathcal{V}$), zato pretpostavimo $S \notin \mathcal{V}$. Po pretpostavci leme, pravci RS za $R \in \mathcal{S} \setminus \{S\}$ su $\mathcal{Q}$-pravci. Stoga je $\langle \mathcal{S} \setminus \{S\}, S \rangle = \langle \mathcal{S} \rangle = \langle \mathcal{V}, S \rangle$ sadržan u tangencijalnom prostoru $\mathcal{Q}_S$ i svi pravci RS za $R \in V$ su $\mathcal{Q}$-pravci. Dakle, $\langle \mathcal{S} \rangle$ je $\mathcal{Q}$-potprostor. $\square$

Teorem 2.46. *Neka je $\mathcal{Q}$ nedegenerirani kvadratni skup u projektivnom prostoru $\mathcal{P}$. Za svaki maksimalni $\mathcal{Q}$-potprostor $\mathcal{U}$ postoji maksimalni $\mathcal{Q}$-potprostor $\mathcal{V}$ disjunktan s $\mathcal{U}$.*

Dokaz. Neka je $\mathcal{Q}$ indeksa t. Dokazat ćemo općenitiju tvrdnju: za svaki $j \in \{-1, 0, \ldots, t-2\}$ postoji maksimalni $\mathcal{Q}$-potprostor $\mathcal{V}_j$ za koji je $\dim(\mathcal{U} \cap \mathcal{V}_j) = j$. Traženi disjunktni potprostor je $\mathcal{V}_{-1}$.

Dokaz ide silaznom indukcijom po j. Za $j = t-2$ tvrdnja slijedi iz propozicije 2.43. Pretpostavimo da za neki $j \in \{0, \ldots, t-2\}$ postoji potprostor $\mathcal{V}_j$ i iz njega konstruiramo potprostor $\mathcal{V}_{j-1}$. Primijetimo da postoji točka $T \in \mathcal{Q}$ takva da $\langle \mathcal{U} \cap \mathcal{V}_j, T\rangle$ nije $\mathcal{Q}$-potprostor. Inače bi $\mathcal{U} \cap \mathcal{V}_j$ bio podskup radikala rad $\mathcal{Q}$, što je kontradikcija s nedegeneriranosti zbog $\dim(\mathcal{U} \cap \mathcal{V}_j) = j \geq 0$.

Po propoziciji 2.43 postoji maksimalni $\mathcal{Q}$-potprostor $\mathcal{W}$ kroz T koji siječe $\mathcal{V}_j$ u potprostoru dimenzije $t-2$. Tvrdimo da je to traženi potprostor $\mathcal{V}_{j-1}$, tj. da je $\dim(\mathcal{U} \cap \mathcal{W}) = j - 1$. Budući da $\mathcal{U} \cap \mathcal{V}_j$ nije sadržan u $\mathcal{W}$ (inače bi $\langle \mathcal{U} \cap \mathcal{V}_j, T\rangle$ bio $\mathcal{Q}$-potprostor), očito je $\dim(\mathcal{U} \cap \mathcal{V}_j \cap \mathcal{W}) = j - 1$. Zato je dovoljno dokazati da je $\mathcal{U} \cap \mathcal{V}_j \cap \mathcal{W} = \mathcal{U} \cap \mathcal{W}$.

Pretpostavimo suprotno, da postoji točka $X \in \mathcal{U} \cap \mathcal{W}$ koja nije sadržana u $\mathcal{V}_j$. Skup $\mathcal{S} = (\mathcal{V}_j \cap \mathcal{W}) \cup (\mathcal{U} \cap \mathcal{V}_j) \cup \{X\}$ zadovoljava pretpostavku leme 2.45, tj. spojnica bilo koje dvije točke iz $\mathcal{S}$ je $\mathcal{Q}$-pravac. Zato je $\langle \mathcal{S}\rangle$ $\mathcal{Q}$-potprostor koji sadrži hiperravninu $\mathcal{V}_j \cap \mathcal{W}$ u $\mathcal{W}$ i točku $X \in \mathcal{W}$ koja ne pripada toj hiperravnini, pa je $\langle \mathcal{S}\rangle = \mathcal{W}$. Zbog $\mathcal{U} \cap \mathcal{V}_j \subseteq \mathcal{S}$ i $T \in \mathcal{W}$ iz toga slijedi $\langle \mathcal{U} \cap \mathcal{V}_j, T\rangle \subseteq \mathcal{W} \subseteq \mathcal{Q}$, što je kontradikcija s izborom točke T. $\square$

Teorem 2.47. *Neka je $\mathcal{Q}$ nedegenerirani kvadratni skup indeksa t u n-dimenzionalnom projektivnom prostoru $\mathcal{P}$. Ako je n paran, onda je $t \leq n/2$; ako je n neparan, onda je $t \leq (n+1)/2$.*

Dokaz. Po prethodnom teoremu u $\mathcal{Q}$ postoje dva disunktna potprostora $\mathcal{U}$ i $\mathcal{V}$ dimenzije $t-1$. Iz Grassmanove formule (teorema 1.26) slijedi $n = \dim \mathcal{P} \geq \dim\langle \mathcal{U}, \mathcal{V}\rangle = \dim \mathcal{U} + \dim \mathcal{V} - \dim(\mathcal{U} \cap \mathcal{V}) = t - 1 + t - 1 - (-1) = 2t - 1.$ $\square$

Posebno su važni nedegenerirani kvadratni skupovi maksimalnog ili skoro maksimalnog indeksa.

Definicija 2.48. *Neka je $\mathcal{Q}$ nedegeneriran kvadratni skup u n-dimenzionalnom projektivnom prostoru $\mathcal{P}$. Ako je n paran i $\mathcal{Q}$ indeksa $n/2$, kažemo da je $\mathcal{Q}$* parabolički *kvadratni skup. Ako je n neparan, a $\mathcal{Q}$ indeksa $(n-1)/2$, odnosno $(n+1)/2$, kažemo da je $\mathcal{Q}$* eliptički*, odnosno* hiperbolički *kvadratni skup.*

Naprimjer, nedegenerirana konika u $PG(2, F)$ je parabolički kvadratni skup, eliptička kvadrika u $PG(3, F)$ je eliptički kvadratni skup, a hiperbolička kvadrika u $PG(3, F)$ je hiperbolički kvadratni skup. Kasnije ćemo vidjeti da su u konačnim projektivnim prostorima svi nedegenerirani kvadratni skupovi parabolički, eliptički ili hiperbolički.

Kvadrike u $PG(n, F)$ su klasični primjeri kvadratnih skupova i bili su motivacija za definiciju kvadratnog skupa u apstraktnom projektivnom prostoru. Postavlja se pitanje jesu li kvadrike jedini primjeri, ili postoje "neklasični" kvadratni skupovi u $PG(n, F)$? Temeljni Buekenhoutov rezultat iz [4] jest da su neklasični primjeri kvadratnih skupova mogući samo ako je indeks 1.

Definicija 2.49. *Za skup točaka $\mathcal{O}$ projektivnog prostora $\mathcal{P}$ kažemo da je* ovoid *ako nikoje tri točke iz $\mathcal{O}$ nisu kolinearne te za svaku točku $T \in \mathcal{O}$ tangente kroz T čine hiperravninu u $\mathcal{P}$.*

Definicija je očito ekvivalentna s nedegeneriranim kvadratnim skupom indeksa 1 u $\mathcal{P}$.

Teorem 2.50 (Buekenhout [4])**.** *Svaki nedegenerirani kvadratni skup u $PG(n, F)$ je kvadrika ili ovoid.*

Ovoid u projektivnoj ravnini nazivamo *ovalom.* U konačnom slučaju, ako je $\mathcal{P}$ dimenzije n i reda q, lako se izračuna da ovoid sadrži točno $q^{n-1} + 1$ točaka. Oval u konačnoj projektivnoj ravnini reda q je skup od $q + 1$ točaka od kojih nikoje tri nisu kolinearne (zadatak 2.7). Takvi skupovi postoje i u nedesarguesovskim projektivnim ravninama, ali tamo pojam konike nema smisla. Ograničimo se stoga na ovale u klasičnoj konačnoj projektivnoj ravnini $PG(2, q)$. Prema poznatom rezultatu B. Segrea [26], za neparan q svi ovali su konike.

Teorem 2.51 (Segre)**.** *Ako je q neparna prim potencija, svaki oval u $PG(2, q)$ je konika.*

Ako gledamo tangente na oval $\mathcal{O}$ kroz točku $T \notin \mathcal{O}$, ovali u ravninama neparnog reda imaju slična svojstva kao nedegenerirana konika u $PG(2, \mathbb{R})$ (odnosno elipsa u $AG(2, \mathbb{R})$).

Propozicija 2.52. *Neka je $\mathcal{O}$ oval u projektivnoj ravnini $\mathcal{P}$ neparnog reda q. Kroz svaku točku $T \in \mathcal{P} \setminus \mathcal{O}$ prolaze dvije tangente ili nula tangenta na $\mathcal{O}$. U prvom slučaju T zovemo* vanjskom točkom*, a u drugom slučaju* unutrašnjom točkom *ovala. Ukupan broj vanjskih točaka je $\binom{q+1}{2}$, a unutrašnjih točaka $\binom{q}{2}$. Kroz svaku vanjsku točku prolazi $\frac{q-1}{2}$ sekanti i $\frac{q-1}{2}$ pravaca koji ne sijeku $\mathcal{O}$, a kroz svaku unutrašnju točku prolazi $\frac{q+1}{2}$ sekanti i $\frac{q+1}{2}$ pravaca koji ne sijeku $\mathcal{O}$.*

Ovali u ravninama parnog reda imaju bitno drukčija svojstva.

Propozicija 2.53. *Neka je $\mathcal{O}$ oval u projektivnoj ravnini $\mathcal{P}$ parnog reda q. Postoji jedinstvena točka $N \in \mathcal{P} \setminus \mathcal{O}$ kroz koju prolaze sve tangente na $\mathcal{O}$; zovemo ju* nukleus *ovala. Kroz svaku od preostalih točaka $T \in \mathcal{P} \setminus \mathcal{O}$, $T \neq N$ prolazi jedna tangenta, $\frac{q}{2}$ sekanti i $\frac{q}{2}$ pravaca koji ne sijeku $\mathcal{O}$.*

Uzmemo li nedegeneriranu koniku u ravnini $PG(2, q)$ parnog reda q i dodamo joj nukleus N, dobit ćemo skup od $q + 2$ točaka od kojih nikoje tri nisu kolinearne (tzv. *hiperoval*). Izbacivanjem bilo koje točke različite od N iz tog skupa dobivamo oval koji nije konika. Za parni $q \geq 64$ postoje i drugi neklasični ovali u $PG(2, q)$, koji ne nastaju na ovaj način (vidi skriptu [3] i web stranicu [9]).

Ovoid u trodimenzionalnom projektivnom prostoru $PG(3, q)$ je skup od $q^2 + 1$ u točaka od kojih nikoje tri nisu kolinearne (zadatak 2.9). Primjeri ovoida su eliptičke kvadrike u $PG(3, q)$. Za neparni q vrijedi analogon Segreova teorema, prema kojem su to jedini primjeri.

Teorem 2.54 (Barlotti [1] i Panella [23])**.** *Ako je q neparna prim potencija, svaki ovoid u $PG(3, q)$ je eliptička kvadrika.*

Za parni q poznata je samo jedna familija ovoida u $PG(3, q)$ koji nisu kvadrike, takozvani Suzuki-Titsovi ovoidi [29] (vidi također cjelinu 8.4 u skripti [8] na str. 123–126). Kao što smo napomenuli, jedini nedegenerirani kvadratni skupovi u $PG(n, q)$ su parabolički (indeksa $t = n/2$), eliptički (indeksa $t = (n-1)/2$) i hiperbolički (indeksa $t = (n+1)/2$). Za $n \geq 4$ indeks je $t \geq 2$, pa ne postoje ovoidi u konačnim projektivnim prostorima dimenzije veće od tri. Dakle, prema Buekenhoutovu teoremu 2.50 svi nedegenerirani kvadratni skupovi u $PG(n, q)$ za $n \geq 4$ su kvadrike.

Zadaci

Zadatak 2.7. *Neka je $\mathcal{O}$ skup od $q + 1$ točaka u projektivnoj ravnini reda q, od kojih nikoje tri nisu kolinearne. Dokažite da je tada $\mathcal{O}$ oval, tj. da kroz svaku njegovu točku prolazi jedinstvena tangenta.*

Zadatak 2.8. *Dokažite propozicije 2.52 i 2.53.*

Zadatak 2.9. *Neka je $\mathcal{O}$ skup od $q^2 + 1$ točaka u trodimenzionalnom projektivnom prostoru $\mathcal{P}$ reda q, od kojih nikoje tri nisu kolinearne. Dokažite da je tada $\mathcal{O}$ ovoid, tj. da je za svaku točku $T \in \mathcal{O}$ tangencijalni prostor $\mathcal{O}_T$ ravnina u $\mathcal{P}$.*

Zadatak 2.10. *Proučite dokaz Segreova teorema 2.51 u članku [26], u knjizi [19] (cjelina XII.6 na str. 250–252) ili u skripti [8] (cjelina 4.3 na str. 51–57).*

3 Polarni prostori

3.1 Generalizirani četverokuti

Generalizirani četverokuti su prema polarnim prostorima u analognom odnosu kao projektivne ravnine prema projektivnim prostorima.

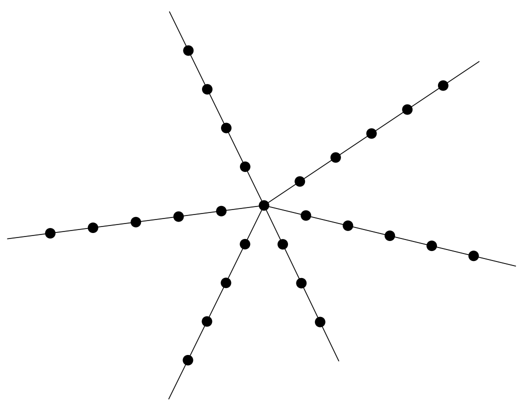
Definicija 3.1. Generalizirani četverokut *je incidencijska struktura (točke, pravci, incidencija) koja zadovoljava sljedeće aksiome:*

(G_1) *kroz svake dvije točke prolazi najviše jedan pravac,*

(G_2) *za svaku točku T i pravac p koji nisu incidentni postoji jedinstvena točka na p kolinearna s T,*

(G_3) *niti jedna točka nije kolinearna sa svim ostalim točkama.*

Aksiom (G_3) isključuje incidencijske strukture poput ove:



Slika 8: "Zvijezda" ne zadovoljava aksiom (G_3).

Jedinstvenu točku iz aksioma (G_2) zovemo *nožištem* iz T na p, a pravac koji spaja nožište s točkom T zovemo *okomicom* iz T na p.

Lema 3.2. *U generaliziranom četverokutu ne postoji trovrh (skup od tri nekolinearne točke od kojih su svake dvije kolinearne).*

Dokaz. U trovrhu ABC točke B i C su obje kolinearne s A i leže na pravcu BC. To je kontradikcija s jedinstvenosti u aksiomu (G_2). □

Lema 3.3. *Na svakom pravcu generaliziranog četverokuta leže bar dvije točke.*

Dokaz. Pretpostavimo suprotno, da je $p = \{P\}$ pravac koji sadrži samo jednu točku P. Za bilo koju točku $T \neq P$ nožište iz T na p je točka P. Prema tome, P je kolinearna sa svim ostalim točkama, što je kontradikcija s aksiomom (G_3). □

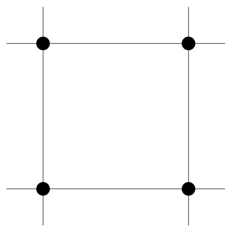
Propozicija 3.4. *Aksiomi generaliziranog četverokuta su samodualni.*

Dokaz. Očito se svaka dva pravca polarnog prostora sijeku najviše u jednoj točki, a za svaku točku T i pravac p koji nisu incidentni postoji jedinstveni pravac kroz T koji siječe p (nožište i okomica jedinstveno određuju jedno drugo). Pokažimo da vrijedi dual aksioma (G_3): niti jedan pravac ne siječe sve ostale pravce. Pretpostavimo suprotno, da pravac p siječe sve ostale pravce. Postoji točka A koja ne leži na p (inače bi sve točke bile kolinearne). Neka je a okomica iz A na p i A' odgovarajuće nožište. Postoji druga točka B izvan p takva da okomica b iz B na p siječe p u točki $B' \neq A'$; inače bi točka A' bila kolinearna sa svim ostalim točkama. Pravci a i b se ne sijeku jer bismo imali trovrh, kontradikciju s lemom 3.2. Okomica iz A na b siječe pravac p u nekoj točki $C' \neq A'$ i ponovo imamo trovrh $AA'C'$. Zato ne postoji pravac poput p koji siječe sve ostale pravce. $\square$

Korolar 3.5. *Kroz svaku točku generaliziranog četverokuta prolaze bar dva pravca.*

Dokaz. Tvrdnja je dualna lemi 3.3 i slijedi iz dualnog aksioma (G_3). Kad bi kroz točku T prolazio samo jedan pravac p, svaki drugi pravac q morao bi sječi p (okomica iz T na q ne može biti ništa drugo osim p). $\square$

Minimalna incidencijska struktura koja zadovoljava aksiome (G_1), (G_2) i (G_3) je četverokut:

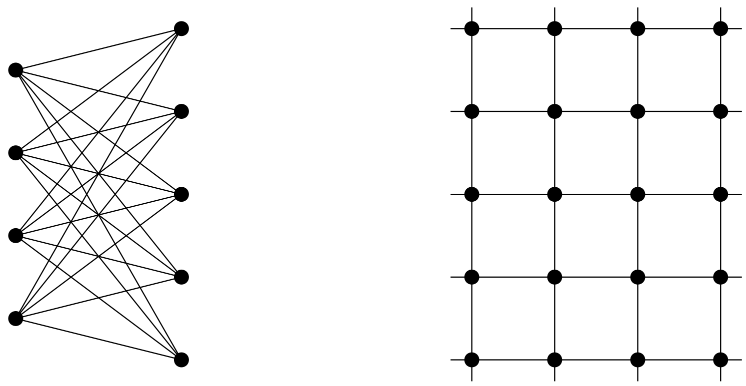


Slika 9: Četverokut.

Potpun bipartitan graf $K_{m,n}$ sa $m, n \geq 2$ i njegov dual, rešetka $G_{m,n}$ su također primjeri generaliziranih četverokuta (vidi sliku 10). Svi pravci u $K_{m,n}$ su stupnja 2, a točke su stupnja m i n. U $G_{m,n}$ su sve točke stupnja 2, a pravci su stupnja m i n. Ako imamo bar jedan element (točku ili pravac) stupnja barem 3, onda su svi dualni elementi (pravci ili toče) konstantnog stupnja.

Teorem 3.6. *(a) Ako u generaliziranom četverokutu postoji točka supnja barem 3, onda su svi pravci istog stupnja.*

(b) *Ako u generaliziranom četverokutu postoji pravac stupnja barem* 3*, onda su sve točke istog stupnja.*



Slika 10: Potpun bipartitan graf $K_{4,5}$ i njegov dual, rešetka $G_{4,5}$.

Dokaz. Dozazujemo tvrdnju (a), a tvrdnja (b) dokazuje se dualno. Iz aksioma (G_2) slijedi da su bilo koja dva pravca p i q koji se ne sijeku istog stupnja. Svakoj točki na p pridružena je jedinstvena točka na q (nožište), a pritom se različite točke preslikavaju u različite jer generalizirani četverokut ne sadrži trovrh. Analogno uspostavljamo injekciju sa skupa $[q]$ u skup $[p]$, pa ti skupovi imaju jednako mnogo elemenata.

Neka je T točka stupnja barem 3; dokazujemo da su svi pravci kroz T istog stupnja. Neka su p i q dva pravca kroz T, a r treći pravac kroz T. Po lemi 3.3 na r leži točka $U \neq T$, a po korolaru 3.5 kroz U prolazi pravac $s \neq r$. Pravac s ne siječe p i q jer bismo inače imali trovrh. Po prethodnoj tvrdnji pravci p i q su istog stupnja kao s, pa su i međusobno istog stupnja.

Konačno, neka je p proizvoljan pravac koji ne prolazi kroz T. Točno jedan pravac kroz T siječe p (okomica), a ostali ga ne sijeku. Zato je p također istog stupnja kao pravci kroz T. Dakle, svi pravci su istog stupnja. □

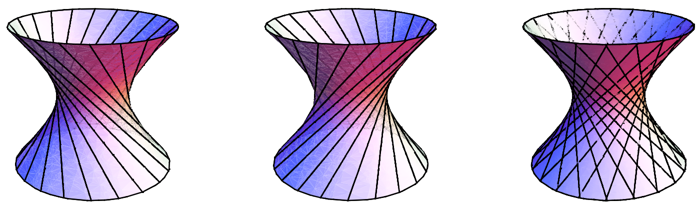
Definicija 3.7. *Za generalizirani četverokut u kojemu su svi pravci stupnja* $s+1$*, a sve točke stupnja* $t+1$ *kažemo da je* reda (s,t).

Jedini primjeri generaliziranih četverokuta u kojima točke ili pravci nisu istog stupnja su potpuni bipartitni grafovi $K_{m,n}$ i rešetke $G_{m,n}$ za $m \neq n$.

Propozicija 3.8. *Generalizirani četverokut reda* (s,t) *ima ukupno* $v = (s+1)(st+1)$ *točaka i* $b = (t+1)(st+1)$ *pravaca.*

Dokaz. Izaberemo pravac p_0 i prebrojavamo parove (T, p) pri čemu je T točka koja nije na p_0, a p pravac koji siječe p_0. Po aksiomu (G_2) za svaku točku T postoji jedinstveni pravac p, pa parova ima $v - (s+1)$. S druge strane p možemo izabrati na $(s+1)t$ načina (biramo točku na p_0 i pravac kroz nju), a točku T iz $[p] \setminus [p_0]$ na s načina. Zato parova ima $(s+1)t \cdot s$. Izjednačavanjem slijedi $v = (s+1)st + s + 1 = (s+1)(st+1)$. Formula za b dokazuje se dualno. □

Netrivijalne primjere generaliziranih četverokuta dobivamo od nedegeneriranih kvadrika u $PG(n, F)$ indeksa 2. Za točke generaliziranog četverokuta uzmemo točke kvadrike $\mathcal{Q}$, a za pravce generaliziranog četverokuta uzmemo $\mathcal{Q}$-pravce (zbog indeksa 2 to su ujedno maksimalni $\mathcal{Q}$-potprostori). Aksiom (G_1) očito vrijedi, aksiom (G_2) slijedi iz propozicije 2.43, a aksiom (G_3) vrijedi zbog nedegeneriranosti. Indeks 2 imaju hiperbolička kvadrika u $PG(3, F)$, parabolička kvadrika u $PG(4, F)$ i eliptička kvadrika u $PG(5, F)$. Pravci hiperboličke kvadrike u $PG(3, F)$ čine takozvani regulus i njemu suprotni regulus.



Slika 11: Hiperbolička kvadrika u $PG(3, F)$ sadrži reguluse.

Definicija 3.9. *Za skup $\mathcal{R}$ međusobno mimoilaznih pravaca u $PG(3, F)$ kažemo da je* regulus *ako vrijedi:*

- *kroz svaku točku na svakom pravcu iz $\mathcal{R}$ prolazi transverzala od $\mathcal{R}$,*
- *kroz svaku točku na svakoj transverzali od $\mathcal{R}$ prolazi pravac iz $\mathcal{R}$.*

Pod transverzalom podrazumijevamo pravac koji siječe svaki pravac iz $\mathcal{R}$ u jednoj točki. Skup svih transverzala regulusa $\mathcal{R}$ također je regulus, koji zovemo *suprotni regulus* od $\mathcal{R}$ i označavamo $\mathcal{R}'$. Ako je polje F komutativno, svaka tri mimoilazna pravca u $PG(3, F)$ sadržana su u jedinstvenom regulusu [2, teorem 2.4.3], a skup točaka na svakom regulusu je hiperbolička kvadrika [2, teorem 2.4.4]. Nad konačnim poljem $F = \mathbb{F}_q$ regulus $\mathcal{R}$ u $PG(3,q)$ sadrži $q+1$ pravaca, a generalizirani četverokut kojeg čine $\mathcal{R}$ i $\mathcal{R}'$ je rešetka $G_{q+1,q+1}$. Parametri tog generaliziranog četverokuta su

$$s = q, \quad t = 1, \quad v = (q+1)^2, \quad b = 2(q+1).$$

Parabolička kvadrika u konačnom četverodimenzionalnom projektivnom prostoru $PG(4,q)$ je generalizirani četverokut s parametrima

$$s = q, \quad t = q, \quad v = (q+1)(q^2+1), \quad b = (q+1)(q^2+1).$$

Konačno, eliptička kvadrika u $PG(5,q)$ je generalizirani četverokut s parametrima

$$s = q, \quad t = q^2, \quad v = (q+1)(q^3+1), \quad b = (q^2+1)(q^3+1).$$

Druga klasična familija konačnih generaliziranih četverokuta su nedegenerirane hermitske mnogostrukosti u projektivnom prostoru $PG(n,q^2)$ dimenzije $n = 3$ i $n = 4$ nad poljem kvadratnog reda. To su skupovi točaka koji su projektivno ekvivalentni skupu rješenja jednadžbe

$$x_0^{q+1} + x_1^{q+1} + \ldots + x_n^{q+1} = 0.$$

Za $n = 3$ generalizirani četverokut ima parametre

$$s = q^2, \quad t = q, \quad v = (q^2+1)(q^3+1), \quad b = (q+1)(q^3+1),$$

a za $n = 4$ ima parametre

$$s = q^2, \quad t = q^3, \quad v = (q^2+1)(q^5+1), \quad b = (q^3+1)(q^5+1).$$

Treći klasični primjer generaliziranog četverokuta čine sve točke iz $PG(3,q)$ i skup totalno izotropnih pravaca obzirom na neki simplektički polaritet. Taj primjer označavamo $W_3(q)$ i on ima parametre

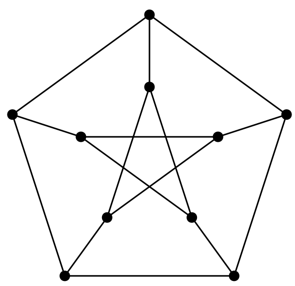
$$s = q, \quad t = q, \quad v = (q+1)(q^2+1), \quad b = (q+1)(q^2+1).$$

Poznati su mnogi primjeri neklasičnih generaliziranih četverokuta. Prve primjere otkrio je J. Tits i opisani su u zadacima 3.2 i 3.3. Ovdje opisujemo konstrukciju Ahrensa, Szekeresa i Halla za parni q. Neka je $\mathcal{O}$ hiperoval u $PG(2,q)$, $q = 2^h$. To je skup od $q+2$ točaka od kojih nikoje tri nisu kolinearne; pravci u $PG(2,q)$ sijeku $\mathcal{O}$ u dvije točke ili su s njim disjunktni. Zamislimo da je $PG(2,q)$ uložen u $PG(3,q)$ i kao točke generaliziranog četverokuta uzmimo točke iz $PG(3,q) \setminus PG(2,q)$. Kao pravce uzmimo pravce iz $PG(3,q)$ koji nisu sadržani u $PG(2,q)$ i sijeku $\mathcal{O}$ u jednoj točki. Tvrdimo da tako dobivamo generalizirani četverokut s parametrima

$$s = q - 1, \quad t = q + 1, \quad v = q^3, \quad b = q^2(q + 2).$$

Aksiomi (G_1) i (G_3) su očiti, a za (G_2) uzmimo točku $T \in PG(3,q) \setminus PG(2,q)$ i pravac p koji siječe hiperoval u jednoj točki O_1. Ravnina $\langle T, p\rangle$ siječe ravninu $PG(2,q)$ u pravcu kroz O_1, pa taj pravac sadrži još jednu točku hiperovala O_2. Pravac TO_2 je jedinstvena okomica iz T na p. Ostali pravci kroz T u ravnini $\langle T, p\rangle$ (različiti od TO_1 i TO_2) nisu pravci generaliziranog četverokuta jer ne sadrže točku hiperovala. Na svakom pravcu generaliziranog četverokuta leži q točaka iz $PG(3,q) \setminus PG(2,q)$ pa je $s = q - 1$, a kroz svaku točku prolazi $q + 2$ pravaca (spojnice s točkama hiperovala) pa je $t = q + 1$.

Sad ćemo dati nekoliko nužnih uvjeta za postojanje konačnih generaliziranih četverokuta. Prvi se dokazuje s pomoću jako regularnih grafova. Za graf kažemo da je *jako regularan* s parametrima $SRG(v, k, \lambda, \mu)$ ako ima v vrhova, stupanj svakog vrha je k i svaka dva vrha imaju točno λ zajedničkih susjeda ako su susjedni, a μ zajedničkih susjeda ako nisu susjedni. Naprimjer, Petersenov graf je jako regularan s parametrima $SRG(10, 3, 0, 1)$.



Slika 12: Petersenov graf je $SRG(10, 3, 0, 1)$.

Teorem 3.10. *Neka je A matrica susjedstva jako regularnog grafa s parametrima $SRG(v, k, \lambda, \mu)$. Svojstvene vrijednosti od A su k i još dva broja $r > 0$ i $l < 0$ koja zadovoljavaju $r + l = \lambda - \mu$, $rl = \mu - k$. Kratnost od k je 1, a od r i l kratnosti su redom*

$$f = \frac{-k(l + 1)(k - l)}{(k + rl)(r - l)} \quad i \quad g = \frac{k(r + 1)(k - r)}{(k + rl)(r - l)}.$$

Dokaz. Vidi npr. [20], teorem 7.2.2 na str. 219. □

Promotrimo graf kolinearnosti generaliziranog četverokuta reda (s,t). Njegovi vrhovi su točke, a birdom su spojeni parovi točaka koje su kolinearne. Iz prethodne propozicije je $v = (s+1)(st+1)$. Svaka točka kolinearna je s $k = (t+1)s$ drugih točaka i to je stupanj regularnosti grafa. Za svake dvije kolinearne točke postoji točno $\lambda = s-1$ točaka na njihovoj spojnici koje su kolinearne s obje, a točke izvan spojnice ne mogu biti kolinearne s obje jer bismo imali trokut. Konačno, za svake dvije nekolinearne točke imamo $\mu = t+1$ pravaca kroz jednu od njih, a na svakom je točno jedna točka kolinearna s drugom izabranom točkom (aksiom (G_2)).

Time smo dokazali da je graf kolinearnosti jako regularan s parametrima $SRG((s+1)(st+1),(t+1)s,s-1,t+1)$. Po teoremu 3.10 njegova matrica susjedstva A ima svojstvene vrijednosti $k = (t+1)s$, $r = s-1 > 0$ i $l = -t-1 < 0$. Kratnost od r je $f = \frac{st(s+1)(t+1)}{s+t}$ i to je prirodan broj, pa vrijedi sljedeći nuždan uvjet za postojanje generaliziranog četverokuta.

Teorem 3.11. *Ako postoji generalizirani četverokut reda (s,t), onda $s+t$ dijeli $st(s+1)(t+1)$.*

Drugi nuždan uvjet je takozvana Higmanova nejednakost.

Teorem 3.12 (Higmanova nejednakost)**.** *Neka postoji generalizirani četverokut reda (s,t).*

(a) Ako je $s > 1$, onda je $t \leq s^2$.

(b) Ako je $t > 1$, onda je $s \leq t^2$.

Dokaz. Neka su P_1 i P_2 nekolinearne točke i neka je $\mathcal{D}$ skup svih točaka koje nisu kolinearne s P_1 niti s P_2. Kardinalitet tog skupa dobijemo iz formule uključivanja-isključivanja:

$$d = |\mathcal{D}| = (s+1)(st+1) - 2s(t+1) + (t+1) = s^2t - st + t - s. \tag{1}$$

Neka je $\mathcal{D} = \{T_1, \ldots, T_d\}$ i označimo s t_i broj točaka kolinearnih s P_1, P_2 i T_i. Prebrojavanjem parova točaka (T,Q), gdje je $T \in \mathcal{D}$ i Q kolinearna s P_1, P_2 i T, dobijemo

$$\sum_{i=1}^{t} t_i = (t+1)(t-1)s. \tag{2}$$

Za desnu stranu biramo najprije jedan od $t+1$ pravaca kroz P_1, pa zbog aksioma (G_2) na njemu postoji jedinstvena točka Q koja je kolinearna s P_2. Zatim uzmemo neki od $t-1$ pravaca kroz Q različit od P_1Q i P_2Q i na njemu izaberemo bilo koju od s točaka $T \neq Q$. Svaka od tih točaka je iz

$\mathcal{D}$ (tj. nije kolinearna s P_1 niti s P_2) jer bismo inače imali trovrh. Na sličan način prebrojavanjem trojki točaka (T, Q_1, Q_2), gdje je $T \in \mathcal{D}$ i $Q_1 \neq Q_2$ su kolinearne s P_1, P_2 i T, dobijemo

$$\sum_{i=1}^{d} t_i(t_i - 1) = (t+1)t(t-1). \tag{3}$$

Za desnu stranu biramo najprije Q_1 na $t+1$ načina, zatim Q_2 na t načina. Te dvije točke nisu kolinearne jer bismo imali trovrh. Na svakom od $t-1$ pravaca kroz Q_1 različitom od P_1Q_1 i P_2Q_1 točno je jedna točka T kolinearna s Q_2 (aksiom (G_2)), a ona je iz $\mathcal{D}$ zbog leme 3.2. Iz (2) i (3) slijedi

$$\sum_{i=1}^{d} t_i^2 = (t+1)(t-1)(t+s). \tag{4}$$

Higmanova nejednakost dobije se "trikom s varijancom". Varijanca niza brojeva $t_1, \ldots, t_d$ je nenegativan broj $\sum_{i=1}^{d}(t_i - \bar{t})^2 \geq 0$, gdje je $\bar{t} = \frac{1}{d}\sum_{i=1}^{d} t_i$ srednja vrijednost niza. Raspisivanjem formule za varijancu dobijemo

$$d\sum_{i=1}^{d} t_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{d} t_i\right)^2 \geq 0,$$

iz čega uvrštavanjem (1), (2) i (4) slijedi $(t+1)t(t-1)(s-1)(s^2-t) \geq 0$. Zbog uvjeta $s > 1$ iz toga slijedi $t = 1$ ili $s^2 - t \geq 0$; u oba slučaja vrijedi nejednakost $t \leq s^2$. Nejednakost (b) dobije se dualno, zbog propozicije 3.4.

Alternativno, umjesto nenegativnosti varijance u dokazu možemo koristiti kriterij za nenegativnost kvadratnog polinoma. Neka je n_j broj točaka iz $\mathcal{D}$ koje imaju točno j zajedničkih "susjeda" s P_1 i P_2, tj. $n_j = |\{i \mid t_i = j\}|$. U tim oznakama jednakosti (1), (2), (3) i (4) zapisuju se kao

$$\sum_{j\geq 0} n_j = d = s^2t - st + t - s,$$

$$\sum_{j\geq 0} j\, n_j = (t+1)(t-1)s,$$

$$\sum_{j\geq 0} j(j-1)\, n_j = (t+1)t(t-1),$$

$$\sum_{j\geq 0} j^2\, n_j = (t+1)(t-1)(t+s).$$

Gledamo kvadratni polinom

$$f(x) = \sum_{j\geq 0} n_j(x-j)^2 = \left(\sum_{j\geq 0} n_j\right) x^2 - 2\left(\sum_{j\geq 0} j\, n_j\right) x + \sum_{j\geq 0} j^2\, n_j.$$

Iz gornjih jednakosti koeficijente mu možemo izraziti kao $a = d$, $b = -2(t+1)(t-1)s$, $c = (t+1)(t-1)(t+s)$. Iz formule kojom je f definiran vidimo da je $f(x) \geq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$, pa mu je diskriminanta manja ili jednaka nuli: $b^2 - 4ac \leq 0$. Slijedi $4(t+1)t(t-1)(s-1)(t-s^2) \leq 0$, odnosno $t \leq s^2$. $\square$

Korolar 3.13.

(a) *U generaliziranom četverokutu reda (s,t), $s > 1$ vrijedi $t = s^2$ ako i samo ako za svaku trijadu (tj. za svake tri točke od kojih nikoje dvije nisu kolinearne) postoji točno $s+1$ točaka koje su kolinearne sa sve tri točke iz trijade.*

(b) *U generaliziranom četverokutu reda (s,t), $t > 1$ vrijedi $s = t^2$ ako i samo ako za svaka tri pravca od kojih se nikoja dva ne sijeku postoji točno $t+1$ pravaca koja sijeku sva tri pravca.*

Dokaz. Uvjet $t = s^2$ ekvivalentan je s time da je varijanca niza $t_1, \ldots, t_d$ jednaka nuli, tj. da je niz konstantan. Iz jednakosti (2) dobije se $t_1 = \ldots = t_d = s+1$, a to su upravo brojevi točaka kolinearnih s trijadama P_1, P_2, T_i. Alternativno, uvjet $t = s^2$ ekvivalentan je s time da je diskriminanta polinoma $f(x)$ jednaka nuli, tj. da polinom ima dvostruku nultočku $x = -\frac{b}{2a}$. Uvrštavanjem u polinom vidimo da su tada svi $n_j = 0$, osim za $j = \frac{b}{2a} = s+1$. Tvrdnja (b) je dualna i slijedi zbog propozicije 3.4. $\square$

Korolar 3.14. *Neka postoji generalizirani četverokut reda (s,t) sa $s > 1$, $t > 1$, $s < t^2$ i $t < s^2$. Onda je $s \leq t^2 - t$ i $t \leq s^2 - s$.*

Dokaz. Zbog $t < s^2$ možemo ga zapisati kao $t = s^2 - n$ za neki $n \in \mathbb{N}$. Po teoremu 3.11 vrijedi $s + t \mid st(s+1)(t+1)$, tj.

$$s + s^2 - n \quad | \quad s(s^2-n)(s+1)(s^2-n+1).$$

Faktore na desnoj strani gledamo modulo $s + s^2 - n$:

$$s^2 - n = s + s^2 - n - s \equiv -s \pmod{s + s^2 - n},$$

$$s^2 - n + 1 = s + s^2 - n + 1 - s \equiv 1 - s \pmod{s + s^2 - n},$$

$$s(s+1) = s^2 + s - n + n \equiv n \pmod{s + s^2 - n}.$$

Njihov produkt je djeljiv sa $s + s^2 - n$, tj.

$$(-s)(1-s)n = (s^2 - s)n \equiv 0 \pmod{s + s^2 - n}.$$

Ovdje je prvi faktor $s^2 - s = s + s^2 - n + n - 2s \equiv n - 2s \pmod{s + s^2 - n}$, pa smo dobili $(n-2s)n \equiv 0 \pmod{s+s^2-n} \Longrightarrow (2s-n)n \equiv 0 \pmod{s+s^2-n}$. Pretpostavimo da je $n < 2s$; tada je na lijevoj strani prirodan broj djeljiv sa $s+s^2-n$, pa mora biti $(2s-n)n \geq s+s^2-n$, tj. $n^2-(2s+1)n+s(s+1) \leq 0$. Nultočke ovog kvadratnog polinoma su $n = s$ i $n = s+1$. Time smo dokazali da je $n = s$, $n = s + 1$ ili $n \geq 2s$. U svakom slučaju vrijedi $n \geq s$, odnosno $t \leq s^2 - s$. Prva nejednakost $s \leq t^2 - t$ dobije se dualno. □

Zadaci

Zadatak 3.1. *Dokažite: ako su svi pravci generaliziranog četverokuta stupnja 2, onda je on potpun bipartitan graf.*

Zadatak 3.2. *Neka je $\mathcal{O}$ oval u ravnini $PG(2,q)$ uloženoj u trodimenzionalni prostor $PG(3,q)$. Za točke uzmimo (i) točke iz $PG(3,q) \setminus PG(2,q)$, (ii) hiperravnine H u $PG(3,q)$ takve da je $|H \cap \mathcal{O}| = 1$, (iii) jedan novi simbol ∞. Za pravce uzmimo (a) pravce u $PG(3,q)$ koji nisu sadržani u $PG(2,q)$ i sijeku $\mathcal{O}$, (b) točke iz $\mathcal{O}$. Incidencija točaka tipa (i) i pravaca tipla (a) je naslijeđena iz $PG(3,q)$. Točka tipa (ii) (hiperravnina) incidentna je s pravcima tipa (a) koje sadrži i s pravcem tipa (b) (točkom iz $\mathcal{O}$) u njoj. Točka ∞ incidentna je sa svim pravcima tipa (b) i nije incidentna s pravcima tipa (a). Dokažite da dobivamo generalizirani četverokut s parametrima*

$$s = q, \quad t = q, \quad v = (q+1)(q^2+1), \quad b = (q+1)(q^2+1).$$

Zadatak 3.3. *Neka je $\mathcal{O}$ ovoid u prostoru $PG(3,q)$ uloženom u četverodimenzionalni prostor $PG(4,q)$. Dokažite da analognom konstrukcijom kao u prethodnom zadatku dobivamo generalizirani četverokut s parametrima*

$$s = q, \quad t = q^2, \quad v = (q+1)(q^3+1), \quad b = (q^2+1)(q^3+1).$$

3.2 Definicija polarnog prostora

Prvi sustav aksioma za polarne prostore dao je F.D. Veldkamp u svojoj disertaciji 1959. godine, objavljenoj kao niz od pet članaka u časopisu nizozemske akademije [32]. Ovdje navodimo aksiome J. Titsa [30] iz 1974.

Definicija 3.15. Polarni prostor ranga t *sastoji se od skupa točaka* $\mathcal{P}$ *i familije podskupova od* $\mathcal{P}$ *koje nazivamo* potprostorima*, takve da vrijede sljedeći aksiomi:*

(1) *Svaki potprostor zajedno s potprostorima koje sadrži čini projektivni prostor dimenzije* $d \in \{-1, 0, \ldots, t-1\}$.

(2) *Presjek svaka dva potprostora je potprostor.*

(3) *Za svaki potprostor* $\mathcal{U}$ *dimenzije* $t-1$ *i točku* $T \in \mathcal{P} \setminus \mathcal{U}$ *postoji jedinstveni potprostor* $\mathcal{V}$ *takav da je* $T \in \mathcal{V}$ *i* $\dim(\mathcal{U} \cap \mathcal{V}) = t-2$. *Potprostor* $\mathcal{V}$ *sadrži sve točke iz* $\mathcal{U}$ *koje su kolinearne s* T.

(4) *Postoje dva disjunktna potprostora dimenzije* $t-1$.

Potprostor dimenzije -1 je prazan skup, a potprostori dimenzije 0 su skupovi od jedne točke. Potprostore dimenzije 1 zovemo *pravcima*; točke polarnog prostora su *kolinearne* ako postoji pravac koji ih sadrži. Potprostore dimenzije $t-1$ u polarnom prostoru ranga t zovemo *maksimalnim potprostorima.*

Neka je $\mathcal{Q}$ nedegenerirani kvadratni skup indeksa t u projektivnom prostoru dimenzije n. Kao točke polarnog prostora uzmimo točke od $\mathcal{Q}$, a kao potprostore familiju $\mathcal{Q}$-potprostora (projektivne potprostore sadržane u $\mathcal{Q}$). Aksiomi (1) i (2) vrijede za bilo koju familiju projektivnih potprostora, a aksiomi (3) i (4) slijede iz propozicije 2.43 i teorema 2.46. Dakle, $\mathcal{Q}$-potprostori čine polarni prostor ranga t. Kvadratni skupovi, odnosno kvadrike su jedna od tri klasične familije polarnih prostora uloženih u projektivni prostor. Druge dvije klasične familije su takozvani hermitski i simplektički polarni prostori.

Neka je S neki skup točaka u polarnom prostoru $\mathcal{P}$. Kažemo da je S *predlinearan* ako je sadržan u potprostoru od $\mathcal{P}$. Zbog aksioma (2) postoji najmanji potprostor koji sadrži takav skup, koji označavamo $\langle S \rangle$.

Propozicija 3.16. *Skup* $S \subseteq \mathcal{P}$ *je predlinearan ako i samo ako su svake dvije točke iz* S *kolinearne.*

Dokaz. Ako je S sadržan u potprostoru, jasno je da su svake dvije njegove točke kolinearne. Obrnuto, neka su svake dvije točke iz S kolinearne. Neka je $\mathcal{U}$ maksimalni potprostor za koji je dimenzija presjeka $\dim\langle S \cap \mathcal{U} \rangle$ najveća moguća. Tvrdimo da je tada $S \subseteq \mathcal{U}$; u suprotnom postoji točka $T \in S \setminus \mathcal{U}$. Po aksiomu (3) postoji maksimalni potprostor $\mathcal{V}$ koji sadrži T i sve točke iz $\mathcal{U}$ kolinearne s T, posebno sve točke iz $S \cap \mathcal{U}$. Potprostor $\langle S \cap \mathcal{U} \rangle$ je sadržan u $\mathcal{V}$ i ne sadrži točku T, pa je $\dim\langle S \cap \mathcal{V}\rangle \geq \dim\langle S \cap \mathcal{U}, T\rangle > \dim\langle S \cap \mathcal{U}\rangle$. To je kontradikcija s maksimalnošću od $\dim\langle S \cap \mathcal{U}\rangle$ i zato mora biti $S \subseteq \mathcal{U}$. $\square$

Usput smo dokazali sljedeću tvrdnju.

Korolar 3.17. *Svaki predlinearni skup sadržan je u maksimalnom potprostoru od $\mathcal{P}$.*

Za potprostore $\mathcal{U}$ i $\mathcal{V}$ polarnog prostora definiramo

$$\Pi_{\mathcal{U}}(\mathcal{V}) = \{T \in \mathcal{U} \mid \mathcal{V} \cup \{T\} \text{ je predlinearan}\}.$$

Po propoziciji 3.16, to je skup svih točaka $T \in \mathcal{U}$ koje su kolinearne sa svim točkama iz $\mathcal{V}$.

Lema 3.18. *Skup $\mathcal{V} \cup \Pi_{\mathcal{U}}(\mathcal{V})$ je predlinearan.*

Dokaz. Uzmemo bilo koje dvije točke A, $B \in \mathcal{V} \cup \Pi_{\mathcal{U}}(\mathcal{V})$. Ako su $A, B \in \mathcal{V}$, onda su kolinearne jer je $\mathcal{V}$ potprostor. Ako su $A, B \in \Pi_{\mathcal{U}}(\mathcal{V}) \subseteq \mathcal{U}$, onda su kolinearne jer je $\mathcal{U}$ potprostor. Ako je pak $A \in \mathcal{V}$ i $B \in \Pi_{\mathcal{U}}(\mathcal{V})$ (ili obrnuto), kolinearne su po samoj definiciji skupa $\Pi_{\mathcal{U}}(\mathcal{V})$. Iz propozicije 3.16 slijedi da je unija $\mathcal{V} \cup \Pi_{\mathcal{U}}(\mathcal{V})$ predlinearni skup. $\square$

Propozicija 3.19. *Skup $\Pi_{\mathcal{U}}(\mathcal{V})$ je potprostor.*

Dokaz. Riječ je o podskupu potprostora $\mathcal{U}$; provjeravamo da za svake dvije točke $A, B \in \Pi_{\mathcal{U}}(\mathcal{V})$ skup sadrži i sve točke pravca AB. Iz prethodne leme unija $\mathcal{V} \cup \Pi_{\mathcal{U}}(\mathcal{V})$ je predlinearni skup i generira potprostor $\langle \mathcal{V}, \Pi_{\mathcal{U}}(\mathcal{V})\rangle$. Taj potprostor sadrži spojnicu AB i potprostor $\mathcal{V}$. Zato su sve točke na spojnici kolinearne s točkama iz $\mathcal{V}$ i pripadaju skupu $\Pi_{\mathcal{U}}(\mathcal{V})$. $\square$

Propozicija 3.20. *Ako je $\mathcal{U}$ maksimalni potprostor, onda je i $\langle \mathcal{V}, \Pi_{\mathcal{U}}(\mathcal{V})\rangle$ maksimalni potprostor.*

Dokaz. Tvrdnja je očita ako je $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{U}$. Zato pretpostavimo da postoji točka $T \in \mathcal{V} \setminus \mathcal{U}$... $\square$

Propozicija 3.21. *Ako je $\mathcal{V}$ maksimalni potprostor, onda je $\Pi_{\mathcal{U}}(\mathcal{V}) = \mathcal{U} \cap \mathcal{V}$.*

Dokaz. Inkluzija $\mathcal{U} \cap \mathcal{V} \subseteq \Pi_{\mathcal{U}}(\mathcal{V})$ je očita. Za drugu inkluziju uzmimo $T \in \Pi_{\mathcal{U}}(\mathcal{V})$; skup $\mathcal{V} \cup \{T\}$ je predlinearan, a $\langle \mathcal{V}, T\rangle$ je potprostor koji sadrži $\mathcal{V}$. Budući da je $\dim \mathcal{V} = t - 1$ vrijedi jednakost $\langle \mathcal{V}, T\rangle = \mathcal{V}$, pa je $T \in \mathcal{V}$. $\square$

Propozicija 3.16 je generalizacija leme 2.45. Tvrdnja teorema 2.46 također vrijedi za opće polarne prostore, a ne samo za kvadrike.

Teorem 3.22. *Za svaki maksimalni potprostor $\mathcal{U}$ postoji maksimalni potprostor $\mathcal{V}$ disjunktan s $\mathcal{U}$.*

Dokaz. Po aksiomu (4) postoje dva disjunktna maksimalna potprostora $\mathcal{X}$ i $\mathcal{Y}$. Neka je $\mathcal{Z}$ direktni komplement od $\mathcal{U} \cap \mathcal{X}$ u $\mathcal{X}$ (potprostor od $\mathcal{X}$ takav da je $\mathcal{U} \cap \mathcal{Z} = \emptyset$ i $\langle \mathcal{U} \cap \mathcal{X}, \mathcal{Z} \rangle = \mathcal{X}$). Prema propoziciji 3.20 potprostor $\mathcal{V} = \langle \mathcal{Z}, \Pi_{\mathcal{Y}}(\mathcal{Z}) \rangle$ je maksimalan; tvrdimo da je disjunktan s $\mathcal{U}$. Iz propozicije 3.16 slijedi da je $(\mathcal{U} \cap \mathcal{X}) \cup \mathcal{Z} \cup (\mathcal{U} \cap \mathcal{V})$ predlinearni skup, pa razapinje potprostor $\langle \mathcal{U} \cap \mathcal{X}, \mathcal{Z}, \mathcal{U} \cap \mathcal{V} \rangle \supseteq \langle \mathcal{U} \cap \mathcal{X}, \mathcal{Z} \rangle = \mathcal{X}$. Zbog maksimalnosti od $\mathcal{X}$ vrijedi jednakost $\langle \mathcal{U} \cap \mathcal{X}, \mathcal{Z}, \mathcal{U} \cap \mathcal{V} \rangle = \mathcal{X}$ iz čega slijedi $\mathcal{U} \cap \mathcal{V} \subseteq \mathcal{X}$. Posebno, $\mathcal{U} \cap \mathcal{V} = \mathcal{U} \cap \mathcal{V} \cap \mathcal{X} = \mathcal{U} \cap \mathcal{Z} = \emptyset$. $\square$

Štoviše, vrijedi općenitija tvrdnja koju smo za kvadrike već susreli u dokazu teorema 2.46.

Teorem 3.23. *Neka je $\mathcal{U}$ maksimalni potprostor i $\mathcal{L}$ potprostor sadržan u $\mathcal{U}$. Onda postoji maksimalni potprostor $\mathcal{V}$ takav da je $\mathcal{L} = \mathcal{U} \cap \mathcal{V}$.*

Polarni prostor ranga 1 je bilo koji skup koji sadrži bar dvije točke, s praznim skupom i jednočlanim podskupovima kao potprostorima. Idući teorem karakterizira polarne prostore ranga 2.

Teorem 3.24. *Polarni prostori ranga* 2 *ekvivalentni su s generaliziranim četverokutima.*

Dokaz. Prvo dokazujemo da incidencijska struktura između točaka (0-potprostora) i pravaca (1-potprostora) polarnog prostora ranga 2 zadovoljava aksiome generaliziranog četverokuta. Za aksiom (G_1) uzmimo bilo koje dvije točke. Ako su kolinearne, sadržane su u potprostoru (propozicija 3.16), a to je projektivni prostor. Zato točke imaju najviše jednu spojnicu. Aksiom (G_2) ekvivalentan je s aksiomom (3) polarnih prostora za $t = 2$. Za aksiom (G_3) neka je T bilo koja točka. Po aksiomu (4) postoje dva disjunktna pravca; točka T ne leži bar na jednom od njih, recimo p. Znamo da je T kolinearna točno s jednom točkom na p, a na p postoji bar još jedna točka. Dakle, postoji točka s kojom T nije kolinearna.

Obrnuto, neka je dan generalizirani četverokut i uzmimo kao potprostore prazan skup, jednočlane skupove točaka i skupove točaka incidentnih s pravcem. Tvrdimo da je ta familija polarni prostor ranga 2. Prazan skup je projektivni prostor dimenzije -1, jednočlan skup je projektivni prostori dimenzije 0, a skup točaka na pravcu projektivni prostor dimenzije 1; dakle vrijedi aksiom (1). Jasno je da vrijedi i aksiom (2), jer se pravci generaliziranog četverokuta sijeku najviše u jednoj točki. Već smo napomenuli da je aksiom (3) za $t = 2$ ekvivalentan s aksiomom (G_2) generaliziranih četverokuta. Konačno, za aksiom (4) treba provjeriti da u generaliziranom četverokutu postoje dva disjunktna pravca. Uzmimo bilo koji pravac p i točku T koja ne leži na njemu (postoji zbog aksioma (G_3)). Po korolaru 3.5 kroz T prolaze bar dva pravca, a samo jedan od njih siječe p (okomica). Dakle, postoji pravac disjunktan s p. □

Projektivni prostor definirali smo kao incidencijsku strukturu koja zadovoljava aksiome (P_1), (P_2') i (P_3). U cjelini 1.2 vidjeli smo da iz incidencije točaka i pravaca proizlazi cjelokupna struktura potprostora projektivnog prostora. Temeljni rezultat F. Buekenhouta i E. Shulta [7] jest da se i polarni prostori mogu definirati preko incidencije točaka i pravaca.

Definicija 3.25. Shultov prostor *je incidencijska struktura koja zadovoljava sljedeće aksiome.*

(B_1) *Za svaku točku T i pravac p koji nisu incidentni postoji jedinstvena točka na p kolinearna s T, ili su sve točke na p kolinearne s T.*

(B_2) *Niti jedna točka nije kolinearna sa svim ostalim točkama.*

(B_3) *Svaki pravac je incidentan bar s tri točke.*

Aksiom (B_1) Shultovih prostora je poopćenje aksioma (G_2) generaliziranih četverokuta, slično kao što je Veblen-Youngov aksiom (P_2') projektivnih prostora poopćenje aksioma (P_2) projektivnih ravnina. Primijetimo da među aksiomima Shultova prostora nema aksioma (G_1) (kroz svake dvije točke prolazi najviše jedan pravac).

Skup točaka $\mathcal{U}$ Shultova prostora nazivamo *potprostorom* ako su svake dvije točke iz $\mathcal{U}$ kolinearne i ako je svaki pravac koji sadrži bar dvije točke iz $\mathcal{U}$ potpuno sadržan u $\mathcal{U}$. Očito vrijedi

Propozicija 3.26. *Presjek dva potprostora Shultova prostora je potprostor Shultova prostora.*

Shultov prostor je *ranga t* ako postoji strogo rastući niz potprostora $\emptyset \neq \mathcal{U}_1 \subset \ldots \subset \mathcal{U}_t$ duljine t, a svi ostali strogo rastući nizovi potprostora su duljine najviše t. Cilj nam je dokazati da su Shultovi prostori ranga t ekvivalentni s polarnim prostorima ranga t.

Teorem 3.27. *Incidencijska stuktura između točaka (0-potprostora) i pravaca (1-potprostora) polarnog prostora ranga $t \geq 3$ čini Shultov prostor ranga t.*

Dokaz. Točke i pravci polarnog prostora zadovoljavaju Buekenhout-Shultove aksiome:

(B_1) Neka točka T i pravac p nisu incidentni. Pravac je predlinearni skup, pa po korolaru 3.17 postoji maksimalni potprostor $\mathcal{U}$ koji ga sadrži. Ako je $T \in \mathcal{U}$, onda je T kolinearna sa svim točkama na pravcu p. U suprotnom po aksiomu (3) postoji maksimalni potprostor $\mathcal{V}$ kroz T takav da je presjek $\mathcal{U} \cap \mathcal{V}$ projektivna hiperravnina u $\mathcal{U}$. Pravac p je sadržan u tom presjeku ili ga siječe u jednoj točki. U prvom slučaju T je opet kolinearna sa svim točkama na p, a u drugom je po aksiomu (3) kolinearna samo s probodištem od p i $\mathcal{U} \cap \mathcal{V}$.

(B_2) Neka je T bilo koja točka. Po aksiomu (4) postoji maksimalni potprostor $\mathcal{U}$ kojemu točka T ne pripada. Po aksiomu (3) skup točaka iz $\mathcal{U}$ s kojima je T kolinearna čini projektivnu hiperravninu u $\mathcal{U}$, a sa svim ostalim točkama iz $\mathcal{U}$ točka T nije kolinearna. Dakle, postoje točke s kojima T nije kolinearna.

(B_3) Pravci polarnog prostora su jednodimenzionalni projektivni prostori. Zbog ranga $t \geq 3$ svaki pravac je sadržan u nekoj ravnini, pa po aksiomu projektivne ravnine (P_3) na pravcu leže bar tri točke.

Rang polarnog prostora očito odgovara rangu Shultova prostora. Bilo koji maksimalni potprostor je projektivni prostor dimenzije $t-1$ i u njemu postoji strogo rastući niz potprostora duljine t. Svaki potprostor je po korolaru 3.17 sadržan u maksimalnom potprostoru, pa ne postoji niz duljine veće od t. □

Aksiomi (B_1) i (B_2) vrijede i za rang $t = 2$, ali u tom slučaju postoje polarni prostori s pravcima stupnja 2. Primjeri su bipartitni grafovi $K_{m,n}$ i rešetke $G_{2,n}$. U slučaju $t = 2$ moramo pretpostaviti da na svakom pravcu polarnog prostora leže bar tri točke kako bi bili ekvivalentni Shultovim prostorima ranga 2.

Znatno teže je dokazati da familija svih potprostora Shultova prostora čini polarni prostor, tj. zadovoljava aksiome (1) – (4). U nastavku neka je $\mathcal{S}$ Shultov prostor ranga t. *Klika* u $\mathcal{S}$ je skup točaka od kojih su svake dvije kolinearne (to je potpuni podgraf u grafu kolinearnosti od $\mathcal{S}$).

Propozicija 3.28. *Svaka maksimalna klika u $\mathcal{S}$ je potprostor od $\mathcal{S}$.*

Dokaz. Neka je $\mathcal{C}$ maksimalna klika u $\mathcal{S}$. Maksimalnost znači da $\mathcal{C}$ nije sadržana niti u jednoj većoj kliki od $\mathcal{S}$, tj. ako je točka P kolinearna sa svakom točkom iz $\mathcal{C}$, onda je $P \in \mathcal{C}$. Trebamo provjeriti da je svaki pravac p koji siječe $\mathcal{C}$ u bar dvije točke potpuno sadržan u $\mathcal{C}$. Za proizvoljnu točku P na p

pokazat ćemo da je kolinearna sa svakom točkom $T \in \mathcal{C}$, pa iz maksimalnosti slijedi $P \in \mathcal{C}$. Ako je T na p očito je kolinearna s P, a u suprotnom možemo primijeniti aksiom (B_1). Točka T je kolinearna s dvije točke na p koje su u $\mathcal{C}$, pa je kolinearna sa svim točkama na p, posebno i s P. Dakle, $\mathcal{C}$ je potprostor od $\mathcal{S}$. □

Iz ove propozicije i iz Zornove leme slijedi da je svaka klika sadržana u potprostoru od $\mathcal{S}$.

Lema 3.29 (Zorn)**.** *Neka je P parcijalno uređen skup sa svojstvom da svaki lanac (potpuno uređen podskup od P) ima gornju među. Onda postoji maksimalni element u P.*

Propozicija 3.30. *Svaka klika u $\mathcal{S}$ sadržana je u potprostoru od $\mathcal{S}$.*

Dokaz. Neka je P skup svih klika u $\mathcal{S}$ s inkluzijom kao parcijalnim uređajem. Ako je $(\mathcal{C}_i)_{i\in I}$ lanac u P, onda je unija $\cup_{i\in I}\mathcal{C}_i$ klika u $\mathcal{S}$, tj. gornja međa tog lanca. Po Zornovoj lemi svaka klika je sadržana u maksimalnoj kliki, a ona je po propoziciji 3.28 potprostor od $\mathcal{S}$. □

Sad možemo definirati *potprostor razapet klikom* $\mathcal{C}$ kao presjek svih potprostora koji sadrže $\mathcal{C}$, u oznaci $\langle\mathcal{C}\rangle$. Po propoziciji 3.26 to je najmanji potprostor koji sadrži $\mathcal{C}$. Zornova lema nam treba i da bismo u Shultovu prostoru dokazali tvrdnju analognu korolaru 3.17. Sjetimo se da smo maksimalne potprostore polarnog prostora definirali kao potprostore dimenzije $t-1$, a ne u smislu inkluzije. Zato za dokaz korolara 3.17 (odnosno propozicije 3.16) nismo trebali Zornovu lemu. U teoremu 3.38 vidjet ćemo da se dvije definicije maksimalnih potprostora podudaraju.

Propozicija 3.31. *Svaki potprostor od $\mathcal{S}$ sadržan je u maksimalnom potprostoru od $\mathcal{S}$.*

Dokaz. Neka je P skup svih potprostora od $\mathcal{S}$ s inkluzijom kao parcijalnim uređajem. Ako je $(\mathcal{U}_i)_{i\in I}$ lanac u P, tvrdimo da je unija $\cup_{i\in I}\mathcal{U}_i$ potprostor od $\mathcal{S}$. Neka pravac p siječe uniju u dvije točke $A \in \mathcal{U}_i$ i $B \in \mathcal{U}_j$. Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je $\mathcal{U}_i \subseteq \mathcal{U}_j$ (jer su iz lanca), pa su $A, B \in \mathcal{U}_j$. Pravac p je potpuno sadržan u potprostoru $\mathcal{U}_j$, dakle i u uniji. Analogno slijedi da su svake dvije točke unije kolinearne. Dakle, unija lanca je potprostor od $\mathcal{S}$ i njegova gornja međa u P. Iz Zornove leme slijedi da je svaki element iz P majoriziran nekim maksimalnim elementom iz P. □

Hiperravnina $\mathcal{H}$ u projektivnom prostoru ima svojstvo da je svaki pravac sadržan u $\mathcal{H}$ ili siječe $\mathcal{H}$ točno u jednoj točki. Neka je $\mathcal{U}$ potprostor Shultova prostora $\mathcal{S}$. *Hiperravnina* u $\mathcal{U}$ je pravi potprostor $\mathcal{H} \subset \mathcal{U}$ koji sa svakim pravcem p iz $\mathcal{U}$ ima bar jednu zajedničku točku. Zbog definicije potprostora, ako p ima bar dvije zajedničke točke s $\mathcal{H}$, onda je potpuno sadržan u $\mathcal{H}$.

Propozicija 3.32. *Neka je $\mathcal{U}$ potprostor od $\mathcal{S}$. Hiperravnine su maksimalni pravi potprostori od $\mathcal{U}$.*

Dokaz. Pretpostavimo suprotno, da postoji hiperravnina $\mathcal{H}$ i potprostor $\mathcal{V}$ takav da je $\mathcal{H} \subset \mathcal{V} \subset \mathcal{U}$. Tada postoji točka $A \in \mathcal{U} \setminus \mathcal{V}$ i točka $B \in \mathcal{V} \setminus \mathcal{H}$. Budući da je $\mathcal{U}$ potprostor, postoji pravac p kroz A i B koji je potpuno sadržan u $\mathcal{U}$. Po definiciji hiperravnine, p siječe $\mathcal{H}$ u nekoj točki $C \neq B$ (jer $B \notin \mathcal{H}$). No tada su B i C dvije zajedničke točke od p i $\mathcal{V}$, pa je p potpuno sadržan i u $\mathcal{V}$. To je kontradikcija s $A \notin \mathcal{V}$. $\square$

Za točku T i potprostor $\mathcal{U}$ Shultova prostora definiramo $\mathcal{U}_T$ kao skup svih točaka iz $\mathcal{U}$ koje su kolinearne s T.

Propozicija 3.33. *Ako točka T nije kolinearna sa svim točkama iz $\mathcal{U}$, onda je $\mathcal{U}_T$ hiperravnina u $\mathcal{U}$.*

Dokaz. Primijetimo da $T \notin \mathcal{U}$ jer bi inače bila kolinearna sa svim točkama iz $\mathcal{U}$. Neka su $A, B \in \mathcal{U}_T$ bilo koje dvije točke. Budući da je $\mathcal{U}$ potprostor, postoji pravac p iz $\mathcal{U}$ kroz A i B. Po aksiomu (B_1), sve točke na p su kolinearne s T. Dakle, p je potpuno sadržan u $\mathcal{U}_T$ i time smo dokazali da je $\mathcal{U}_T$ potprostor. Štoviše, $\mathcal{U}_T$ je pravi potprostor od $\mathcal{U}$ jer smo pretpostavili da T nije kolinearna sa svim točkama iz $\mathcal{U}$. Na svakom pravcu p iz $\mathcal{U}$ po aksiomu (B_1) postoji bar je jedna točka kolinearna s T, pa p ima bar jednu zajedničku točku s $\mathcal{U}_T$. Dakle, $\mathcal{U}_T$ je hiperravnina u $\mathcal{U}$. $\square$

Propozicija 3.34. *Neka je T točka i $\mathcal{U}$ maksimalni potprostor od $\mathcal{S}$. Tada je $\langle T, \mathcal{U}_T \rangle$ također maksimalni potprostor od $\mathcal{S}$.*

Dokaz. Primijetimo da je $\{T\} \cup \mathcal{U}_T$ klika i stoga razapinje potprostor $\langle T, \mathcal{U}_T \rangle$. Ako su sve točke iz $\mathcal{U}$ kolinearne s T, potprostor $\langle T, \mathcal{U}_T \rangle$ se očito podudara s $\mathcal{U}$ pa je maksimalan. Zato pretpostavimo da postoji točka $A \in \mathcal{U}$ koja nije kolinearna s T. Po prethodne dvije propozicije $\mathcal{U}_T$ je tada maksimalni potprostor od $\mathcal{U}$ pa vrijedi $\mathcal{U} = \langle A, \mathcal{U}_T \rangle$. Pretpostavimo da $\langle T, \mathcal{U}_T \rangle$ nije maksimalan, tj. da je sadržan u nekom većem potprostoru $\mathcal{V}$. U potprostoru $\mathcal{V}$ postoji pravac p kroz T koji ne siječe $\mathcal{U}$ (naprimjer, spojnica od T s nekom točkom iz $\mathcal{V} \setminus \langle T, \mathcal{U}_T \rangle$). Po aksiomu (B_1), na pravcu p postoji točka B kolinearna s A. Skup $\{A, B\} \cup \mathcal{U}_T$ je klika i razapinje potprostor $\langle A, B, \mathcal{U}_T \rangle$ u kojem je $\mathcal{U} = \langle A, \mathcal{U}_T \rangle$ pravi podskup, što je kontradikcija s maksimalnošću od $\mathcal{U}$. Dakle, $\langle T, \mathcal{U}_T \rangle$ je maksimalan. $\square$

Propozicija 3.35. *Neka je T točka i $\mathcal{U}$ maksimalni potprostor od $\mathcal{S}$. Tada je $\mathcal{V} = \langle T, \mathcal{U}_T\rangle$ jednak uniji svih pravaca koji su spojnice T s nekom točkom iz $\mathcal{U}_T$ i vrijedi $\mathcal{U} \cap \mathcal{V} = \mathcal{U}_T$.*

Dokaz. Dokazujemo slučaj kad postoji točka $A \in \mathcal{U}$ koja nije kolinearna s T, inače je tvrdnja očita. Neka je $\mathcal{V} = \langle T, \mathcal{U}_T\rangle$. Tvrdnja lako slijedi iz jednakosti $\mathcal{U}_T = \mathcal{V}_A$. Naime, po propoziciji 3.33 skup $\mathcal{V}_A$ je hiperravnina u $\mathcal{V}$, pa svaki pravac u $\mathcal{V}$ siječe $\mathcal{U}_T = \mathcal{V}_A$. Potprostor $\mathcal{V}$ jednak je uniji pravaca kroz T sadržanih u $\mathcal{V}$, a svi su oni spojnice s točkama iz $\mathcal{U}_T$.

Sad dokazujemo jednakost skupova $\mathcal{U}_T = \mathcal{V}_A$. Inkluzija $\mathcal{U}_T \subseteq \mathcal{V}_A$ je očita: točke iz $\mathcal{U}_T$ su kolinearne s A jer s njom leže u potprostoru $\mathcal{U}$, a po definiciji potprostora $\mathcal{V}$ je $\mathcal{U}_T \subseteq \mathcal{V}$. Za obratnu inkluziju pretpostavimo da postoji točka $X \in \mathcal{V}_A \setminus \mathcal{U}_T$. Skup $\{A, X, \mathcal{U}_T\}$ je klika i razapinje potprostor $\langle A, X, \mathcal{U}_T\rangle$, koji sadrži $\mathcal{U} = \langle A, \mathcal{U}_T\rangle$ kao pravi podskup (jednakost $\mathcal{U} = \langle A, \mathcal{U}_T\rangle$ obrazložena je u dokazu prethodne propozicije). To je kontradikcija s maksimalnošću od $\mathcal{U}$, pa točka X ne postoji, nego je $\mathcal{V}_A \subseteq \mathcal{U}_T$.

Konačno, inkluzija $\mathcal{U}_T \subseteq \mathcal{U} \cap \mathcal{V}$ je očita, a za obratnu inkluziju uzmimo $X \in \mathcal{U} \cap \mathcal{V}$. Zbog $X \in \mathcal{V}$ točke X i T su kolinearne, a zbog $X \in \mathcal{U}$ je $X \in \mathcal{U}_T$. Dakle, vrijedi $\mathcal{U} \cap \mathcal{V} = \mathcal{U}_T$. □

Iz propozicija 3.33, 3.34 i 3.35 dobit ćemo aksiom (3) polarnih prostora, kad dokažemo da su maksimalni potprostori od $\mathcal{S}$ projektivni prostori dimenzije $t-1$. Glavna prepreka u tom dokazu je što u Buekenhout-Shultovim aksiomima nije pretpostavljeno da kroz svake dvije točke prolazi najviše jedan pravac. To se može dokazati iz aksioma (B_1), (B_2) i (B_3).

Teorem 3.36. *Kroz svake dvije točke Shultova prostora $\mathcal{S}$ prolazi najviše jedan pravac.*

Dokaz. Vidi [31], teorem 2.9 na str. 131 ili [7], teorem 3. □

Lema 3.37. *Neka je $\mathcal{U}$ maksimalni potprostor od $\mathcal{S}$ i neka su T i p točka i pravac iz $\mathcal{U}$ koji nisu incidentni. Tada postoji hiperravnina $\mathcal{H}$ u $\mathcal{U}$ koja sadrži p, a ne sadrži T. Presjek od $\mathcal{H}$ s potprostorom $\langle T, p\rangle$ podudara se sa skupom točaka na pravcu p.*

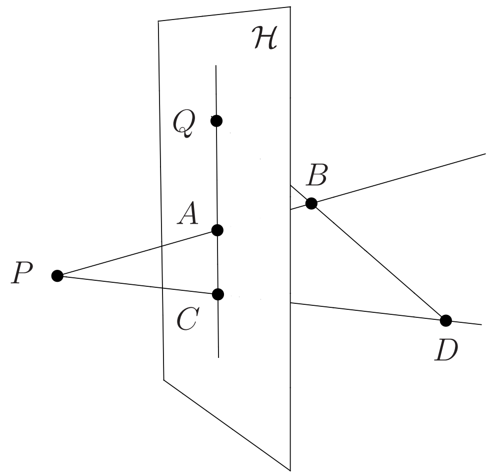
Dokaz. Vidi [31], teorem 2.12 i teorem 2.13 na str. 133–134. □

Teorem 3.38. *Svaki maksimalni potprostor Shultova prostora ranga t je projektivni prostor dimenzije $t-1$.*

Dokaz. Točke i pravce smatramo projektivnim prostorima dimenzije 0 i 1. Pretpostavimo da maksimalni potprostor $\mathcal{U}$ sadrži bar dva pravca. Tada zbog aksioma (B_3) vrijedi aksiom (P_3) projektivnog prostora. Aksiom (P_1)

slijedi iz teorema 3.36 i definicije potprostora od $\mathcal{S}$, prema kojoj su svake dvije točke iz $\mathcal{U}$ kolinearne. Provjeravamo Veblen-Youngov aksiom (P_2').

Neka su A, B, C, D četiri točke iz $\mathcal{U}$ takve da pravac AB siječe pravac CD u točki P. Prema lemi 3.37, postoji hiperravnina $\mathcal{H}$ u $\mathcal{U}$ koja sadrži pravac AC i ne sadrži točku P, a presjek $\mathcal{H} \cap \langle P, AC\rangle$ je pravac AC. Pravac BD nije sadržan u $\mathcal{H}$ jer bi inače bila i točka $T \in AB$. Budući da je $\mathcal{H}$ hiperravnina, ona siječe pravac BD u jedinstvenoj točki Q. Pravac BD je sadržan u potprostoru $\langle P, AC\rangle$ jer su $B \in PA$ i $D \in PB$, pa je i točka Q sadržana u tom potprostoru. Sad vidimo da je $AC \cap BD = (\mathcal{H} \cap \langle P, AC\rangle) \cap BD = \langle P, AC\rangle \cap (\mathcal{H} \cap BD) = \langle P, AC\rangle \cap \{Q\} = \{Q\}$.



Slika 13: Veblen-Youngov aksiom u Shultovu prostoru.

Dakle, $\mathcal{U}$ je projektivni prostor. Trebamo provjeriti da je $\mathcal{U}$ dimenzije $t-1$. Iz definicije ranga Shultova prostora slijedi da je $\dim \mathcal{U} \leq t-1$ i da postoji neki maksimalni potprostor $\mathcal{V}$ dimenzije $\dim \mathcal{V} = t-1$. Pretpostavimo suprotno, da je $\dim \mathcal{U} < t-1$. Zbog maksimalnosti $\mathcal{U}$ nije sadržan u $\mathcal{V}$, pa postoji točka $T \in \mathcal{U} \setminus \mathcal{V}$. Vrijedi $\dim(\mathcal{U} \cap \mathcal{V}) < t-2$ jer bismo inače imali $\dim \mathcal{U} \geq \dim\langle T, \mathcal{U} \cap \mathcal{V}\rangle \geq 1 + t - 2 = t-1$. Tvrdimo da postoji maksimalni potprostor $\mathcal{M}$ dimenzije $\dim \mathcal{M} = t-1$ takav da je $\dim(\mathcal{U} \cap \mathcal{M}) > \dim(\mathcal{U} \cap \mathcal{V})$. Uzastopnom primjenom te tvrdnje dolazimo u situaciju $\dim(\mathcal{U} \cap \mathcal{M}) = t-2$, a tada je $\mathcal{U} \subset \mathcal{M}$, što je kontradikcija s maksimalnošću od $\mathcal{U}$.

Po propoziciji 3.33, $\mathcal{V}_T$ je hiperravnina u $\mathcal{V}$ i vrijedi $\dim \mathcal{V}_T = t-2$. Po propoziciji 3.34, potprostor $\mathcal{M} := \langle T, \mathcal{V}_T\rangle$ je maksimalan i dimenzija mu je $t-1$. Vrijedi $\mathcal{U} \cap \mathcal{V} \subseteq \mathcal{U} \cap \mathcal{M}$: proizvoljna točka $X \in \mathcal{U} \cap \mathcal{V}$ je sadržana u $\mathcal{U}$ pa je kolinearna s T. Sadržana je u $\mathcal{V}$ pa je $X \in \mathcal{V}_T \subseteq \langle T, \mathcal{V}_T\rangle = \mathcal{M}$. Vidimo da je $X \in \mathcal{U} \cap \mathcal{M}$, dakle vrijedi inkluzija. Inkluzija je stroga zbog

$T \in \mathcal{U} \cap \mathcal{M}$ i $T \in \mathcal{U} \cap \mathcal{V}$, pa je $\dim(\mathcal{U} \cap \mathcal{V}) < \dim(\mathcal{U} \cap \mathcal{M})$. $\square$

Iz ovog teorema i iz propozicije 3.31 dobit ćemo aksiom (1) polarnih prostora. Za aksiom (4) treba nam još i sljedeći teorem.

Teorem 3.39. *Za svaki potprostor $\mathcal{U}$ od $\mathcal{S}$ postoji maksimalni potprostor disjunktan s $\mathcal{U}$.*

Dokaz. Prazan skup $\emptyset$ je potprostor, pa po propoziciji 3.31 postoji neki maksimalni potprostor $\mathcal{V}$. Ako je $\mathcal{U} \cap \mathcal{V} \neq \emptyset$ dokazat ćemo da postoji maksimalni potprostor $\mathcal{V}'$ takav da je $\mathcal{U} \cap \mathcal{V}'$ pravi podskup od $\mathcal{U} \cap \mathcal{V}$. Zbog konačnog ranga uzastopnom primjenom te konstrukcije dolazimo do maksimalnog potprostora disjunktnog s $\mathcal{U}$.

Neka je $A \in \mathcal{U} \cap \mathcal{V}$. Po aksiomu (B_2) postoji točka T koja nije kolinearna s A. Po propoziciji 3.34 je $\mathcal{V}' = \langle T, \mathcal{V}_T \rangle$ maksimalni potprostor. Tvrdimo da je $\mathcal{U} \cap \mathcal{V}' \subseteq \mathcal{U} \cap \mathcal{V}$; u suprotnom postoji točka $X \in (\mathcal{U} \cap \mathcal{V}') \setminus (\mathcal{U} \cap \mathcal{V})$. Lako se provjeri da je $(\mathcal{U} \cap \mathcal{V}) \cup \mathcal{V}_T \cup \{X\}$ klika, pa razapinje potprostor koji označimo s $\mathcal{W}$. Budući da je $\mathcal{V}_T$ hiperravnina u $\mathcal{V}$ i $A \notin \mathcal{V}_T$, vrijedi $\mathcal{V} = \langle A, \mathcal{V}_T \rangle$. Kako je $A \in \mathcal{W}$ i $\mathcal{V}_T \subseteq \mathcal{W}$ iz toga slijedi $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{W}$. No to je kontradikcija s maksimalnošću od $\mathcal{V}$ budući da je $X \in \mathcal{W}$ i $X \notin \mathcal{V}$. Dakle, $\mathcal{U} \cap \mathcal{V}'$ je podskup od $\mathcal{U} \cap \mathcal{V}$, a kako $A \notin \mathcal{V}'$ (inače bi A i T bile kolinearne), inkluzija je stroga. $\square$

U Shultovu prostoru može se direktno dokazati jača tvrdnja teorema 3.23 (vidi [31], teorem 2.16 na str. 136), ali ona slijedi automatski kad dokažemo da potprostori čine polarni prostor.

Teorem 3.40. *Familija svih potprostora Shultova prostora ranga t čini polarni prostor ranga t.*

Dokaz. Provjeravamo aksiome polarnog prostora:

(1) Po propoziciji 3.31 svaki potprostor $\mathcal{U}$ sadržan je u nekom maksimalnom potprostoru. Po teoremu 3.38 maksimalni potprostor je projektivni prostor dimenzije $t-1$, pa je $\mathcal{U}$ projektivni prostor dimenzije $d \in \{-1, 0, \ldots, t-1\}$.

(2) Presjek potprostora je potprostor po propoziciji 3.26.

(3) Neka je $\mathcal{U}$ potprostor dimenzije $t-1$ i T točka koja mu ne pripada. Budući da je $\mathcal{S}$ ranga t, potprostor $\mathcal{U}$ je maksimalan. Zato T nije kolinearna sa svim točkama iz $\mathcal{U}$. Po propoziciji 3.33 skup $\mathcal{U}_T$ je hiperravnina u $\mathcal{U}$, dakle potprostor dimenzije $t-2$. Po propoziciji 3.34 potprostor $\mathcal{V} := \langle T, \mathcal{U}_T \rangle$ je maksimalan, dakle dimenzije $t-1$. Očito je $T \in \mathcal{V}$,

a iz propozicije 3.35 slijedi da je dimenzija presjeka $\dim(\mathcal{U} \cap \mathcal{V}) = \dim \mathcal{U}_T = t - 2$. Jasno je i da $\mathcal{V}$ sadrži zve točke iz $\mathcal{U}$ kolinearne s T, jer je $\mathcal{U}_T \subset \mathcal{V}$. Preostaje dokazati jedinstvenost potprostora $\mathcal{V}$. Pretpostavimo da postoji još jedan potprostor $\mathcal{V}'$ koji sadrži T i ima svojstvo $\dim(\mathcal{U} \cap \mathcal{V}') = t - 2$. Sve točke iz $\mathcal{V}'$ su kolinearne s T, pa je $\mathcal{V}' \cap \mathcal{U} \subseteq \mathcal{U}_T$, a budući da su oba potprostori dimenzije $t-2$ podudaraju se. Sad vidimo da je $\mathcal{V} = \langle T, \mathcal{U}_T \rangle \subseteq \mathcal{V}'$, pa se i oni podudaraju zbog maksimalnosti od $\mathcal{V}$.

(4) Prazan skup $\emptyset$ je potprostor. Zato po propoziciji 3.31 postoji neki maksimalni potprostor $\mathcal{U}$, a on je po teoremu 3.38 dimenzije $t - 1$. Po teoremu 3.39 postoji i drugi maksimalni potprostor $\mathcal{V}$ disjunktan s $\mathcal{U}$, koji je također dimenzije $t - 1$.

$\square$

Zadaci

Zadatak 3.4. *Dokažite teorem 3.23. Uputa: neka je $\mathcal{W}$ maksimalni potprostor disjunktan s $\mathcal{U}$ i $\mathcal{V} = \langle \mathcal{L}, \Pi_{\mathcal{W}}(\mathcal{L}) \rangle$.*

Zadatak 3.5. *Neka je $\mathcal{U}$ potprostor dimenzije $d - 1$ u polarnom prostoru $\mathcal{P}$ ranga t. Kao novi skup točaka $\mathcal{P}'$ uzmimo sve d-dimenzionalne potprostore od $\mathcal{P}$ koji sadrže $\mathcal{U}$, a kao potprostore od $\mathcal{P}'$ podskupove inducirane potprostorima od $\mathcal{P}$. Dokažite da je tada $\mathcal{P}'$ polarni prostor ranga $t - d$, kojeg nazivamo* konusom nad *$\mathcal{U}$.*

Zadatak 3.6. *Proučite dokaz teorema 3.36 u knjizi [31] ili u članku [7].*

Literatura

[1] A. Barlotti, *Un'estensione del teorema di Segre-Kustaanheimo*, Boll. Unione Mat. Ital., III. Ser. **10** (1955), 498–506.

[2] A. Beutelspacher, U. Rosenbaum, *Projective geometry: from foundations to applications*, Cambridge University Press, 1998.

[3] M. Brown, *(Hyper)ovals and ovoids in projective spaces*, Socrates Intensive Course Finite Geometry and its Applications, Gent, 2000. `http://cage.ugent.be/~fdc/intensivecourse2/brown_2.pdf`

[4] F. Buekenhout, *Ensembles quadratiques des espaces projectifs*, Math. Z. **110** (1969), 306–318.

[5] F. Buekenhout, *Prehistory and history of polar spaces and of generalized polygons*, Socrates Intensive Course Finite Geometry and its Applications, Gent, 2000.
`http://cage.ugent.be/~fdc/intensivecourse2/buekenhout3.pdf`

[6] F. Buekenhout, A.M. Cohen, *Diagram geometry related to classical groups* (draft), 2012.
`http://www.win.tue.nl/~amc/buek/book1n.pdf`

[7] F. Buekenhout, E. Shult, *On the foundations of polar geometry*, Geom. Dedicata **3** (1974), 155–170.

[8] P.J. Cameron, *Projective and polar spaces* (lecture notes), Queen Mary and Westfield College, 2000.
`http://www.maths.qmul.ac.uk/~pjc/pps/`

[9] W. Cherowitzo, *Bill Cherowitzo's hyperoval page*, 2004.
`http://math.ucdenver.edu/~wcherowi/research/hyperoval/hypero.html`

[10] C.J. Colbourn, J.H. Dinitz (eds.), *The handbook of combinatorial designs, Second edition*, CRC Press, 2007.

[11] F. De Clerck, J. A. Thas, H. Van Maldeghem, *Generalized polygons and semipartial geometries*, Eidma minicourse, Eindhoven, 1996.
`http://cage.ugent.be/~fdc/eidma.ps`

[12] P. Dembowski, *Finite geometries*, Springer, 1968.

[13] C.-A. Faure, A. Frölicher, *Modern projective geometry*, Kluwer Academic Publishers, 2000.

[14] J.W.P. Hirschfeld, *Projective geometries over finite fields*, Claredon Press, 1979.

[15] J.W.P. Hirschfeld, *Finite projective spaces of three dimensions*, Claredon Press, 1985.

[16] J.W.P. Hirschfeld, J.A. Thas, *General Galois geometries*, Claredon Press, 1991.

[17] K. Hoffman, R. Kunze, *Linear algebra. Second edition*, Prentice-Hall, 1971.

[18] K. Horvatić, *Linearna algebra*, Sveučilište u Zagrebu, 1992.

[19] D.R. Hughes, F.C. Piper, *Projective planes*, Springer, 1973.

[20] Y.J. Ionin, M.S. Shrikhande, *Combinatorics of symmetric designs*, Cambridge University Press, 2006.

[21] V. Krčadinac, J. Šiftar, *Konačne geometrije*, skripta, PMF-Matematički odsjek, 2011.
`http://web.math.hr/nastava/kg/kg-skripta.pdf`

[22] E.S. Lander, *Symmetric designs: an algebraic approach*, Cambridge University Press, 1983.

[23] G. Panella, *Caratterizzazione delle quadriche di uno spazio (tridimensionale) lineare sopra un corpo finito*, Boll. Unione Mat. Ital., III. Ser. **10** (1955), 507–513.

[24] S.E. Payne, J.A. Thas, *Finite generalized quadrangles.*
`http://cage.ugent.be/~bamberg/FGQ.pdf`

[25] J.J. Rotman, *Advanced modern algebra*, Prentice Hall, 2003.

[26] B. Segre, *Ovals in a finite projective plane*, Canad. J. Math. **7** (1955), 414–416.

[27] L. Storme, J. De Beule (eds.), *Current research topics in Galois geometry*, Nova Science Publishers, 2012.

[28] J.A. Thas, G. Lunardon, *Finite generalized quadrangles*, Intensive Course on Galois Geometry and Generalized Polygons, Gent, 1998.
`http://cage.ugent.be/~fdc/intensivecourse/fgq.ps`

[29] J. Tits, *Ovoides et groupes de Suzuki*, Arch. Math. **13** (1962), 187–198.

[30] J. Tits, *Buildings of spherical type and finite BN-pairs*, Lecture Notes in Mathematics, Springer-Verlag, 1974.

[31] J. Ueberberg, *Foundations of incidence geometry. Projective and polar spaces*, Springer, 2011.

[32] F.D. Veldkamp, *Polar geometry I, II, III, IV, V*, Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A **62**; **63** = Indag. Math. **21** (1959), 512–551; **22** (1959), 207–212.