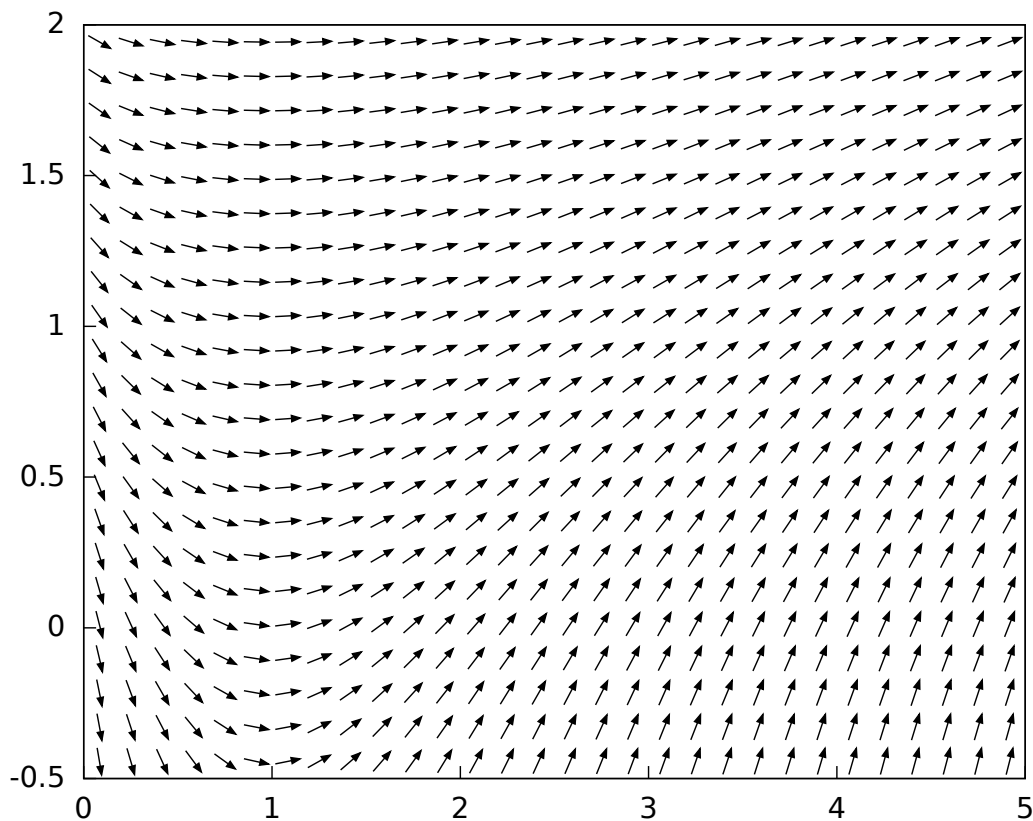


1	2	3	4	5	6	7	Σ

Ime i prezime: _____

Drugi kolokvij, 24.6.2022.

- Definirajte pojam rješenja opće diferencijalne jednadžbe prvog reda $y' = R(x, y)$. Napišite diferencijalnu jednadžbu za Newtonov zakon hlađenja. Objasnite interpretaciju svih oznaka i riješite je uz pretpostavku da je temperatura okoline konstantna.
- Odredite rješenje diferencijalne jednadžbe $y' = \frac{\ln x}{e^y}$ koje zadovoljava početni uvjet $y(1) = 0$. Skicirajte graf tog rješenja u zadanom polju pravaca:



- Gaussovom metodom eliminacija riješite sustav linearnih jednadžbi i objasnite geometrijsku interpretaciju skupa svih njegovih rješenja:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 & - x_4 = 2 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 & = 1 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 - 4x_4 & = 5 \end{aligned}$$

- Definirajte determinantu 2×2 matrice. Dokažite da je matrica regularna ako i samo ako joj je determinanta različita od nule.
- Definirajte linearnu nezavisnost skupa vektora i pojam baze vektorskog prostora. Dokažite da se svaki vektor može na jedinstven način prikazati kao linearna kombinacija vektora baze.
- Neka je \mathcal{P}_2 vektorski prostor svih polinoma stupnja najviše 2 i

$$W = \{p(x) \in \mathcal{P}_2 \mid p(-x) = p(x-1), \forall x \in \mathbb{R}\}.$$

Dokažite da je W potprostor od \mathcal{P}_2 i odredite mu bazu i dimenziju.

- Populacija kukaca podijeljena je u dvije dobne skupine. Kukci iz prve skupine prosječno imaju 2 potomka, a iz druge skupine 5 potomaka. Vjerojatnost preživljavanja iz prve u drugu skupinu je $\frac{1}{4}$. Postavite Lesliejevu matricu i analizirajte dugoročno ponašanje modela: raste li veličina populacije ili pada i koja je stabilna starosna distribucija? Ako se početna populacija sastoji od 10 kukaca iz prve skupine i 1 kukca iz druge skupine, procijenite ukupnu veličinu populacije nakon deset generacija.

Napomena. Svaki zadatak vrijedi 5 bodova. Ovaj papir predajte zajedno s papirima na kojima ste rješavali zadatke. Dozvoljeno je korištenje kalkulatora i formula u nastavku.

Pravila deriviranja

$$(C \cdot f(x))' = C \cdot f'(x)$$

$$(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x)$$

$$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2}$$

$$f(g(x))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

Tablica derivacija

$f(x)$	$f'(x)$
x^n	$n x^{n-1}$
a^x	$a^x \ln a$
$\log_a x$	$\frac{1}{x \ln a}$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$

Pravila integriranja

$$\int (C \cdot f(x)) dx = C \cdot \int f(x) dx$$

$$\int (f(x) \pm g(x)) dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx$$

$$\int f(g(x))g'(x) dx = \left[\begin{array}{l} t = g(x) \\ dt = g'(x) dx \end{array} \right] =$$

$$= \int f(t) dt = F(t) + C = F(g(x)) + C$$

Tablica integrala

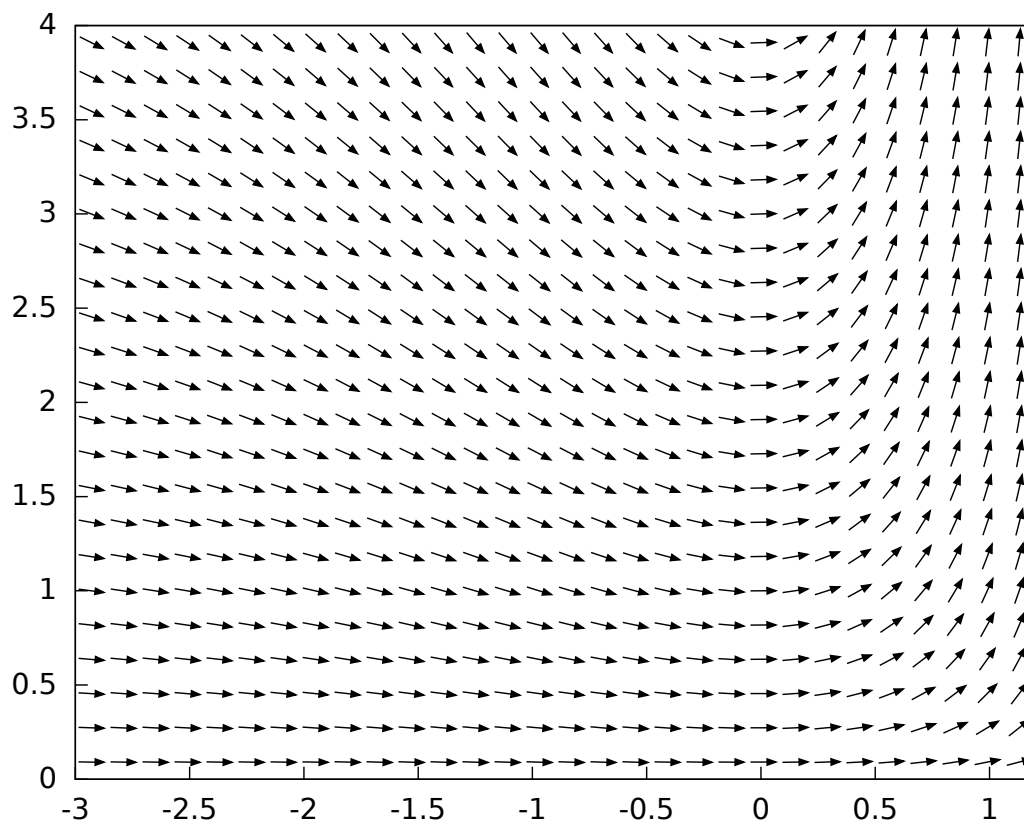
$f(x)$	$\int f(x) dx$
$x^n, n \neq -1$	$\frac{x^{n+1}}{n+1} + C$
$\frac{1}{x}$	$\ln x + C$
a^x	$\frac{a^x}{\ln a} + C$
$\sin x$	$-\cos x + C$
$\cos x$	$\sin x + C$

1	2	3	4	5	6	7	Σ

Ime i prezime: _____

Drugi kolokvij, 24.6.2022.

- Definirajte pojam rješenja opće diferencijalne jednačbe prvog reda $y' = R(x, y)$. Napište diferencijalnu jednačbu za Newtonov zakon hlađenja. Objasnite interpretaciju svih oznaka i riješite je uz pretpostavku da je temperatura okoline konstantna.
- Odredite rješenje diferencijalne jednačbe $y' = y \cdot x \cdot e^x$ koje zadovoljava početni uvjet $y(0) = 1$. Skicirajte graf tog rješenja u zadanom polju pravaca:



- Gaussovom metodom eliminacija riješite sustav linearnih jednačbi i objasnite geometrijsku interpretaciju skupa svih njegovih rješenja:

$$\begin{array}{rclclcl}
 x_1 & + & x_2 & & - & x_4 & = & 3 \\
 -x_1 & - & 2x_2 & + & 2x_3 & + & 3x_4 & = & -2 \\
 2x_1 & & & + & 4x_3 & + & 2x_4 & = & 8
 \end{array}$$

4. Definirajte determinantu 2×2 matrice. Dokažite da je matrica regularna ako i samo ako joj je determinanta različita od nule.
5. Definirajte linearnu nezavisnost skupa vektora i pojam baze vektorskog prostora. Dokažite da se svaki vektor može na jedinstven način prikazati kao linearna kombinacija vektora baze.
6. Neka je \mathcal{P}_2 vektorski prostor svih polinoma stupnja najviše 2 i

$$W = \{p(x) \in \mathcal{P}_2 \mid p(-x) = p(x+1), \forall x \in \mathbb{R}\}.$$

Dokažite da je W potprostor od \mathcal{P}_2 i odredite mu bazu i dimenziju.

7. Populacija kukaca podijeljena je u dvije dobne skupine. Kukci iz prve skupine prosječno imaju 1 potomka, a iz druge skupine 3 potomka. Vjerojatnost preživljavanja iz prve u drugu skupinu je $\frac{1}{4}$. Postavite Lesliejevu matricu i analizirajte dugoročno ponašanje modela: raste li veličina populacije ili pada i koja je stabilna starosna distribucija? Ako se početna populacija sastoji od 60 kukaca iz prve skupine i 10 kukaca iz druge skupine, procijenite ukupnu veličinu populacije nakon deset generacija.

Napomena. Svaki zadatak vrijedi 5 bodova. Ovaj papir predajte zajedno s papirima na kojima ste rješavali zadatke. Dozvoljeno je korištenje kalkulatora i formula u nastavku.

Pravila deriviranja

$$(C \cdot f(x))' = C \cdot f'(x)$$

$$(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x)$$

$$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2}$$

$$f(g(x))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

Tablica derivacija

$f(x)$	$f'(x)$
x^n	$n x^{n-1}$
a^x	$a^x \ln a$
$\log_a x$	$\frac{1}{x \ln a}$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$

Pravila integriranja

$$\int (C \cdot f(x)) dx = C \cdot \int f(x) dx$$

$$\int (f(x) \pm g(x)) dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx$$

$$\int f(g(x))g'(x) dx = \left[\begin{array}{l} t = g(x) \\ dt = g'(x) dx \end{array} \right] =$$

$$= \int f(t) dt = F(t) + C = F(g(x)) + C$$

Tablica integrala

$f(x)$	$\int f(x) dx$
$x^n, n \neq -1$	$\frac{x^{n+1}}{n+1} + C$
$\frac{1}{x}$	$\ln x + C$
a^x	$\frac{a^x}{\ln a} + C$
$\sin x$	$-\cos x + C$
$\cos x$	$\sin x + C$