1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Σ

Ime i prezime: ____________________

Popravni kolokvij, 4.9.2019.

1. (7 bodova) Neka je $I \subseteq \mathbb{R}$ interval. Definirajte neprekidnost funkcije $f : I \to \mathbb{R}$ u točki $x_0 \in I$. Dokažite: ako su funkcije $f, g : I \to \mathbb{R}$ neprekidne u $x_0 \in I$, onda je i funkcija $f + g$ neprekidna u x_0.

2. (6 bodova) Krivulja u ravnini zadana je jednadžbom $y = \dfrac{e^x}{x^2 + \cos(\pi\, e^x)}$. Izračunajte jednadžbu tangente na tu krivulju u točki $(x_0, y_0) = (0, -1)$.

3. (8 bodova) Rast populacije bakterija opisan je Gompertzovom funkcijom

$$f(t) = 150e^{-5e^{-t/2}},$$

pri čemu je $f(t)$ broj bakterija u milijunima, a $t \in [0, +\infty\rangle$ je vrijeme u satima. Koliko ima bakterija u početnom trenutku $t = 0$? Na kojem broju bakterija se populacija dugoročno stabilizira? Odredite period u kojem populacija raste ubrzano, raste usporeno te trenutak kad prelazi iz ubrzanog u usporeni rast. Skicirajte graf funkcije $f(t)$ i povežite svojstva grafa (asimptote, područja konveksnosti i konkavnosti, točke infleksije) s pitanjima o populaciji bakterija.

4. (7 bodova) Definirajte neodređeni integral funkcije. Dokažite: ako za funkcije definirane na intervalu $I \subseteq \mathbb{R}$ vrijedi $f'(x) = g'(x)$, $\forall x \in I$, onda se f i g razlikuju za konstantu.

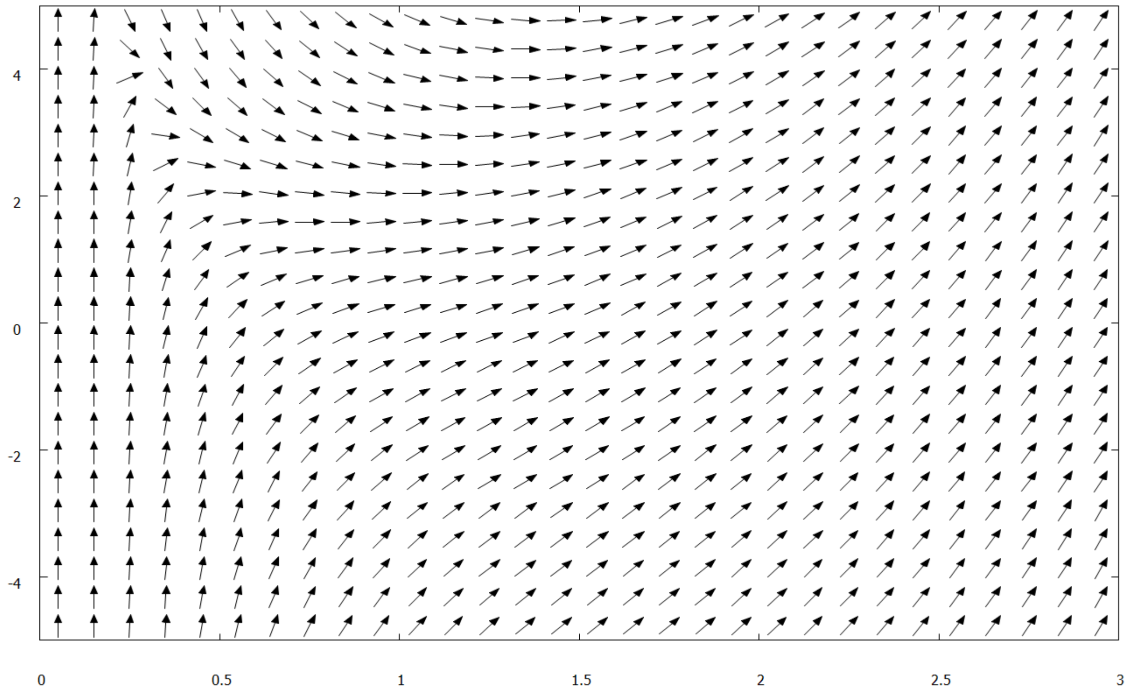
5. (5 bodova) Izračunajte integral $\displaystyle\int x^2 \cos x \, dx$.

6. (6 bodova) Funkcija $f(t) = 3 + \dfrac{5t}{\sqrt{t^2+1}}$ predstavlja koncentraciju glukoze u krvi u mmol/l, pri čemu je t vrijeme u satima. Izračunajte površinu ispod grafa funkcije $f(t)$ za $t \in [0, 3]$ i odredite prosječnu koncentraciju glukoze u krvi u prva 3 sata.

7. (7 bodova) Pod kojim uvjetom možemo množiti dvije matrice? Definirajte produkt takvih matrica i navedite svojstva operacije množenja matrica. Po kojim svojstvima se množenje matrica razlikuje od množenja brojeva?

8. (7 bodova) U vektorskom prostoru 2×2 matrica M_2 zadane su matrice $A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$, $A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ i $A_3 = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$. Dokažite da matrica $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 5 & 12 \end{bmatrix}$ pripada potprostoru W razapetom s $\{A_1, A_2, A_3\}$. Nađite jednu matricu iz M_2 koja ne pripada tom potprostoru. Koja je dimenzija vektorskog prostora M_2 i potprostora W?

9. (7 bodova) Riješite diferencijalnu jednadžbu $y' + \frac{1}{x^2} \cdot y = \frac{1}{x^3}$, $y(1) = 0$. Skicirajte graf rješenja u polju smjerova:



10. (10 bodova) Modeliramo populaciju kukaca koji žive najviše dvije godine. U prvoj godini života prosječan broj potomaka je 0.1, a u drugoj godini je 1.3. Vjerojatnost preživljavanja iz prve u drugu godinu je 70 %. Populacija počinje s 1000 kukaca u prvoj godini života i 0 kukaca u drugoj godini života. Postavite Lesliejevu matricu i izračunajte veličinu populacije nakon godinu dana, dvije godine i tri godine. Dugoročno gledano, povećava li se ova populacija ili se smanjuje?

Napomena. Ovaj papir predajte zajedno s papirima na kojima ste rješavali zadatke. Dozvoljeno je korištenje kalkulatora i formula u nastavku.

Pravila deriviranja

$$(C \cdot f(x))' = C \cdot f'(x)$$

$$(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x)$$

$$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2}$$

$$f(g(x))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

Tablica derivacija

$f(x)$	$f'(x)$
x^n	$n\,x^{n-1}$
a^x	$a^x \ln a$
$\log_a x$	$\frac{1}{x \ln a}$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$

Pravila integriranja

$$\int (C \cdot f(x))\,\mathrm{d}x = C \cdot \int f(x)\mathrm{d}x$$

$$\int (f(x) \pm g(x))\,\mathrm{d}x = \int f(x)\mathrm{d}x \pm \int g(x)\mathrm{d}x$$

$$\int f(g(x))g'(x)\mathrm{d}x = \left[\begin{array}{c} t = g(x) \\ \mathrm{d}t = g'(x)\mathrm{d}x \end{array} \right] =$$

$$= \int f(t)\mathrm{d}t = F(t) + C = F(g(x)) + C$$

$$\int u(x)v'(x)\mathrm{d}x = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)\mathrm{d}x$$

Tablica integrala

$f(x)$	$\int f(x)\mathrm{d}x$
$x^n,\ n \neq -1$	$\frac{x^{n+1}}{n+1} + C$
$\frac{1}{x}$	$\ln \lvert x \rvert + C$
a^x	$\frac{a^x}{\ln a} + C$
$\sin x$	$-\cos x + C$
$\cos x$	$\sin x + C$
$\frac{1}{\sin^2 x}$	$-\operatorname{ctg} x + C$
$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\operatorname{tg} x + C$

Opće rješenje linearne diferencijalne jednadžbe $y' + P(x)y = Q(x)$:

$$y = e^{-\int P(x)\mathrm{d}x} \left(\int Q(x)\, e^{\int P(x)\mathrm{d}x}\ \mathrm{d}x + C \right)$$