

Domaća zadaća 10

1. Neka je a_n broj n -članih podmultiskupova multiskupa $\{A^\infty, B^{10}, C^5\}$. Odredite zatvorenu formulu za funkciju izvodnicu $F(z) = \sum_{n \geq 0} a_n z^n$. S pomoću funkcije izvodnice izračunajte broj 10-članih podmultiskupova.
2. U supermarketu na odjelu voća prodaju se lubenice, banane, mango, šljive i mandarine. Neka je a_n broj načina na koji možemo kupiti n komada voća tako da vrijedi: broj lubenica je 0 ili 1, broj banana je paran, broj manga je 0, 1 ili 2, broj šljiva je neparan i broj mandarina je djeljiv s 3. Voćke iste vrste smatramo identičnima. Napišite funkciju izvodnicu niza (a_n) u zatvorenom obliku. Razvojem u red potencija izvedite formulu za a_n .
3. Nacrtajte usmjereni graf zadan matricom susjedstva

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

i odredite funkciju izvodnicu za broj šetnji duljine n koje počinju i završavaju u prvom vrhu tog grafa.

4. U hladnjaku kafića nalazi se 15 bočica soka od naranče, 6 bočica soka od jabuke i 20 bočica soka od borovnice. U kafić je došlo društvo od n matematičara. Njihova narudžba glasi: "Donesi nam svakom po jednu bočicu soka tako da broj sokova od naranče bude djeljiv s 5, broj sokova od jabuke bude prost i da dobijemo bar 3 soka od borovnice". Na koliko načina konobar može zadovoljiti narudžbu ako je bitno koji matematičar pije koju vrstu soka? Sokove iste vrste smatramo identičnima. Napišite eksponencijalnu funkciju izvodnicu i odredite taj broj za $n = 10$.
5. Mobilni tim za cijepljenje raspolaže s 20 doza cjepiva Pfizer, 50 doza cjepiva Moderna i 100 doza cjepiva AstraZeneca. Na koliko načina tim može provesti cijepljenje n štićenika doma za starije osobe? Svaki štićenik dobiva jednu dozu cjepiva, a doze cjepiva od istog proizvođača su identične. Napišite eksponencijalnu funkciju izvodnicu za ovaj problem. Uz pomoć eksponencijalne funkcije izvodnice i nekog programa za računalnu algebru odredite broj načina za $n = 100$.
6. Neka je $k \in \mathbb{N}$ fiksiran. Označimo s a_n broj injekcija s n -članog skupa u k -člani skup, a s b_n broj surjekcija s n -članog skupa na k -člani skup. Napišite zatvorene formule za eksponencijalne funkcije izvodnice $F(z) = \sum_{n \geq 0} \frac{a_n}{n!} z^n$ i $G(z) = \sum_{n \geq 0} \frac{b_n}{n!} z^n$.
7. Izvedite zatvoreni oblik eksponencijalne funkcije izvodnice $F(z) = \sum_{n \geq 0} \frac{d_n}{n!} z^n$ za broj deranžmana $d_n = n! \sum_{i=0}^n \frac{(-1)^i}{i!}$.