1	2	3	4	5	6	7	Σ

Matični Broj

Ime i Prezime

Kombinatorika - popravni kolokvij, 15.2.2022.

1. (2+8 bodova)

(a) Definirajte n-ti Bellov broj B_n i Stirlingov broj druge vrste $\left\{ n \atop k \right\}$.

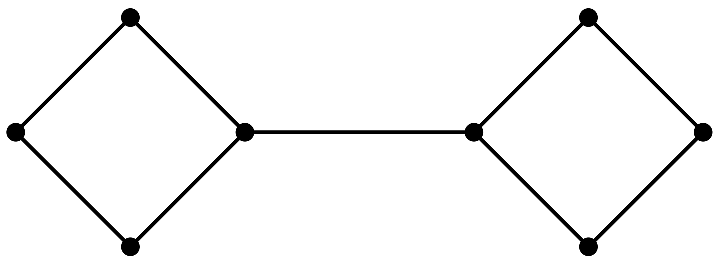
(b) Kombinatorno dokažite formulu $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k \left\{ n \atop k \right\} = B_{n+1} - B_n$.

2. (10 bodova) Neka je $P \subseteq \square_n = \{1, \ldots, n\} \times \{1, \ldots, n\}$. Napišite i dokažite formulu za broj permutacija $\pi \in S_n$ takvih da $(i, \pi(i)) \notin P$, $\forall i \in \{1, \ldots, n\}$.

3. (2+4+2+2 boda)

(a) Definirajte sparivanje u grafu G i polinom sparivanja $M(G, x)$.

(b) Izračunajte $M(G_8, x)$ za graf G_8 prikazan na slici:



(c) Nacrtajte sva savršena sparivanja u grafu G_8.

(d) Pokažite da je graf G_8 bipartitan i nacrtajte ploču $P \subseteq \square_4$ takvu da rasporedima nenapadajućih topova na P odgovaraju sparivanja u G_8.

4. (2+3+5 bodova) Neka je $P = (X, \leq)$ lokalno konačan parcijalno uređen skup.

(a) Što su elementi incidencijske algebre $I(P)$? Definirajte operaciju množenja elemenata iz $I(P)$ i navedite njezina svojstva.

(b) Definirajte zeta funkciju $\zeta \in I(P)$ i kombinatorno interpretirajte vrijednost njezina kvadrata $\zeta^2(x, y)$, za $x, y \in X$.

(c) Definirajte Möbiusovu funkciju $\mu \in I(P)$. Iskažite i dokažite Möbiusovu inverziju u $I(P)$.

5. (1+1+1+3+1+2+1 bod) Na slučajan način, uniformno i nezavisno biramo k-člane podskupove $A, B \subseteq \{1, \ldots, n\}$.

(a) Za $i \in \{1, \ldots, n\}$, kolika je vjerojatnost događaja $i \in A \cap B$?

(b) Za $i \in \{0, \ldots, k\}$, kolika je vjerojatnost događaja $|A \cap B| = i$?

(c) Definirajte matematičko očekivanje diskretne slučajne varijable.

(d) Po definiciji izračunajte matematičko očekivanje slučajne varijable

$$X = |A \cap B|.$$

(e) Neka je X_i slučajna varijabla koja poprima vrijednost 1 ako je $i \in A \cap B$, a 0 inače. Koliko je matematičko očekivanje $E(X_i)$?

(f) Izračunajte matematičko očekivanje slučajne varijable $X = |A \cap B|$ služeći se relacijom $X = \sum\limits_{i=1}^{n} X_i$.

(g) Izjednačite izraze za $E(X)$ dobivene pod (d) i (f) i izvedite identitet

$$\sum_{i=0}^{k} i \binom{k}{i} \binom{n-k}{k-i} = k \binom{n-1}{k-1}.$$

6. (10 bodova) Kombinatorno dokažite razvoj u red potencija

$$\frac{1}{(1-z)^{m+1}} = \sum_{n \geq 0} \binom{m+n}{m} z^n.$$

7. (10 bodova) U vlaku se nalazi n putnika. Svaki od putnika izlazi na jednoj od triju stanica. Neka je a_n broj načina na koje putnici mogu izaći iz vlaka tako da na prvoj stanici izađe barem jedan putnik, na drugoj stanici izađe paran broj putnika, a na trećoj stanici izađe neparan broj putnika. Napišite eksponencijalnu funkciju izvodnicu niza (a_n) i razvojem u red potencija izvedite formulu za a_n.

Na kolokviju je dozvoljeno koristiti pribor za pisanje i kalkulator.

Vedran Krčadinac