

1	2	3	4	5	6	$\Sigma$

---

MATIČNI BROJ

IME I PREZIME

## Kombinatorika - drugi kolokvij, 1.2.2022.

1. **(1+3+2 bodova)** Neka je  $P = (X, \leq)$  lokalno konačan parcijalno uređen skup.
  - (a) Što su elementi incidencijske algebre  $I(P)$ ? Definirajte operacije zbrajanja i množenja elemenata iz  $I(P)$ .
  - (b) Iskažite i dokažite nuždan i dovoljan uvjet da element  $f \in I(P)$  ima multiplikativni inverz.
  - (c) Definirajte Möbiusovu funkciju  $\mu \in I(P)$  i dokažite da poprima cjelobrojne vrijednosti.
  
2. **(5 bodova)** Definirajte matematičko očekivanje diskretne slučajne varijable. Iskažite nejednakost LYM i dokažite je vjerojatnosnom metodom.
  
3. **(1+2+3 bodova)**
  - (a) Definirajte što je presijecajuća familija skupova.
  - (b) Neka je  $\mathcal{F}$  presijecajuća familija podskupova  $n$ -članog skupa  $N$  (bez ograničenja na veličinu podskupova). Dokažite da je tada  $|\mathcal{F}| \leq 2^{n-1}$ .
  - (c) Ako je  $|\mathcal{F}| < 2^{n-1}$ , dokažite da postoji presijecajuća familija  $\mathcal{F}'$  podskupova od  $N$  takva da je  $|\mathcal{F}'| = 2^{n-1}$  i  $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{F}'$ .
  
4. **(7 bodova)** U vlaku se nalazi  $n$  putnika. Svaki od putnika izlazi na jednoj od triju stanica. Neka je  $a_n$  broj načina na koje putnici mogu izaći iz vlaka tako da niti na jednoj stanici ne izađu točno dva putnika. Napišite eksponencijalnu funkciju izvodnicu niza  $(a_n)$  i razvojem u red potencija izvedite formulu za  $a_n$ .
  
5. **(6 bodova)** Definirajte particiju prirodnog broja  $n$ . Dokažite da je broj particija od  $n$  u dijelove koji se ponavljaju najviše tri puta jednak broju particija od  $n$  u kojima se parni dijelovi ponavljaju najviše jednom, a na neparne dijelove nema ograničenja.
  
6. **(5 bodova)** Odredite koeficijente funkcije izvodnice  $W \in \mathbb{C}[[z]]$  koja zadovoljava jednadžbu  $W(z)e^{W(z)} = z$ .

Na kolokvijju je dozvoljeno koristiti pribor za pisanje i kalkulator.

Vedran Krčadinac