

1	2	3	4	5	Σ

MATIČNI BROJ

IME I PREZIME

Kombinatorika - drugi kolokvij, 11.2.2021.

1. (6 bodova) Neka je d_n broj deranžmana stupnja n , tj. permutacija bez fiksne točke. Kombinatorno dokažite formulu $n! = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} d_k$ i iz nje binomnom inverzijom izvedite formulu za d_n .
2. (7 bodova) Neka je $P = (X, \leq)$ lokalno konačan parcijalno uređen skup i $I(P)$ njegova incidencijska algebra.

1. Definirajte operacije na $I(P)$ i navedite njihova svojstva.
2. Definirajte elemente $\delta, \zeta, \mu \in I(P)$ i napišite koja je njihova veza.
3. Dokažite multiplikativnu verziju Möbiusove inverzije: za svake dvije funkcije $f, g \in I(P)$ takve da je $f(x, y) \neq 0$ i $g(x, y) \neq 0$ uvijek kad vrijedi $x \leq y$, ekvivalentno je

$$(a) \quad g(x, y) = \prod_{z \in [x, y]} f(x, z) \quad \text{za sve } x, y \in X \text{ za koje vrijedi } x \leq y,$$

$$(b) \quad f(x, y) = \prod_{z \in [x, y]} g(x, z)^{\mu(z, y)} \quad \text{za sve } x, y \in X \text{ za koje vrijedi } x \leq y.$$

3. (8 bodova) Definirajte antilanac i širinu parcijalno uređenog skupa. Definirajte Booleovu rešetku nad n -članim skupom i dokažite da joj je širina $\binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$.
4. (7 bodova) Izvedite formulu za binomnu konvoluciju Fibonaccijevih brojeva

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} F_k F_{n-k}.$$

Uputa: koristite eksponencijalnu funkciju izvodnicu za Fibonaccijeve brojeve $F(z) = \frac{1}{\sqrt{5}} (e^{\Phi z} - e^{\Psi z})$, gdje je $\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ i $\Psi = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$.

5. (7 bodova) U prstenu $\mathbb{C}[[z]]$ riješite kubnu jednadžbu $f(z)^3 + f(z) = z$, tj. odredite koeficijente funkcije izvodnice $f(z)$ koja zadovoljava tu jednadžbu.

Na kolokviju je dozvoljeno koristiti pribor za pisanje i kalkulator.

Vedran Krčadinac