Domaća zadaća 8

Napomena: $A\Delta B$ označava simetričnu razliku skupova.

1. Na slučajan način biramo podskupove od $N = \{1, \dots, n\}$ tako da je izbor svakog od 2^n podskupova jednako vjerojatan. Nezavisno smo izabrali dva podskupa $A, B \subseteq N$.
   (a) Kolika je vjerojatnost događaja $A \cap B = \emptyset$?
   (b) Kolika je vjerojatnost događaja $A \cup B = N$?
   (c) Koliko je očekivanje slučajne varijable $X = |A \cap B|$?
   (d) Koliko je očekivanje slučajne varijable $Y = |A \cup B|$?
   (e) Koliko je očekivanje slučajne varijable $Z = |A\Delta B|$?

2. Na slučajan način biramo k-člane podskupove od $N = \{1, \dots, n\}$ tako da je izbor svakog od $\binom{n}{k}$ podskupova jednako vjerojatan. Nezavisno smo izabrali dva k-člana podskupa $A, B \subseteq N$.
   (a) Kolika je vjerojatnost događaja $A \cap B = \emptyset$?
   (b) Kolika je vjerojatnost događaja $A \cup B = N$?
   (c) Koliko je očekivanje slučajne varijable $X = |A \cap B|$?
   (d) Koliko je očekivanje slučajne varijable $Y = |A \cup B|$?
   (e) Koliko je očekivanje slučajne varijable $Z = |A\Delta B|$?

3. Na isti način kao u prethodnom zadatku biramo dva k-člana podskupa $A, B \subseteq N$. Neka je X_i slučajna varijabla koja poprima vrijednost 1 ako je $i \in A \cap B$, a 0 inače. Koliko je matematičko očekivanje $\mathbb{E}(X_i)$? Izračunajte matematičko očekivanje slučajne varijable $X = |A \cap B|$ služeći se relacijom $X = \sum\limits_{i=1}^{n} X_i$. Izjednačite s izrazom dobivenim u (c) dijelu prethodnog zadatka i izvedite identitet

$$\sum_{i=0}^{k} i \binom{k}{i} \binom{n-k}{k-i} = k \binom{n-1}{k-1}.$$

   Na analogni način izvedite kombinatorne identitete iz matematičkog očekivanja slučajnih varijabli $Y = |A \cup B|$ i $Z = |A\Delta B|$.

4. Kombinatorno dokažite identitet $\binom{n}{k+1} = \frac{n-k}{k+1}\binom{n}{k}$. Iz njega dokažite da je za fiksni n binomni koeficijent $\binom{n}{k}$ najveći za $k = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$.

5. Dokažite da za svaku presijecajuću familiju $\mathcal{F}$ podskupova od $N = \{1, \dots, n\}$ vrijedi $|\mathcal{F}| \leq 2^{n-1}$. Jesu li familije koje dostižu nejednakost nužno oblika "svi podskupovi kroz fiksni element"?

6. Pokažite primjerom da za $n = 2k$ postoje presijecajuće familije k-članih podskupova od $N = \{1, \dots, n\}$ veličine $\binom{n-1}{k-1}$ koje nisu oblika "svi k-člani podskupovi kroz fiksni element".