1	2	3	4	5	Σ

Matični Broj

Ime i Prezime

Kombinatorika - drugi kolokvij, 1.2.2023.

1. Definirajte pojmove *parcijalno uređen skup*, *lanac* i *antilanac*. Dokažite: ako je najveći lanac u konačnom parcijalno uređenom skupu veličine r, onda ga možemo rastaviti na r antilanaca.

2. Neka je $P = (X, \leq)$ lokalno konačan parcijalno uređen skup. Definirajte množenje elemenata incidencijske algebre $I(P)$ i elemente $\delta, \mu \in I(P)$. Neka je element $\chi \in I(P)$ definiran s

$$\chi(x,y) = \begin{cases} 1, & \text{ako je } x < y, \\ 0, & \text{inače.} \end{cases}$$

Ako su $x, y \in X$ i $n \in \mathbb{N}$, dokažite da je $\chi^n(x,y)$ jednak broju lanaca veličine $n+1$ u segmentu $[x,y]$ kojima je najmanji element x, a najveći element y. Nadalje, dokažite da vrijedi $\mu = \delta - \chi + \chi^2 - \chi^3 + \chi^4 - \ldots$.

3. Definirajte Ramseyev broj $R(r,s)$ i vjerojatnosnom metodom dokažite: ako vrijedi $\binom{n}{k} 2^{1-\binom{k}{2}} < 1$, onda je $R(k,k) > n$. Iz toga izvedite ocjenu $R(k,k) > \lfloor 2^{k/2} \rfloor$ za sve $k \geq 3$.

4. Neka je a_n broj nenegativnih cjelobrojnih rješenja jednadžbe $x_1 + x_2 + 2x_3 = n$. Napišite funkciju izvodnicu $F(z) = \sum\limits_{n \geq 0} a_n z^n$ u zatvorenom obliku i razvojem u red potencija izvedite formulu za a_n.

Uputa. Koeficijent uz z^n izračunajte rastavljanjem $F(z)$ na parcijalne razlomke. Formulu za a_n treba zapisati bez znaka sume!

5. Neka je a_n broj načina da n ljudi rasporedimo u k različitih soba tako da niti jedna soba ne ostane prazna. Napišite eksponencijalnu funkciju izvodnicu $F(z) = \sum\limits_{n \geq 0} \frac{a_n}{n!} z^n$ u zatvorenom obliku. Izvedite formulu za a_n koja uključuje znak sume $\sum\limits_{i=0}^{k}$ na dva načina: (1) razvojem $F(z)$ u red potencija, (2) pomoću formule uključivanja-isključivanja.

Na kolokviju je dozvoljeno koristiti pribor za pisanje i kalkulator. Svaki zadatak vrijedi 7 bodova.

Vedran Krčadinac