Domaća zadaća 7

1. Odredite dimenziju vektorskog prostora gornjetrokutastih matrica $T_n(\mathbb{R})$. Ako je P konačan parcijalno uređen skup od n elemenata, odredite najmanju moguću i najveću moguću dimenziju incidencijske algebre $I(P)$. Za koje se parcijalne uređaje postižu?

2. Odredite kombinatornu interpretaciju vrijednosti $\zeta^2(x, y)$ kvadrata zeta funkcije.

3. Nacrtajte Hasseov dijagram Booleove rešetke $(2^{\{1,2,3,4\}}, \subseteq)$. Za svaki podskup $X \subseteq \{1, 2, 3, 4\}$ napišite vrijednost Möbiusove funkcije $\mu(\emptyset, X)$.

4. Nacrtajte Hasseov dijagram parcijalno uređenog skupa djelitelja $D(20)$ i odredite vrijednosti odgovarajuće Möbiusove funkcije $\mu(2, 5)$, $\mu(1, 4)$, $\mu(2, 4)$ i $\mu(2, 20)$. Kolika je dimenzija incidencijske algebre tog parcijalno uređenog skupa?

5. U parcijalno uređenom skupu particija Π_5 zadani su elementi $\mathcal{A} = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}\}$ i $\mathcal{B} = \{\{1, 2\}, \{3, 4, 5\}\}$. Nacrtajte Hasseov dijagram segmenta $[\mathcal{A}, \mathcal{B}]$ i izračunajte $\mu(\mathcal{A}, \mathcal{B})$.

6. Elementi Youngove rešetke $\mathcal{Y}$ su particije prirodnih brojeva. Dvije particije $A = (a_1, \ldots, a_k)$ i $B = (b_1, \ldots, b_m)$ su u relaciji $A \leq B$ ako je $k \leq m$ i vrijedi $a_i \leq b_i$, za $i = 1, \ldots, k$ (tj. ako je Ferrersov dijagram od A podskup Ferrersova dijagrama od B). Neka su $A = (1)$, $B = (2, 2)$, $C = (3, 1, 1) \in \mathcal{Y}$. Nacrtajte Hasseove dijagrame segmenata $[A, B]$ i $[A, C]$ te izračunajte $\mu(A, B)$, $\mu(A, C)$ i $\mu(B, C)$.

7. Young-Fibonaccijev parcijalno uređeni skup sastoji se od konačnih nizova kojima su znamenke 1 ili 2, a neposredni sljedbenici niza S dobivaju se tako da prvu jedinicu promijenimo u dvojku ili umetnemo jedinicu na bilo koje mjesto prije prve jedinice. Ako S nema jedinica, jedinicu možemo umetnuti na bilo koje mjesto. Na primjer, jedan lanac u tom parcijalnom uređaju je $1 - 2 - 21 - 121 - 221$. Nacrtajte Hasseov dijagram segmenta $[1, 221]$ i izračunajte $\mu(1, 221)$.

8. Dokažite da za svaki $n \in \mathbb{N}$ postoji parcijalno uređen skup s elementima x, y takav da je $\mu(x, y) = n$. Nadalje, postoji parcijalno uređen skup s elementima x, y takav da je $\mu(x, y) = -n$.

9. Dokažite pomoću teorema 7.19 (P. Hall, 1936.) formulu za Möbiusovu funkciju u parcijalno uređenom skupu $(2^N, \subseteq)$:

$$\mu(X, Y) = \begin{cases} (-1)^{|Y \setminus X|}, & \text{ako je } X \subseteq Y, \\ 0, & \text{inače.} \end{cases}$$