1	2	3	4	5	6	7	Σ

Ime i prezime: ______________________________

Prvi kolokvij, 17.4.2019.

1. (6 bodova) Veličinu populacije bakterija modeliramo nizom (B_n) zadanim rekurzijom $B_{n+1} = \dfrac{180B_n}{90 + B_n}$ i početnom veličinom $B_0 = 10$ (u milijunima).

(a) Izračunajte veličinu populacije u iduće četiri generacije: B_1, B_2, B_3 i B_4.

(b) Dokažite da je niz (B_n) konvergentan i izračunajte mu limes.

(c) Objasnite što se dugoročno događa s ovom populacijom bakterija.

2. (4 boda) Precizno definirajte pojmove neprekidnosti funkcije u točki, neprekidnosti na domeni i točke globalnog minimuma i maksimuma funkcije. Iskažite Weierstrassov teorem.

3. (5 bodova) Neka je (x_n) niz, $L \in \mathbb{R}$ broj i $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funkcija. Precizno definirajte što znači da je L limes niza (x_n). Ako to vrijedi i ako je f neprekidna u L, dokažite da je tada $f(L)$ limes niza $(f(x_n))$.

4. (3 boda) Definirajte derivaciju funkcije u točki. Objasnite vezu derivacije s brzinom i fizikalnu interpretaciju Lagrangeova teorema srednje vrijednosti.

5. (4 boda) Materijalna točka giba se po pravcu. Njezin položaj u trenutku t zadan je sa $x(t) = \sin((t + 1)\ln t)$. Izračunajte brzinu i akceleraciju materijalne točke u trenutku $t = 1$.

6. (9 bodova) Veza genske udaljenosti d dva mjesta na lancu DNK i vjerojatnosti rekombinacije r između ta dva mjesta opisana je Haldaneovom funkcijom $d(r) = -\frac{1}{2}\ln(1 - 2r)$.

(a) Odredite inverznu funkciju od $d(r)$, tj. izrazite r kao funkciju od d.

(b) Odredite prirodne domene funkcija $d(r)$ i $r(d)$.

(c) Je li funkcija $d(r)$ rastuća/padajuća, konveksna/konkavna i ima li horizontalne/vertikalne asimptote? Obrazložite svoje tvrdnje računanjem derivacija i limesa!

(d) Skicirajte graf funkcije $d(r)$.

7. (4 boda) Izračunajte integrale:

(a) $\displaystyle\int \frac{e^x}{1+e^{2x}}\,\mathrm{d}x$ **(b)** $\displaystyle\int x^2 \ln x\,\mathrm{d}x$

Napomena. Ovaj papir predajte zajedno s papirima na kojima ste rješavali zadatke. Dozvoljeno je korištenje kalkulatora i formula u nastavku.

Pravila deriviranja

$$(C\cdot f(x))' = C\cdot f'(x)$$

$$(f(x)\pm g(x))' = f'(x)\pm g'(x)$$

$$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{(g(x))^2}$$

$$f(g(x))' = f'(g(x))\cdot g'(x)$$

Tablica derivacija

$f(x)$	$f'(x)$
C	0
x^n	$n\,x^{n-1}$
a^x	$a^x \ln a$
$\log_a x$	$\frac{1}{x\ln a}$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\operatorname{arctg} x$	$\frac{1}{1+x^2}$

Pravila integriranja

$$\int (C\cdot f(x))\,\mathrm{d}x = C\cdot\int f(x)\mathrm{d}x$$

$$\int (f(x)\pm g(x))\,\mathrm{d}x = \int f(x)\mathrm{d}x \pm \int g(x)\mathrm{d}x$$

$$\int f(g(x))g'(x)\mathrm{d}x = \left[\begin{array}{c} t = g(x)\\ \mathrm{d}t = g'(x)\mathrm{d}x\end{array}\right] =$$

$$= \int f(t)\mathrm{d}t = F(t) + C = F(g(x)) + C$$

$$\int u(x)v'(x)\mathrm{d}x = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)\mathrm{d}x$$

Tablica integrala

$f(x)$	$\int f(x)\mathrm{d}x$
$x^n,\ n\neq -1$	$\frac{x^{n+1}}{n+1} + C$
$\frac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert + C$
a^x	$\frac{a^x}{\ln a} + C$
$\sin x$	$-\cos x + C$
$\cos x$	$\sin x + C$
$\frac{1}{\sin^2 x}$	$-\operatorname{ctg} x + C$
$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\operatorname{tg} x + C$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\operatorname{arctg} x + C$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x + C$

1	2	3	4	5	6	7	Σ

Ime i prezime: ______________________________

Prvi kolokvij, 17.4.2019.

1. **(6 bodova)** Veličinu populacije bakterija modeliramo nizom (B_n) zadanim rekurzijom $B_{n+1} = \dfrac{84B_n}{140 + B_n}$ i početnom veličinom $B_0 = 100$ (u milijunima).

(a) Izračunajte veličinu populacije u iduće četiri generacije: B_1, B_2, B_3 i B_4.

(b) Dokažite da je niz (B_n) konvergentan i izračunajte mu limes.

(c) Objasnite što se dugoročno događa s ovom populacijom bakterija.

2. **(4 boda)** Precizno definirajte pojmove neprekidnosti funkcije u točki, neprekidnosti na domeni i pojam nultočke funkcije. Iskažite Bolzanov teorem.

3. **(5 bodova)** Neka su $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funkcije i $x_0, L \in \mathbb{R}$ brojevi. Precizno definirajte što znači $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = L$. Ako to vrijedi i ako je f neprekidna u L, dokažite da tada vrijedi $\lim\limits_{x \to x_0} f(g(x)) = f(L)$.

4. **(3 boda)** Definirajte derivaciju funkcije u točki. Objasnite vezu derivacije s tangentom i geometrijsku interpretaciju Lagrangeova teorema srednje vrijednosti.

5. **(4 boda)** Krivulja u ravnini zadana je jednadžbom $y = \dfrac{x^2 \ln x}{\sin(e^x)}$. Izračunajte jednadžbu tangente na tu krivulju u točki $(x_0, y_0) = (1, 0)$.

6. **(9 bodova)** Veza vjerojatnosti rekombinacije r između dva mjesta na lancu DNK i genske udaljenosti d ta dva mjesta opisana je Haldaneovom funkcijom $r(d) = \frac{1}{2}(1 - e^{-d/50})$.

(a) Odredite inverznu funkciju od $r(d)$, tj. izrazite d kao funkciju od r.

(b) Odredite prirodne domene funkcija $r(d)$ i $d(r)$.

(c) Je li funkcija $r(d)$ rastuća/padajuća, konveksna/konkavna i ima li horizontalne/vertikalne asimptote? Obrazložite svoje tvrdnje računanjem derivacija i limesa!

(d) Skicirajte graf funkcije $r(d)$.

7. (4 boda) Izračunajte integrale:

(a) $\displaystyle\int \frac{x^2}{\cos^2(x^3+1)}\,\mathrm{d}x$ **(b)** $\displaystyle\int x^2 e^x\,\mathrm{d}x$

Napomena. Ovaj papir predajte zajedno s papirima na kojima ste rješavali zadatke. Dozvoljeno je korištenje kalkulatora i formula u nastavku.

Pravila deriviranja

$$(C\cdot f(x))' = C\cdot f'(x)$$

$$(f(x)\pm g(x))' = f'(x)\pm g'(x)$$

$$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2}$$

$$f(g(x))' = f'(g(x))\cdot g'(x)$$

Tablica derivacija

$f(x)$	$f'(x)$
C	0
x^n	$n\,x^{n-1}$
a^x	$a^x\ln a$
$\log_a x$	$\frac{1}{x\ln a}$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\operatorname{arctg} x$	$\frac{1}{1+x^2}$

Pravila integriranja

$$\int (C\cdot f(x))\,\mathrm{d}x = C\cdot\int f(x)\mathrm{d}x$$

$$\int (f(x)\pm g(x))\,\mathrm{d}x = \int f(x)\mathrm{d}x \pm \int g(x)\mathrm{d}x$$

$$\int f(g(x))g'(x)\mathrm{d}x = \left[\begin{array}{c} t = g(x) \\ \mathrm{d}t = g'(x)\mathrm{d}x \end{array}\right] =$$

$$= \int f(t)\mathrm{d}t = F(t) + C = F(g(x)) + C$$

$$\int u(x)v'(x)\mathrm{d}x = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)\mathrm{d}x$$

Tablica integrala

$f(x)$	$\int f(x)\mathrm{d}x$
$x^n,\ n\neq -1$	$\frac{x^{n+1}}{n+1} + C$
$\frac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert + C$
a^x	$\frac{a^x}{\ln a} + C$
$\sin x$	$-\cos x + C$
$\cos x$	$\sin x + C$
$\frac{1}{\sin^2 x}$	$-\operatorname{ctg} x + C$
$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\operatorname{tg} x + C$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\operatorname{arctg} x + C$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x + C$