Prvi kolokvij, 17.4.2020.

1. (3 boda) Za niz realnih brojeva (x_n) precizno definirajte što znači da je strogo rastući i konvergentan s limesom $L = 17$. Navedite primjer nekog niza koji ima oba svojstva.

2. (3 boda) Dokažite da funkcija $f(x) = x^3 + 2^x$ ima nultočku u intervalu $\langle -1, 0\rangle$. Napišite teorem iz kojeg to slijedi i provjerite sve njegove pretpostavke! Navedite teoreme iz skripte prema kojima funkcija f ima odgovarajuće svojstvo.

3. (3 boda) Metodom raspolavljanja odredite aproksimaciju nultočke iz prethodnog zadatka na dvije decimale. Možete koristiti Maximu (napravite "screen capture" ili slikajte ekran).

4. (3 boda) Za funkciju $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ precizno definirajte što znači $\lim\limits_{x\to 2+} f(x) = 0$ i $\lim\limits_{x\to 2-} f(x) = 1$. Skicirajte graf neke funkcije koja ima oba svojstva.

5. (4 boda) Izračunajte $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x^3 \sin x}{(1-\cos x)^2}$. Možete koristiti L'Hospitalovo pravilo.

6. (3 boda) Definirajte derivaciju funkcije $f : I \to \mathbb{R}$ u točki $x \in I$, pri čemu je $I \subseteq \mathbb{R}$ otvoreni interval. Opišite kako problem trenutne brzine vodi do pojma derivacije.

7. (5 bodova) Odredite prirodnu domenu funkcije $f(x) = \sqrt{\ln(4 - x^2)}$ i jednadžbu tangente na graf te funkcije u točki $x_0 = 1$.

8. (3 boda) Definirajte što znači da je funkcija konveksna. Opišite geometrijska svojstva grafa konveksne funkcije. Navedite primjer funkcije koja je konveksna na cijeloj svojoj domeni.

9. (8 bodova) Jedna od funkcija sa sigmoidalnim grafom je tzv. Morgan–Mercer–Flodinova funkcija $f(s) = \dfrac{as^b}{1+s^b}$, pri čemu su $a > 0$ i $b > 1$ konstante. Vrijednost $f(s)$ predstavlja zasićenost organizma određenim nutrijentom u ovisnosti o koncentraciji $s \geq 0$ tog nutrijenta u hrani (domena funkcije je $[0, +\infty\rangle$).

(a) Dokažite da je Morgan–Mercer–Flodinova funkcija f strogo rastuća.

(b) Odredite $f(0)$ i $\lim\limits_{s\to+\infty} f(s)$.

(c) Odredite područja konveksnosti, konkavnosti i točku infleksije.

(d) Dokažite da je slika te funkcije skup $[0, a\rangle$. Napišite teoreme i svojstva funkcije iz kojih to slijedi!

Napomena. Zadatke rješavajte na papiru. Skenirajte ili slikajte rješenja, uključujući sve pomoćne račune i obrazloženja, te uploadajte na e-kolegij pod "Prvi kolokvij".

Vedran Krčadinac

PRVI KOLOKVIJ, 17.4.2020.

1. Niz (x_n) je strogo rastući ako vrijedi $x_n < x_{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$

Niz (x_n) je konvergentan s limesom $L=17$ ako vrijedi:

$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})\ n \geq n_0 \Rightarrow |x_n - 17| < \varepsilon$

Primjer takvog niza: $x_n = 17 - \frac{1}{n}$.

2. Bolzanov teorem: ako je funkcija $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ neprekidna i zadovoljava $f(a) \cdot f(b) < 0$ (tj. u rubovima poprima vrijednosti suprotnog predznaka), onda postoji $c \in \langle a, b \rangle$ takav da je $f(c)=0$.

Kubna funkcija $x \mapsto x^3$ i eksponencijalna funkcija $x \mapsto 2^x$ su neprekidne na $\mathbb{R}$, pa je po teoremu 2.15 iz skripte i funkcija $f(x) = x^3 + 2^x$ neprekidna na $\mathbb{R}$ (posebno i na $[-1,0]$).

Vrijedi $f(-1) = -1 + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$ i $f(0) = 1$.

Vidimo da f zadovoljava pretpostavke Bolzanovog teorema na segmentu $[-1,0]$, pa postoji $c \in \langle -1, 0 \rangle$ takav da je $f(c) = 0$.

3. $a_0 = -1$, $b_0 = 0$ $\quad x = \frac{a_0 + b_0}{2} = -0.5 \quad f(x) > 0$

$a_1 = -1$, $b_1 = -0.5 \quad x = -0.75 \quad f(x) > 0$

$a_2 = -1$, $b_2 = -0.75 \quad x = -0.875 \quad f(x) < 0$

$a_3 = -0.875$, $b_3 = -0.75 \quad x = -0.8125 \quad f(x) > 0$

$a_4 = -0.875 \quad b_4 = -0.8125 \quad x = -0.84375 \quad f(x) < 0$

$a_5 = -0.84375 \quad b_5 = -0.8125 \quad x = -0.828125 \quad f(x) < 0$

$a_6 = -0.828125 \quad b_6 = -0.8125 \quad x = -0.8203125 \quad f(x) > 0$

$a_7 = -0.828125 \quad b_7 = -0.8203125 \quad x = -0.82421875 \quad f(x) > 0$

$a_8 = -0.828125 \quad b_8 = -0.82421875 \quad x = -0.826171875 \quad f(x) > 0$

$a_9 = -0.828125 \quad b_9 = -0.826171875 \Rightarrow \underline{c \approx -0.83}$

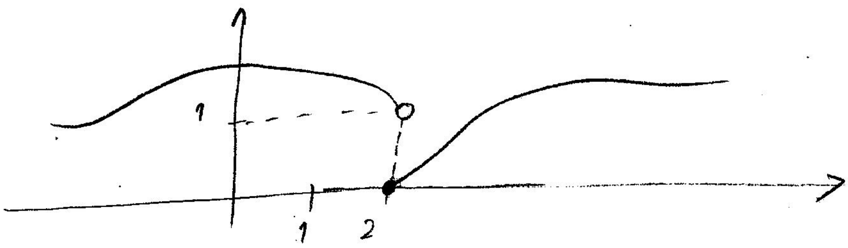
4.) Neka je $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Tvrdnja $\lim\limits_{x \to 2+} f(x) = 0$ znači:

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in \mathbb{R}) \quad 0 < x - 2 < \delta \Rightarrow |f(x)| < \varepsilon$$

Tvrdnja $\lim\limits_{x \to 2-} f(x) = 1$ znači:

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in \mathbb{R}) \quad -\delta < x - 2 < 0 \Rightarrow |f(x) - 1| < \varepsilon$$

Graf funkcije koja zadovoljava obje tvrdnje:



5.) $$\lim_{x \to 0} \frac{x^3 \sin x}{(1 - \cos x)^2} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x \to 0} \frac{3x^2 \sin x + x^3 \cos x}{2(1 - \cos x) \cdot \sin x} = \left(\frac{0}{0}\right) =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{6x \sin x + 3x^2 \cos x + 3x^2 \cos x + x^3(-\sin x)}{2\sin^2 x + 2(1 - \cos x)\cos x} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{6x \sin x + 6x^2 \cos x - x^3 \sin x}{2\sin^2 x + 2\cos x - 2\cos^2 x} = \left(\frac{0}{0}\right) =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{6\sin x + 6x \cos x + 12x \cos x + 6x^2(-\sin x) - 3x^2 \sin x - x^3 \cos x}{4 \sin x \cdot \cos x - 2\sin x - 4\cos x(-\sin x)} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{6\sin x + 18x\cos x - 9x^2\sin x - x^3\cos x}{8\sin x\cos x - 2\sin x} = \left(\frac{0}{0}\right) =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{6\cos x + 18\cos x - 18x(-\sin x) - 18x\sin x - 9x^2\cos x - 3x^2\cos x - x^3(-\sin x)}{8\cos^2 x - 8\sin^2 x - 2\cos x}$$

$$= \frac{24}{8-2} = \frac{24}{6} = \underline{\underline{4}}$$

6. Derivacija funkcije $f: I \to \mathbb{R}$ u točki $x \in I$ je limes

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \quad \text{(ako postoji)}$$

Neka $x(t)$ predstavlja položaj materijalne točke koja se giba po pravcu u trenutku t. Gibanje je opisano funkcijom $x: I \to \mathbb{R}$. Prosječna brzina od trenutka t do trenutka $t+h$ dana je izrazom $\frac{x(t+h) - x(t)}{h}$ (prijeđeni put kroz proteklo vrijeme). Trenutnu brzinu dobivamo kada $h \to 0$, a to je limes

$$\lim_{h\to 0} \frac{x(t+h) - x(t)}{h} = x'(t) \quad \text{(tj. derivacija funkcije } x \text{ u } t\text{).}$$

(7.) Prirodna domena od $f(x) = \sqrt{\ln(4-x^2)}$:

1.) $4-x^2 > 0 \iff x^2 < 4 \iff x \in \langle -2, 2 \rangle$

2.) $\ln(4-x^2) \geq 0 \iff 4-x^2 \geq 1 \iff x^2 \leq 3 \iff x \in [-\sqrt{3}, \sqrt{3}]$

$\mathcal{D}(f) = [-\sqrt{3}, \sqrt{3}]$

Tangenta u $x_0 = 1$:

$f(1) = \sqrt{\ln 3}$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{\ln(4-x^2)}} \cdot \frac{1}{4-x^2} \cdot (-2x)$$

$$f'(1) = \frac{1}{\cancel{2}\sqrt{\ln 3}} \cdot \frac{-\cancel{2}}{3} = \frac{-1}{3\sqrt{\ln 3}}$$

$$y = \frac{-1}{3\sqrt{\ln 3}}(x-1) + \sqrt{\ln 3}$$

(8.) Derivabilna funkcija $f: I \to \mathbb{R}$ je konveksna ako je njezina derivacija rastuća funkcija. Graf konveksne funkcije je „svinut prema gore", nalazi se ispod bilo koje sekante (dužine koja spaja dvije točke na grafu) i iznad bilo koje tangente. Primjer konveksne funkcije: $f(x) = x^2$.

(9.) (a) $$f'(s) = \left(\frac{as^b}{1+s^b}\right)' = a\cdot\frac{bs^{b-1}(1+s^b) - s^b\cdot bs^{b-1}}{(1+s^b)^2} =$$

$$= a\cdot\frac{bs^{b-1} + \cancel{b\cdot s^{2b-1}} - \cancel{b\cdot s^{2b-1}}}{(1+s^b)^2} = ab\cdot\frac{s^{b-1}}{(1+s^b)^2}$$

Vidimo da je $f'(s) > 0$ za sve $s \geq 0$, što znači da je f strogo rastuća funkcija.

(b) $$f(0) = 0, \quad \lim_{s\to+\infty}\frac{as^b}{1+s^b} = a\lim_{s\to+\infty}\frac{s^b}{1+s^b}\cdot\frac{\frac{1}{s^b}}{\frac{1}{s^b}} =$$

$$= a\cdot\lim_{s\to+\infty}\frac{1}{\underbrace{\frac{1}{s^b}}_{\to 0}+1} = a$$

(c) $$f''(s) = ab\left(\frac{s^{b-1}}{(1+s^b)^2}\right)' = ab\cdot\frac{(b-1)s^{b-2}(1+s^b)^{\cancel{2}} - s^{b-1}\cdot 2\cancel{(1+s^b)}\cdot bs^{b-1}}{(1+s^b)^{\cancel{4}\,3}} =$$

$$= ab\cdot s^{b-2}\cdot\frac{(b-1)(1+s^b) - 2bs^b}{(1+s^b)^3} = ab\cdot s^{b-2}\cdot\frac{b-1+s^b(b-1-2b)}{(1+s^b)^3} =$$

$$= ab\cdot s^{b-2}\frac{[b-1-s^b(b+1)]}{(1+s^b)^3} = 0 \iff s^b = \frac{b-1}{b+1} \iff s_0 = \left(\frac{b-1}{b+1}\right)^{\frac{1}{b}}$$

Predznak od $f''(s)$ ovisi o izrazu u uglatoj zagradi

$f''(s) > 0$ za $s < s_0$ $\Rightarrow$ f je konveksna na $[0, s_0\rangle$

$f''(s) < 0$ za $s > s_0$ $\Rightarrow$ f je konkavna na $\langle s_0, +\infty\rangle$

s_0 je točka infleksije

(d) Zbog strogog rasta i $f(0)=0$ slijedi $f(s)\geq 0, \forall s\geq 0$

Zbog strogog rasta i $\lim_{s\to+\infty} f(s)=a$ slijedi $f(s)<a, \forall s\geq 0$

Dakle, $\operatorname{Im} f = f([0,+\infty\rangle) \subseteq [0,a\rangle$.

Obrnuta inkluzija slijedi iz neprekidnosti funkcije f i Bolzanova teorema, tj. korolara 2.20 iz skripte.

Neka je $y\in\langle 0,a\rangle$ bilo koji element. Treba pokazati da postoji $c\in[0,+\infty\rangle$ takav da je $f(c)=y$.

Zbog $y<a$ i $\lim_{x\to+\infty} f(x)=a$ postoji $x\in[0,+\infty\rangle$ t.d. je $f(x)>y$:

Uzmemo $\varepsilon = a-y>0$. Po definiciji limesa, postoji $M>0$ t.d. za sve $x\in[0,+\infty\rangle$ vrijedi $x>M \Rightarrow |f(x)-a|<\varepsilon$

$\Rightarrow \cancel{a}-f(x) < \cancel{a}-y \Rightarrow f(x)>y$.

Sada promatramo funkciju f na segmentu $[0,x]$.

Broj y je između vrijednosti funkcije u rubovima:

$f(0)=0<y<f(x)$. Po korolaru 2.20, postoji $c\in\langle 0,x\rangle$ t.d. je $f(c)=y$.

Dakle, vrijedi i inkluzija $[0,a\rangle \subseteq f([0,+\infty\rangle) = \operatorname{Im} f$

Time smo dokazali da je $\operatorname{Im} f = [0,+\infty\rangle$.

Prvi kolokvij, 17.4.2020.

1. **(3 boda)** Za niz realnih brojeva (x_n) precizno definirajte što znači da je strogo padajući i konvergentan s limesom $L = 19$. Navedite primjer nekog niza koji ima oba svojstva.

2. **(3 boda)** Dokažite da funkcija $f(x) = x^3 + \log_2 x$ ima nultočku u intervalu $\langle \frac{1}{2}, 1\rangle$. Napišite teorem iz kojeg to slijedi i provjerite sve njegove pretpostavke! Navedite teoreme iz skripte prema kojima funkcija f ima odgovarajuće svojstvo.

3. **(3 boda)** Metodom raspolavljanja odredite aproksimaciju nultočke iz prethodnog zadatka na dvije decimale. Možete koristiti Maximu (napravite "screen capture" ili slikajte ekran).

4. **(3 boda)** Za funkciju $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ precizno definirajte što znači $\lim\limits_{x\to 3+} f(x) = -\infty$ i $\lim\limits_{x\to 3-} f(x) = +\infty$. Skicirajte graf neke funkcije koja ima oba svojstva.

5. **(4 boda)** Izračunajte $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2 \sin x}{x - \sin x}$. Možete koristiti L'Hospitalovo pravilo.

6. **(3 boda)** Definirajte derivaciju funkcije $f : I \to \mathbb{R}$ u točki $x \in I$, pri čemu je $I \subseteq \mathbb{R}$ otvoreni interval. Opišite kako problem trenutne brzine vodi do pojma derivacije.

7. **(5 bodova)** Odredite prirodnu domenu funkcije $f(x) = \dfrac{1}{\ln(2-x)}$ i jednadžbu tangente na graf te funkcije u točki $x_0 = 0$.

8. **(3 boda)** Definirajte što znači da je funkcija konkavna. Opišite geometrijska svojstva grafa konkavne funkcije. Navedite primjer funkcije koja je konkavna na cijeloj svojoj domeni.

9. **(8 bodova)** Jedna od funkcija sa sigmoidalnim grafom je drugi oblik Levakovićeve funkcije $f(t) = a \cdot \left(\dfrac{t^2}{1+t^2}\right)^b$, pri čemu su $a > 0$ i $b > \frac{1}{2}$ konstante. Vrijednost $f(t)$ predstavlja visinu stabla u trenutku $t \geq 0$ (domena je $[0, +\infty\rangle$).

   (a) Dokažite da je Levakovićeva funkcija f strogo rastuća.

   (b) Odredite $f(0)$ i $\lim\limits_{t\to +\infty} f(t)$.

   (c) Odredite područja konveksnosti, konkavnosti i točku infleksije.

   (d) Dokažite da je slika te funkcije skup $[0, a\rangle$. Napišite teoreme i svojstva funkcije iz kojih to slijedi!

Napomena. Zadatke rješavajte na papiru. Skenirajte ili slikajte rješenja, uključujući sve pomoćne račune i obrazloženja, te uploadajte na e-kolegij pod "Prvi kolokvij".

Vedran Krčadinac

PRVI KOLOKVIJ, 17. 4. 2020.

(2.) $f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{8} - 1 = \frac{-7}{8} < 0, \quad f(1) = 1 > 0$

(3.) $a_0 = \frac{1}{2} \quad b_0 = 1 \quad x = \frac{a_0 + b_0}{2} = \frac{3}{4} = 0.75 \quad f(x) > 0$

$a_1 = 0.5 \quad b_1 = 0.75 \quad x = 0.625 \quad f(x) < 0$

$a_2 = 0.625 \quad b_2 = 0.75 \quad x = 0.6875 \quad f(x) < 0$

$a_3 = 0.6875 \quad b_3 = 0.75 \quad x = 0.71875 \quad f(x) < 0$

$a_4 = 0.71875 \quad b_4 = 0.75 \quad x = 0.734375 \quad f(x) < 0$

$a_5 = 0.734375 \quad b_5 = 0.75 \quad x = 0.7421875 \quad f(x) < 0$

$a_6 = 0.7421875 \quad b_6 = 0.75 \quad x = 0.74609375 \quad f(x) < 0$

$a_7 = 0.74609375 \quad b_7 = 0.75$

$c \approx 0.75$

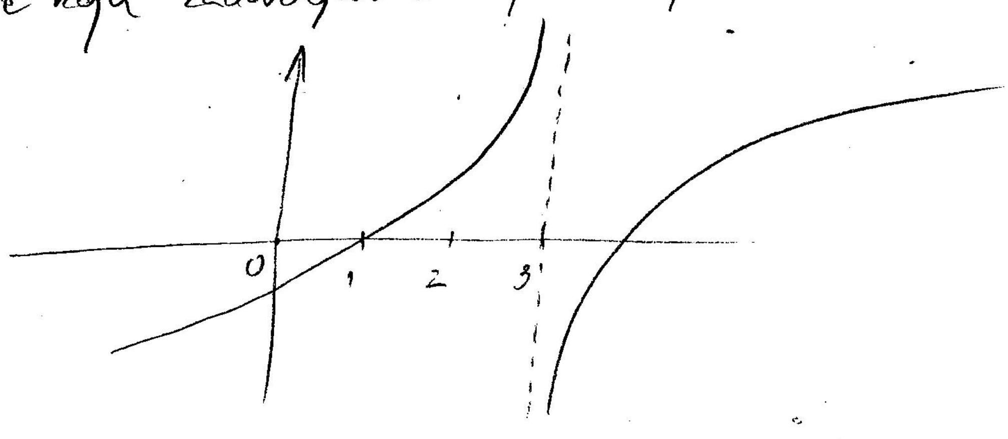
(4.) Neka je $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Tvrdnja $\lim_{x \to 3+} f(x) = -\infty$ znači:

$(\forall M > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in \mathbb{R}) \quad 0 < x - 3 < \delta \Rightarrow f(x) < -M$

Tvrdnja $\lim_{x \to 3-} f(x) = +\infty$ znači:

$(\forall M > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in \mathbb{R}) \quad -\delta < x - 3 < 0 \Rightarrow f(x) > M$

Graf funkcije koja zadovoljava obje tvrdnje:



5.

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2 \sin x}{x - \sin x} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{2x \sin x + x^2 \cos x}{1-\cos x} = \left(\frac{0}{0}\right) =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{2\sin x + 2x\cos x + 2x\cos x + x^2(-\sin x)}{\sin x} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{2\sin x + 4x\cos x - x^2 \sin x}{\sin x} = \left(\frac{0}{0}\right) =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{2\cos x + 4\cos x + 4x(-\sin x) - 2x\sin x - x^2\cos x}{\cos x} = \underline{\underline{6}}$$

7. Prirodna domena od $f(x) = \frac{1}{\ln(2-x)}$:

1.) $2-x > 0 \iff x < 2$

2.) $\ln(2-x) \neq 0 \iff 2-x \neq 1 \iff x \neq 1$

$D(f) = \langle -\infty, 2\rangle \setminus \{1\} = \langle -\infty, 1\rangle \cup \langle 1, 2\rangle$

Tangenta u $x_0 = 0$:

$$f'(x) = \frac{-1}{\ln^2(2-x)} \cdot \frac{1}{2-x} \cdot (-1) = \frac{1}{(2-x)\ln^2(2-x)}$$

$$f(0) = \frac{1}{\ln 2} \qquad f'(0) = \frac{1}{2\ln^2 2} = \frac{1}{2(\ln 2)^2}$$

$$\underline{\underline{y = \frac{1}{2(\ln 2)^2} \cdot x + \frac{1}{\ln 2}}}$$

8. Derivabilna funkcija $f: I \to \mathbb{R}$ je konkavna ako je njezina derivacija padajuća funkcija. Graf konkavne funkcije je „svinut prema dolje", nalazi se iznad bilo koje sekante (dužine koja spaja bilo koje dvije točke na grafu) i ispod bilo koje tangente. Primjer konkavne funkcije: $f(x) = -x^2$.

9. (a) $$f'(t) = \left(a\left(\frac{t^2}{1+t^2}\right)^b\right)' = ab \cdot \left(\frac{t^2}{1+t^2}\right)^{b-1} \cdot \frac{2t(1+\cancel{t^2}) - \cancel{t^2 2t}}{(1+t^2)^2} =$$

$$= 2ab \cdot \frac{t^{2b-1}}{(1+t^2)^{b+1}} > 0 \text{ za sve } t \geq 0 \Rightarrow f \text{ je strogo rastuća}$$

(b) $$f(0) = 0, \quad \lim_{t\to+\infty} a \cdot \left(\frac{t^2}{1+t^2}\right)^b = a \cdot \left(\lim_{t\to+\infty} \frac{t^2}{1+t^2} \cdot \frac{\frac{1}{t^2}}{\frac{1}{t^2}}\right)^b =$$

$$= a \cdot \left(\lim_{t\to+\infty} \frac{1}{\underbrace{\frac{1}{t^2}}_{\to 0} + 1}\right)^b = a \cdot 1^b = a$$

(c) $$f''(t) = 2ab\, \frac{(2b-1)t^{2b-2} \cdot (1+t^2)^{\cancel{b+1}} - t^{2b-1} \cdot (b+1)\cancel{(1+t^2)}^{b} \cdot 2t}{(1+t^2)^{\cancel{2b+2}\ b+2}} =$$

$$= 2ab\, \frac{t^{2b-2} \cdot [(2b-1)(1+t^2) - (2b+2)t^2]}{(1+t^2)^{b+2}} = 2ab \cdot \frac{t^{2b-2}[2b-1-3t^2]}{(1+t^2)^{b+2}} = 0$$

$$\Leftrightarrow t^2 = \frac{2b-1}{3} \Leftrightarrow t_0 = \sqrt{\frac{2b-1}{3}}.$$

Za $t < t_0$ je $f''(t) > 0 \Rightarrow f$ je konveksna na $[0, t_0\rangle$

Za $t > t_0$ je $f''(t) < 0 \Rightarrow f$ je konkavna na $\langle t_0, +\infty\rangle$

t_0 je točka infleksije

Prvi kolokvij, 17.4.2020.

1. **(3 boda)** Za niz realnih brojeva (x_n) precizno definirajte što znači da je strogo rastući i konvergentan s limesom $L = 23$. Navedite primjer nekog niza koji ima oba svojstva.

2. **(3 boda)** Dokažite da funkcija $f(x) = 3^x - x^2$ ima nultočku u intervalu $\langle -1, 0\rangle$. Napišite teorem iz kojeg to slijedi i provjerite sve njegove pretpostavke! Navedite teoreme iz skripte prema kojima funkcija f ima odgovarajuće svojstvo.

3. **(3 boda)** Metodom raspolavljanja odredite aproksimaciju nultočke iz prethodnog zadatka na dvije decimale. Možete koristiti Maximu (napravite "screen capture" ili slikajte ekran).

4. **(3 boda)** Za funkciju $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ precizno definirajte što znači $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 2$ i $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$. Skicirajte graf neke funkcije koja ima oba svojstva.

5. **(4 boda)** Izračunajte $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(x+1)\sin x}{1-\cos x}$. Možete koristiti L'Hospitalovo pravilo.

6. **(3 boda)** Definirajte derivaciju funkcije $f : I \to \mathbb{R}$ u točki $x \in I$, pri čemu je $I \subseteq \mathbb{R}$ otvoreni interval. Opišite kako problem određivanja tangente vodi do pojma derivacije.

7. **(5 bodova)** Odredite prirodnu domenu funkcije $f(x) = \arcsin\left(\dfrac{1}{\ln x}\right)$ i jednadžbu tangente na graf te funkcije u točki $x_0 = e^2$.

8. **(3 boda)** Definirajte što znači da je funkcija konveksna. Opišite geometrijska svojstva grafa konveksne funkcije. Navedite primjer funkcije koja je konveksna na cijeloj svojoj domeni.

9. **(8 bodova)** Jedna od funkcija sa sigmoidalnim grafom je tzv. Korfova funkcija $f(t) = a \cdot e^{-bt^{-c}}$, pri čemu su $a > 0$, $b > 0$ i $c > 0$ konstante. Vrijednost $f(t)$ predstavlja promjer stabla u trenutku $t > 0$ (domena je $\langle 0, +\infty\rangle$).

   (a) Dokažite da je Korfova funkcija f strogo rastuća.

   (b) Odredite $\lim\limits_{t\to 0+} f(t)$ i $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t)$.

   (c) Odredite područja konveksnosti, konkavnosti i točku infleksije.

   (d) Dokažite da je slika te funkcije skup $\langle 0, a\rangle$. Napišite teoreme i svojstva funkcije iz kojih to slijedi!

Napomena. Zadatke rješavajte na papiru. Skenirajte ili slikajte rješenja, uključujući sve pomoćne račune i obrazloženja, te uploadajte na e-kolegij pod "Prvi kolokvij".

Vedran Krčadinac

PRVI KOLOKVIJ, 17. 4. 2020.

(2.) $f(-1) = 3^{-1} - (-1)^2 = \frac{1}{3} - 1 = -\frac{2}{3} < 0, \quad f(0) = 3^0 - 0^2 = 1$

(3.) $a_0 = -1, \ b_0 = 0 \qquad x = \frac{a_0 + b_0}{2} = -\frac{1}{2} = -0.5 \qquad f(x) > 0$

$a_1 = -1, \ b_1 = -0.5 \qquad x = -0.75 \qquad f(x) < 0$

$a_2 = -0.75 \ b_2 = -0.5 \qquad x = -0.625 \qquad f(x) > 0$

$a_3 = -0.75 \ b_3 = -0.625 \qquad x = -0.6875 \qquad f(x) < 0$

$a_4 = -0.6875 \ b_4 = -0.625 \qquad x = -0.65625 \qquad f(x) > 0$

$a_5 = -0.6875 \ b_5 = -0.65625 \qquad x = -0.671875 \qquad f(x) > 0$

$a_6 = -0.6875 \ b_6 = -0.671875 \qquad x = -0.6796875 \qquad f(x) > 0$

$a_7 = -0.6875 \ b_7 = -0.6796875 \qquad x = -0.68359375 \qquad f(x) > 0$

$a_8 = -0.6875 \ b_8 = -0.68359375 \qquad x = -0.685546875 \qquad f(x) > 0$

$a_9 = -0.6875 \ b_9 = -0.685546875$

$c \approx -0.69$

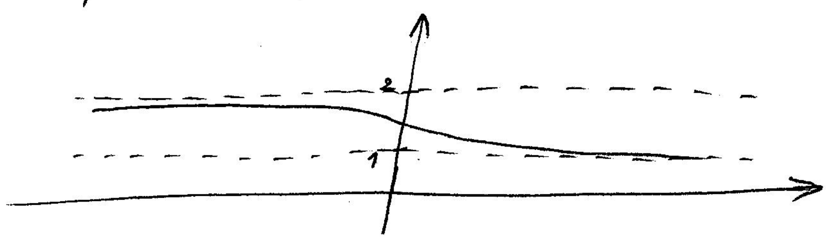
(4.) Neka je $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Tvrdnja $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 2$ znači:

$(\forall \varepsilon > 0)(\exists M > 0)(\forall x \in \mathbb{R}) \quad x < -M \Rightarrow |f(x) - 2| < \varepsilon$

Tvrdnja $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 1$ znači:

$(\forall \varepsilon > 0)(\exists M > 0)(\forall x \in \mathbb{R}) \quad x > M \Rightarrow |f(x) - 1| < \varepsilon$

Graf funkcije koja zadovoljava obje tvrdnje:



(5.) $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(x+1)\sin x}{1-\cos x} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{x+1}\sin x + \ln(x+1)\cos x}{\sin x} = \left(\frac{0}{0}\right) =$

$= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{-1}{(x+1)^2}\sin x + \frac{1}{x+1}\cos x + \frac{1}{x+1}\cdot\cos x + \ln(x+1)(-\sin x)}{\cos x} =$

$= \frac{1+1}{1} = \underline{\underline{2}}$

(6.) Derivacija funkcije $f: I \to \mathbb{R}$ u točki $x \in I$ je limes

$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ (ako postoji)

Tangenta na graf funkcije u točki x_0 ima jednadžbu oblika $y = a(x-x_0)+f(x_0)$. Da bismo odredili koeficijent smjera a prvo promotrimo koeficijent smjera sekante kroz točke $(x_0, f(x_0))$ i $(x_0+h, f(x_0+h))$: $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{(x_0+h)-x_0} = \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$

Kada $h\to 0$ druga točka se približava prvoj i sekanta prelazi u tangentu. Prema tome, koeficijent smjera tangente je $f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$

(7.) Prirodna domena od $f(x) = \arcsin\left(\frac{1}{\ln x}\right)$:

1.) $x > 0$ 2.) $\ln x \neq 0 \Rightarrow x \neq 1$

3.) $-1 \le \frac{1}{\ln x} \le 1$ Za $\ln x > 0$ (tj. $x>1$) lijeva nejednakost

vrijedi, a desna je ekvivalentna s $\ln x \geq 1 \iff x \geq e$.

Za $\ln x < 0$ (tj. $x<1$) desna nejednakost vrijedi, a lijeva je

ekvivalentna sa $\ln x \le -1 \iff x \le \frac{1}{e}$. Konačno rješenje:

$D(f) = \langle 0, \frac{1}{e}] \cup [e, +\infty\rangle$

Tangenta u $x_0 = e^2$:

$$f(x_0) = \arcsin\left(\frac{1}{\ln e^2}\right) = \arcsin\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{6}$$

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{1}{\ln x}\right)^2}} \cdot \frac{-1}{(\ln x)^2} \cdot \frac{1}{x} \Rightarrow f'(x_0) = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{4}}} \cdot \frac{-1}{4} \cdot \frac{1}{e^2} =$$

$$= \frac{\cancel{2}}{\sqrt{3}} \cdot \frac{-1}{\cancel{4}_{2}} \cdot \frac{1}{e^2} = \frac{-1}{2e^2\sqrt{3}}$$

$$y = \frac{-1}{2e^2\sqrt{3}}(x-e^2) + \frac{\pi}{6}$$

9.) (a) $f'(t) = \left(a \cdot e^{-bt^{-c}}\right)' = a \cdot e^{-bt^{-c}} \cdot \left(-b \cdot (-c)\, t^{-c-1}\right) =$

$$= abc\,\frac{e^{-bt^{-c}}}{t^{c+1}} = \frac{bc\,f(t)}{t^{c+1}} > 0 \text{ za sve } t>0$$

$\Rightarrow$ f je strogo rastuća

(b) $\lim_{t\to 0} f(t) = a\, e^{-b \lim_{t\to 0} \frac{1}{t^c}} = a \cdot e^{-\infty} = 0$

$\lim_{t\to +\infty} f(t) = a \cdot e^{-b \lim_{t\to+\infty} \frac{1}{t^c}} = a \cdot e^{0} = a$

(c) $f''(t) = bc \cdot \left(\frac{f(t)}{t^{c+1}}\right)' = bc \cdot \frac{f'(t)\, t^{c+1} - f(t)(c+1)t^c}{t^{2c+2}} =$

$= bc \cdot \frac{\frac{bc f(t)}{\cancel{t^{c+1}}} \cdot \cancel{t^{c+1}} - f(t)(c+1)t^c}{t^{2c+2}} =$

$= bc \cdot f(t) \cdot \frac{[bc - (c+1)t^c]}{t^{2c+2}} = 0 \iff$ $t^c = \frac{bc}{c+1}$

$t_0 = \left(\frac{bc}{c+1}\right)^{\frac{1}{c}}$

Za $t < t_0$ je $f''(t) > 0 \Rightarrow f$ je konveksna na $\langle 0, t_0 \rangle$

Za $t > t_0$ je $f''(t) < 0 \Rightarrow f$ je konkavna na $\langle t_0, +\infty \rangle$

t_0 je točka infleksije

Prvi kolokvij, 17.4.2020.

1. **(3 boda)** Za niz realnih brojeva (x_n) precizno definirajte što znači da je strogo padajući i konvergentan s limesom $L = 29$. Navedite primjer nekog niza koji ima oba svojstva.

2. **(3 boda)** Dokažite da funkcija $f(x) = x^2 + \log_4 x$ ima nultočku u intervalu $\langle \frac{1}{2}, 1\rangle$. Napišite teorem iz kojeg to slijedi i provjerite sve njegove pretpostavke! Navedite teoreme iz skripte prema kojima funkcija f ima odgovarajuće svojstvo.

3. **(3 boda)** Metodom raspolavljanja odredite aproksimaciju nultočke iz prethodnog zadatka na dvije decimale. Možete koristiti Maximu (napravite "screen capture" ili slikajte ekran).

4. **(3 boda)** Za funkciju $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ precizno definirajte što znači $\lim\limits_{x\to 7+} f(x) = 1$ i $\lim\limits_{x\to 7-} f(x) = 2$. Skicirajte graf neke funkcije koja ima oba svojstva.

5. **(4 boda)** Izračunajte $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x(1-\cos x)}{x - \sin x}$. Možete koristiti L'Hospitalovo pravilo.

6. **(3 boda)** Definirajte derivaciju funkcije $f : I \to \mathbb{R}$ u točki $x \in I$, pri čemu je $I \subseteq \mathbb{R}$ otvoreni interval. Opišite kako problem određivanja tangente vodi do pojma derivacije.

7. **(5 bodova)** Odredite prirodnu domenu funkcije $f(x) = \sqrt{\arcsin(1-x)}$ i jednadžbu tangente na graf te funkcije u točki $x_0 = \frac{1}{2}$.

8. **(3 boda)** Definirajte što znači da je funkcija konkavna. Opišite geometrijska svojstva grafa konkavne funkcije. Navedite primjer funkcije koja je konkavna na cijeloj svojoj domeni.

9. **(8 bodova)** Jedna od funkcija sa sigmoidalnim grafom je tzv. He–Legendreova funkcija $f(p) = \dfrac{a}{1+p^{-b}}$, pri čemu su $a > 0$ i $b > 1$ konstante. Vrijednost $f(p)$ predstavlja broj različitih biljnih ili životinjskih vrsta na određenom području u ovisnosti o površini tog područja $p > 0$ (domena je $\langle 0, +\infty\rangle$).

   (a) Dokažite da je He–Legendreova funkcija f strogo rastuća.

   (b) Odredite $\lim\limits_{p\to 0+} f(p)$ i $\lim\limits_{p\to +\infty} f(p)$.

   (c) Odredite područja konveksnosti, konkavnosti i točku infleksije.

   (d) Dokažite da je slika te funkcije skup $\langle 0, a\rangle$. Napišite teoreme i svojstva funkcije iz kojih to slijedi!

Napomena. Zadatke rješavajte na papiru. Skenirajte ili slikajte rješenja, uključujući sve pomoćne račune i obrazloženja, te uploadajte na e-kolegij pod "Prvi kolokvij".

Vedran Krčadinac

PRVI KOLOKVIJ, 17.4.2020.

(2.) $f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{4} + \log_4(\frac{1}{2}) = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{4} < 0$, $f(1) = 1 > 0$

(3.) $a_0 = \frac{1}{2}$ $b_0 = 1$ $x = \frac{a_0 + b_0}{2} = \frac{3}{4} = 0.75$ $f(x) > 0$

$a_1 = 0.5$ $b_1 = 0.625$ $x = 0.5625$ $f(x) < 0$

$a_2 = 0.5625$ $b_2 = 0.625$ $x = 0.59375$ $f(x) < 0$

$a_3 = 0.59375$ $b_3 = 0.625$ $x = 0.609375$ $f(x) > 0$

$a_4 = 0.59375$ $b_4 = 0.609375$ $x = 0.6015625$ $f(x) < 0.$

$a_5 = 0.6015625$ $b_5 = 0.609375$ $x = 0.60546875$ $f(x) > 0$

$a_6 = 0.6015625$ $b_6 = 0.60546875$ $x = 0.603515625$ $f(x) < 0$

$a_7 = 0.603515625$ $b_7 = 0.60546875$ $x = 0.6044921875$ $f(x) > 0$

$a_8 = 0.603515625$ $b_8 = 0.6044921875$

$c \simeq 0.60$

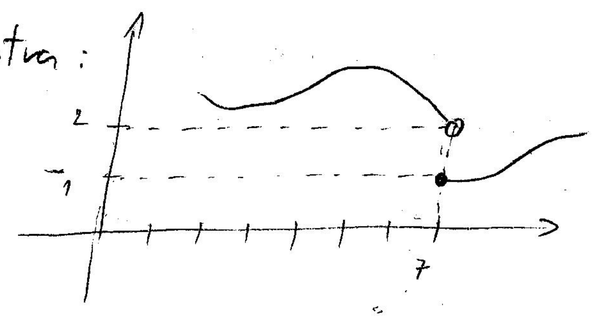
(4.) Neka je $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Tvrdnja $\lim_{x \to 7+} f(x) = 1$ znači:

$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in \mathbb{R})\ 0 < x - 7 < \delta \Rightarrow |f(x) - 1| < \varepsilon$

Tvrdnja $\lim_{x \to 7-} f(x) = 2$ znači:

$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in \mathbb{R})\ -\delta < x - 7 < 0 \Rightarrow |f(x) - 2| < \varepsilon$

Graf funkcije koja ima dva svojstva:



5.
$$\lim_{x\to 0} \frac{x(1-\cos x)}{x-\sin x} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x + x\sin x}{1-\cos x} = \left(\frac{0}{0}\right) =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\sin x + \sin x + x\cos x}{\sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{2\sin x + x\cos x}{\sin x} = \left(\frac{0}{0}\right) =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{2\cos x + \cos x + x\cdot(-\sin x)}{\cos x} = \frac{2+1}{1} = \underline{\underline{3}}$$

7. Prirodna domena od $f(x) = \sqrt{\arcsin(1-x)}$:

1.) $-1 \leq 1-x \leq 1 \iff -2 \leq -x \leq 0 \Rightarrow 2 \geq x \geq 0$

2.) $\arcsin(1-x) \geq 0 \iff 1-x \geq 0 \iff x \leq 1$

$D(f) = [0, 1]$

Tangenta u $x_0 = \frac{1}{2}$:

$f(\tfrac{1}{2}) = \sqrt{\arcsin(\tfrac{1}{2})} = \sqrt{\frac{\pi}{6}}$ $\qquad f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{\arcsin(1-x)}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-(1-x)^2}} \cdot (-1)$

$$f'(\tfrac{1}{2}) = \frac{1}{2\sqrt{\frac{\pi}{6}}} \cdot \frac{-1}{\sqrt{1-\frac{1}{4}}} = \frac{-1}{2\cdot\sqrt{\frac{3\pi}{24}}} = \frac{-1}{2\cdot\sqrt{\frac{\pi}{8}}} = \frac{-1}{2\cdot\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}} = -\sqrt{\frac{2}{\pi}}$$

$$\underline{\underline{y = -\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(x-\frac{1}{2}\right) + \sqrt{\frac{\pi}{6}}}}$$

9. (a) $f'(p) = \left(\frac{a}{1+p^{-b}}\right)' = a\cdot\frac{-1}{(1+p^{-b})^2}\cdot(-b)\cdot p^{-b-1} =$

$= \frac{ab}{(1+p^{-b})^2\cdot p^{b+1}} > 0$ za sve $t > 0 \Rightarrow f$ je strogo rastuća

(b) $\lim_{p\to 0+} f(p) = \dfrac{a}{1+\left(\lim_{p\to 0+}\frac{1}{p}\right)^b} = \dfrac{a}{+\infty} = 0$

$\lim_{p\to +\infty} f(p) = \dfrac{a}{1+\left(\lim_{p\to +\infty}\frac{1}{p}\right)^b} = \dfrac{a}{1+0} = a$

(c) $f''(p) = \dfrac{-ab}{(1+p^{-b})^{\cancel{4}\,3}\cdot p^{2b+2}} \cdot \left[2\cancel{(1+p^{-b})}\cdot(-b)\cancel{p^{-b-1}}\cdot \cancel{p^{b+1}} + (1+p^{-b})^{\cancel{2}}\cdot(b+1)p^b\right]$

$= \dfrac{-ab}{(1+p^{-b})^3\cdot p^{2b+2}}\cdot\left[-2b+(b+1)p^b+b+1\right] =$

$= \dfrac{ab}{(1+p^{-b})^3 p^{2b+2}}\left[b-1-(b+1)p^b\right] = 0 \iff$

$p^b = \dfrac{b-1}{b+1} \iff p_0 = \left(\dfrac{b-1}{b+1}\right)^{\frac{1}{b}}$

Za $p<p_0$ je $f''(p)>0 \Rightarrow f$ je konveksna na $\langle 0, p_0\rangle$

Za $p>p_0$ je $f''(p)<0 \Rightarrow f$ je konkavna na $\langle p_0, +\infty\rangle$

p_0 je točka infleksije