

1	2	3	4	5	6	7	Σ

Ime i prezime: _____

Prvi kolokvij, 28.4.2021.

1. **(4 boda)** Neka je $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ funkcija. Precizno definirajte neprekidnost funkcije f u točki $x_0 \in [a, b]$. Definirajte neprekidnost funkcije f na segmentu $[a, b]$ i iskažite Bolzanov teorem.
2. **(4 boda)** Neka je $I \subseteq \mathbb{R}$ otvoreni interval, $x_0 \in I$ i $f : I \setminus \{x_0\} \rightarrow \mathbb{R}$ funkcija. Precizno definirajte limes $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$. Za $x_0 = 3$ navedite primjer jedne funkcije koja ima to svojstvo i skicirajte njezin graf.
3. **(5 bodova)** Definirajte derivaciju funkcije u točki. Izračunajte derivaciju funkcije $f(x) = \ln(x^2) \cdot \cos^2(x)$ i odredite jednadžbu tangente na graf te funkcije u točki $x = \pi$.
4. **(2+2+3+1 bodova)** Neka je $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{2^x}{2^x + 4}$.
 - (a) Odredite horizontalne asimptote na graf te funkcije.
 - (b) Izračunajte $f'(x)$ i odredite područja rasta, područja pada i točke lokalnog ekstrema, ako postoje.
 - (c) Izračunajte $f''(x)$ i odredite područja konveksnosti, područja konkavnosti i točke infleksije.
 - (d) Skicirajte graf funkcije $f(x)$.
5. **(6 bodova)** Neka je funkcija $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ neprekidna. Za funkciju $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ definiranu pravilom $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ dokažite da vrijedi $F'(x) = f(x)$, $\forall x \in \langle a, b \rangle$.
6. **(4 boda)** Izračunajte neodređeni integral $\int \frac{dx}{(1+x^2) \arctg x}$.
7. **(4 boda)** Izračunajte određeni integral $\int_1^e \ln(x) dx$. Skicirajte dio ravnine kojemu je taj integral površina.

Napomena. Ovaj papir predajte zajedno s papirima na kojima ste rješavali zadatke. Dozvoljeno je korištenje kalkulatora i formula na stražnjoj strani papira.

Tablica derivacija

$f(x)$	$f'(x)$
C	0
x^n	$n x^{n-1}$
a^x	$a^x \ln a$
$\log_a x$	$\frac{1}{x \ln a}$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arctg x$	$\frac{1}{1+x^2}$

Pravila deriviranja

$$(C \cdot f(x))' = C \cdot f'(x)$$

$$(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x)$$

$$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2}$$

$$f(g(x))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

Tablica integrala

$f(x)$	$\int f(x)dx$
$x^n, n \neq -1$	$\frac{x^{n+1}}{n+1} + C$
$\frac{1}{x}$	$\ln x + C$
a^x	$\frac{a^x}{\ln a} + C$
$\sin x$	$-\cos x + C$
$\cos x$	$\sin x + C$
$\frac{1}{\sin^2 x}$	$-\operatorname{ctg} x + C$
$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\operatorname{tg} x + C$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\arctg x + C$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x + C$

Pravila integriranja

$$\int (C \cdot f(x)) dx = C \cdot \int f(x) dx$$

$$\int (f(x) \pm g(x)) dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx$$

$$\int f(g(x))g'(x) dx = \left[\begin{array}{l} t = g(x) \\ dt = g'(x) dx \end{array} \right] =$$

$$= \int f(t) dt = F(t) + C = F(g(x)) + C$$

$$\int u(x)v'(x) dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x) dx$$