1	2	3	4	5	6	7	Σ

Ime i prezime: ______________________________

Prvi kolokvij, 29.4.2022.

1. (4 boda) Veličinu populacije bakterija modeliramo nizom (B_n) zadanim Beverton-Holtovom rekurzijom $B_{n+1} = \dfrac{155B_n}{37 + B_n}$. Izračunajte limes niza i objasnite što se dugoročno događa s ovom populacijom bakterija.

2. (4 boda) Odredite prirodno područje definicije funkcije $f(x) = \dfrac{\sqrt{2-x}}{\ln(9-x^2)}$.

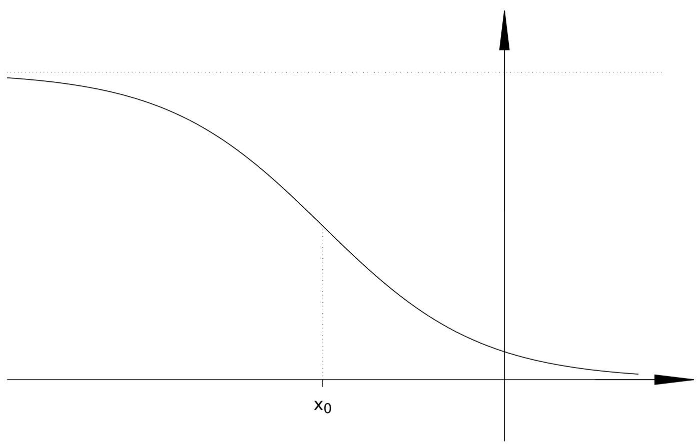
3. (4 boda) Za funkciju $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ precizno definirajte što znači:

(a) f je strogo padajuća, (b) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 17$.

Navedite primjer funkcije koja ima ta dva svojstva i skicirajte njezin graf.

4. (6 bodova) Definirajte derivaciju funkcije u točki. Neka je definirana kompozicija $g \circ f$ i neka je funkcija f derivabilna u točki x, a funkcija g u točki $f(x)$. Dokažite da je tada kompozicija $g \circ f$ derivabilna u točki x i vrijedi $(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x)$.

5. (4 boda) Na slici dolje prikazan je graf funkcije $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Označite na stražnjoj strani papira grafove funkcija f', f'' i f^{-1}. Na kojem dijelu domene je funkcija f konveksna, a na kojem je konkavna?



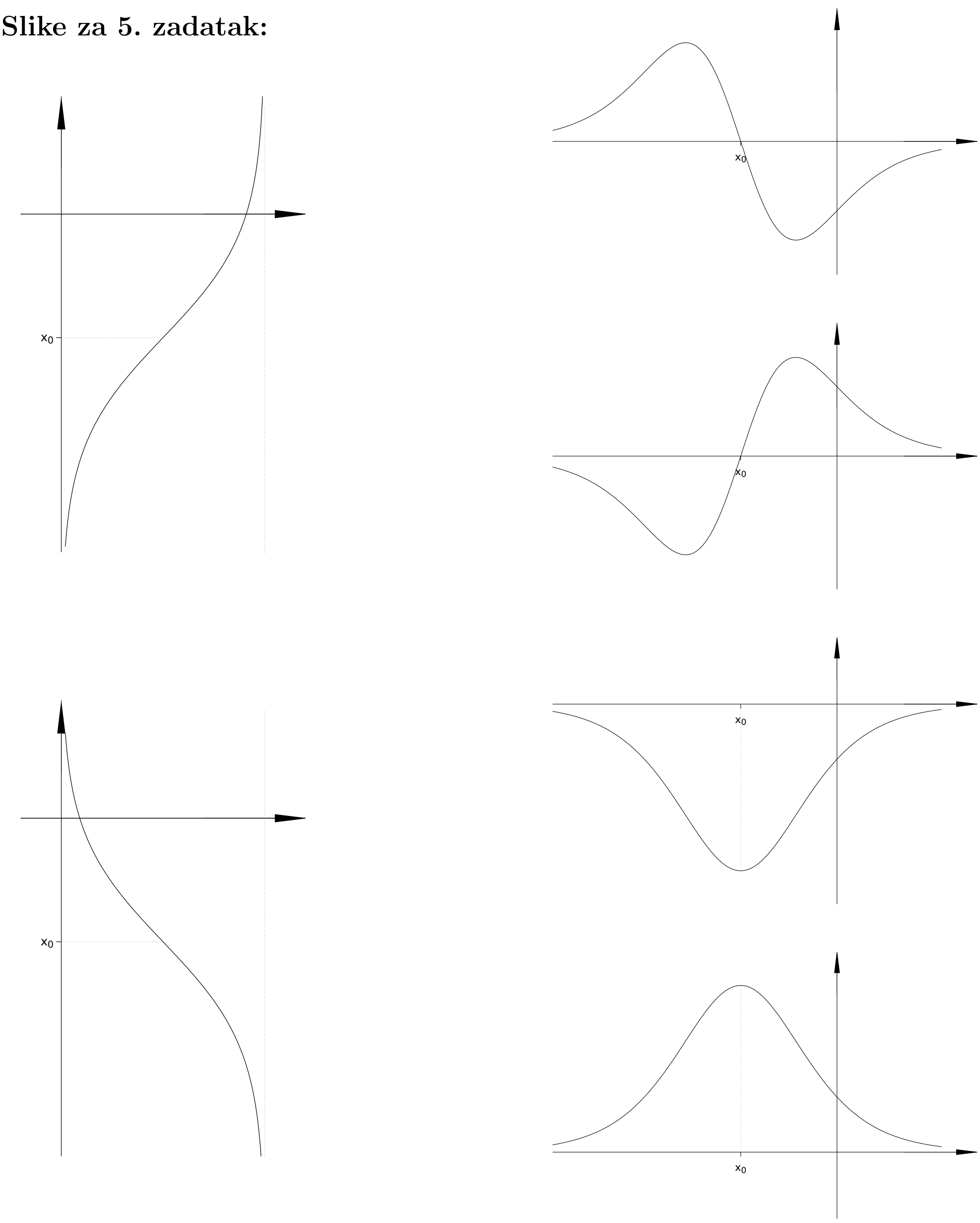
6. (5 bodova) Definirajte neodređeni integral i izračunajte $\displaystyle\int 2^x \cdot \sin x \, \mathrm{d}x$.

7. (8 bodova) Materijalna čestica giba se po pravcu promjenjivom brzinom. U trenutku $t \geq 0$ brzina čestice je $v(t) = \dfrac{2t}{1+t^2}$.

(a) Izračunajte akceleraciju čestice u trenutku t. Za koje $t \geq 0$ čestica ubrzava, za koje usporava i koliko iznosi najveća brzina čestice?

(b) Izračunajte prosječnu brzinu čestice za $t \in [0, 3]$ i objasnite fizikalnu interpretaciju određenog integrala $\int_0^3 v(t)\mathrm{d}t$.

Slike za 5. zadatak:



Napomena. Ovaj papir predajte zajedno s papirima na kojima ste rješavali zadatke. Dozvoljeno je korištenje kalkulatora i formula dobivenih s testom.

1	2	3	4	5	6	7	Σ

Ime i prezime: ______________________________

Prvi kolokvij, 29.4.2022.

1. **(4 boda)** Veličinu populacije bakterija modeliramo nizom (B_n) zadanim Beverton-Holtovom rekurzijom $B_{n+1} = \dfrac{237B_n}{65 + B_n}$. Izračunajte limes niza i objasnite što se dugoročno događa s ovom populacijom bakterija.

2. **(4 boda)** Odredite prirodno područje definicije funkcije $f(x) = \dfrac{\sqrt{9 - x^2}}{1 - \ln(2 - x)}$.

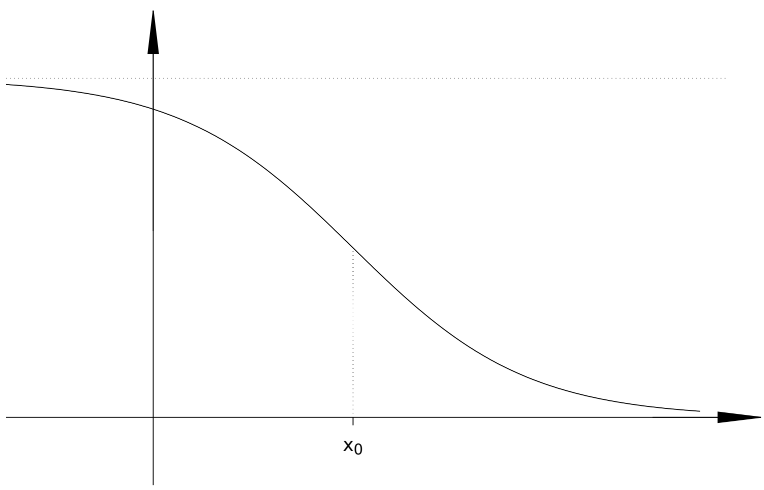
3. **(4 boda)** Za funkciju $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ precizno definirajte što znači:

(a) f je strogo rastuća, (b) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 23$.

Navedite primjer funkcije koja ima ta dva svojstva i skicirajte njezin graf.

4. **(6 bodova)** Definirajte derivaciju funkcije u točki. Neka su funkcije f i g derivabilne u točki x. Dokažite da je tada funkcija $f \cdot g$ derivabilna u točki x i vrijedi $(f \cdot g)'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$.

5. **(4 boda)** Na slici dolje prikazan je graf funkcije $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Označite na stražnjoj strani papira grafove funkcija f', f'' i f^{-1}. Na kojem dijelu domene je funkcija f konveksna, a na kojem je konkavna?



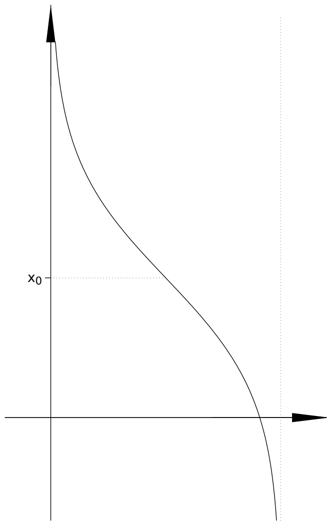
6. **(5 bodova)** Definirajte neodređeni integral i izračunajte $\displaystyle\int 3^x \cdot \cos x \; \mathrm{d}x$.

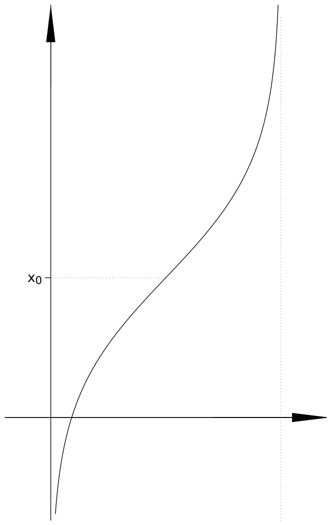
7. (8 bodova) Materijalna čestica giba se po pravcu promjenjivom brzinom. U trenutku $t \geq 0$ brzina čestice je $v(t) = t\,e^{(1-t^2)/2}$.

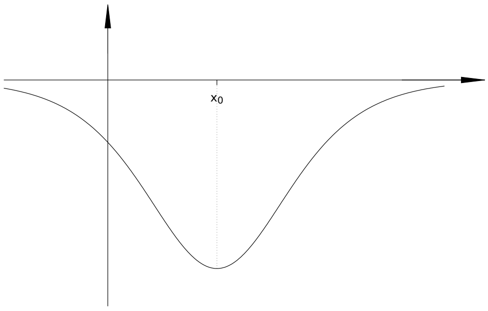
(a) Izračunajte akceleraciju čestice u trenutku t. Za koje $t \geq 0$ čestica ubrzava, za koje usporava i koliko iznosi najveća brzina čestice?

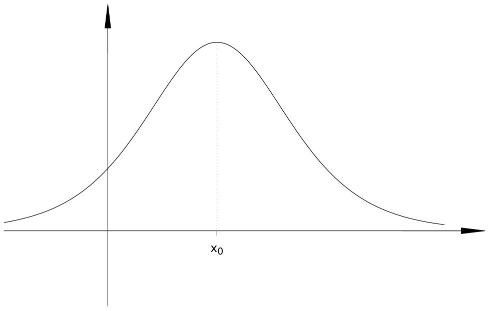
(b) Izračunajte prosječnu brzinu čestice za $t \in [0, 3]$ i objasnite fizikalnu interpretaciju određenog integrala $\int_0^3 v(t)\mathrm{d}t$.

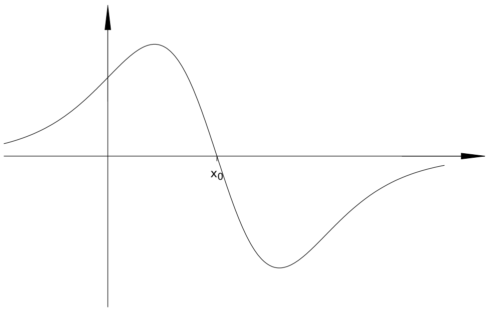
Slike za 5. zadatak:

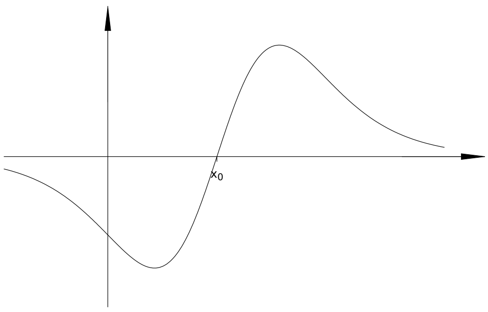












Napomena. Ovaj papir predajte zajedno s papirima na kojima ste rješavali zadatke. Dozvoljeno je korištenje kalkulatora i formula dobivenih s testom.

Tablica derivacija

$f(x)$	$f'(x)$
C	0
x^n	$n\,x^{n-1}$
a^x	$a^x \ln a$
$\log_a x$	$\frac{1}{x \ln a}$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\operatorname{arctg} x$	$\frac{1}{1+x^2}$

Pravila deriviranja

$$(C \cdot f(x))' = C \cdot f'(x)$$

$$(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x)$$

$$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2}$$

$$f(g(x))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

Tablica integrala

$f(x)$	$\int f(x)\mathrm{d}x$
$x^n,\ n \neq -1$	$\frac{x^{n+1}}{n+1} + C$
$\frac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert + C$
a^x	$\frac{a^x}{\ln a} + C$
$\sin x$	$-\cos x + C$
$\cos x$	$\sin x + C$
$\frac{1}{\sin^2 x}$	$-\operatorname{ctg} x + C$
$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\operatorname{tg} x + C$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\operatorname{arctg} x + C$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x + C$

Pravila integriranja

$$\int (C \cdot f(x))\,\mathrm{d}x = C \cdot \int f(x)\mathrm{d}x$$

$$\int (f(x) \pm g(x))\,\mathrm{d}x = \int f(x)\mathrm{d}x \pm \int g(x)\mathrm{d}x$$

$$\int f(g(x))g'(x)\mathrm{d}x = \left[\begin{array}{c} t = g(x) \\ \mathrm{d}t = g'(x)\mathrm{d}x \end{array}\right] =$$

$$= \int f(t)\mathrm{d}t = F(t) + C = F(g(x)) + C$$

$$\int u(x)v'(x)\mathrm{d}x = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)\mathrm{d}x$$