1	2	3	4	5	6	7	Σ

Matični Broj

Ime i Prezime

Kombinatorika - popravni kolokvij, 4.3.2021.

1. (8 bodova) Za funkcije $F, f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definirajte $\Delta F(x)$ i $\sum_a^b f(x)\delta x$. Ako je $\Delta F(x) = f(x)$, dokažite da tada vrijedi $\sum_a^b f(x)\delta x = F(b) - F(a)$.

2. (10 bodova) Za $m, n \in \mathbb{N}$, $m < n$ izračunajte sumu $\displaystyle\sum_{k=m}^{n} \binom{k}{m}$.

3. (10 bodova) Lahov broj $L(n, k)$ je broj načina na koji možemo elemente n-članog skupa podijeliti u k totalno uređenih podskupova. Redoslijed podskupova nije bitan, ali je redoslijed elemenata unutar podskupova bitan. Na primjer, za $n = 4$ i $k = 2$ sve moguće podjele su

$$\begin{array}{ccccccc}
\{1,234\} & \{2,134\} & \{3,124\} & \{4,123\} & \{12,34\} & \{13,24\} & \{14,23\} \\
\{1,243\} & \{2,143\} & \{3,142\} & \{4,132\} & \{12,43\} & \{13,42\} & \{14,32\} \\
\{1,324\} & \{2,314\} & \{3,214\} & \{4,213\} & \{21,34\} & \{31,24\} & \{41,23\} \\
\{1,342\} & \{2,341\} & \{3,241\} & \{4,231\} & \{21,43\} & \{31,42\} & \{41,32\} \\
\{1,423\} & \{2,413\} & \{3,412\} & \{4,312\} & & & \\
\{1,432\} & \{2,431\} & \{3,421\} & \{4,321\} & & &
\end{array}$$

i vrijedi $L(4,2) = \binom{4}{1} \cdot 1! \cdot 3! + \frac{1}{2}\binom{4}{2} \cdot 2! \cdot 2! = 36$. Dokažite formulu

$$L(n,k) = \frac{n!}{k!}\binom{n-1}{k-1}.$$

4. (10 bodova) Graf G dobijemo od potpunog bipartitnog grafa $K_{n,n}$, $n \geq 3$, tako da iz njega izbacimo bridove jednog ciklusa duljine 6. Koliko ima savršenih sparivanja u grafu G?

Uputa: interpretirajte kao problem prebrojavanja permutacija sa zabranjenim pozicijama, ili rasporeda nenapadajućih topova na krnjoj šahovskoj ploči.

5. (12 bodova) Neka je $P = (X, \leq)$ lokalno konačan parcijalno uređen skup i $I(P)$ njegova incidencijska algebra.

1. Definirajte operaciju množenja (konvolucije) elemenata iz $I(P)$. Pokažite primjerom da množenje nije komutativno i da postoje djelitelji nule (elementi $f, g \in I(P)$ takvi da je $f \neq 0$, $g \neq 0$ i $f \cdot g = 0$).
2. Iskažite i dokažite kriterij invertibilnosti elementa $f \in I(P)$ obzirom na množenje.
3. Definirajte Möbiusovu funkciju $\mu \in I(P)$ i dokažite da poprima samo cjelobrojne vrijednosti (tj. da za sve $x, y \in X$ vrijedi $\mu(x, y) \in \mathbb{Z}$).

6. (10 bodova) Neka je a_n broj cjelobrojnih rješenja jednadžbe

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = n$$

uz uvjete $x_1 \geq 5$, $0 \leq x_2 \leq 10$, $x_3 \geq 0$ i $x_4 \geq 0$. Napišite zatvorenu formulu za funkciju izvodnicu $F(z) = \sum\limits_{n \geq 0} a_n z^n$ i izračunajte a_{21}.

7. (10 bodova) U prstenu $\mathbb{C}[[z]]$ riješite jednadžbu četvrtog stupnja

$$F(z)^4 - F(z) + z = 0,$$

tj. odredite koeficijente funkcije izvodnice $F(z)$ koja zadovoljava tu jednadžbu.

Na kolokviju je dozvoljeno koristiti pribor za pisanje i kalkulator.

Vedran Krčadinac