

1	2	3	4	5	Σ

MATIČNI BROJ

IME I PREZIME

Kombinatorika - prvi kolokvij, 23.11.2021.

1. (6 bodova) Metodom parcijalne sumacije izračunajte $\sum_{k=1}^n \binom{k}{2} H_k$ ($H_k = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{k}$ je harmonijski broj).

2. (1+3+5+2 bodova)

(a) Definirajte n -ti Bellov broj B_n .

(b) Neka je $a(n, k)$ broj particija skupa $\{1, \dots, n + 1\}$ u kojima elementi $k + 1, \dots, n$ nisu u bloku s elementom $n + 1$. Dokažite formulu

$$a(n, k) = \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} B_{n-i}.$$

(c) Za $n > 0$ i $k > 0$ dokažite rekurziju

$$a(n, k) = a(n, k - 1) + a(n - 1, k - 1)$$

i rubne uvjete $a(n, 0) = a(n - 1, n - 1) = B_n$.

(d) Koristeći se rekurzijom izračunajte elemente "Bellogovog trokuta" (desno) do $n = 5$.

$$\begin{array}{cccc}
 a(0, 0) & & & \\
 a(1, 0) & a(1, 1) & & \\
 a(2, 0) & a(2, 1) & a(2, 2) & \\
 a(3, 0) & a(3, 1) & a(3, 2) & a(3, 3) \\
 \vdots & & &
 \end{array}$$

3. (6 bodova) Definirajte rastuće faktorijele $x^{\overline{n}}$ i Stirlingove brojeve prve vrste $\left[\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right]$. Dvostrukim prebrojavanjem dokažite formulu $x^{\overline{n}} = \sum_{k=0}^n \left[\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right] x^k$.

4. (6 bodova) Za graf $G = (V, E)$ definirajte polinom sparivanja $M(G, x)$ i dokažite formulu $\frac{d}{dx} M(G, x) = \sum_{\{u, v\} \in E} M(G \setminus \{u, v\}, x)$.

5. (6 bodova) Grb Republike Hrvatske je 5×5 šahovska ploča koja počinje crvenim poljem (zanemarite zaobljenost s donje strane). Iznad svakog stupca nalazi se štit, a zadnja tri štita sadrže životinje. Na koliko načina možemo postaviti 5 identičnih topova na polja ploče tako da se ne napadaju i da u stupcima iznad kojih su životinje topovi nisu na bijelim poljima?

Na kolokviju je dozvoljeno koristiti pribor za pisanje i kalkulator.

Vedran Krčadinac