1	2	3	4	5	Σ

Matični Broj

Ime i Prezime

Kombinatorika - prvi kolokvij, 26.11.2020.

1. Metodom parcijalne sumacije izračunajte $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{k}{3} \cdot 2^k$.

2. Neka je $\mathrm{Sur}(n,k)$ broj surjekcija s n-članog na k-člani skup. Kombinatorno dokažite formulu $\displaystyle k^n = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \mathrm{Sur}(n,i)$.

3. Lahov broj $L(n,k)$ je broj načina na koji možemo elemente n-članog skupa podijeliti u k totalno uređenih podskupova. Redoslijed podskupova nije bitan, ali je redoslijed elemenata unutar podskupova bitan. Na primjer, za $n = 4$ i $k = 2$ sve moguće podjele su

$$
\begin{array}{ccccccc}
\{1,234\} & \{2,134\} & \{3,124\} & \{4,123\} & \{12,34\} & \{13,24\} & \{14,23\} \\
\{1,243\} & \{2,143\} & \{3,142\} & \{4,132\} & \{12,43\} & \{13,42\} & \{14,32\} \\
\{1,324\} & \{2,314\} & \{3,214\} & \{4,213\} & \{21,34\} & \{31,24\} & \{41,23\} \\
\{1,342\} & \{2,341\} & \{3,241\} & \{4,231\} & \{21,43\} & \{31,42\} & \{41,32\} \\
\{1,423\} & \{2,413\} & \{3,412\} & \{4,312\} & & & \\
\{1,432\} & \{2,431\} & \{3,421\} & \{4,321\} & & &
\end{array}
$$

i vrijedi $L(4,2) = \binom{4}{1} \cdot 1! \cdot 3! + \frac{1}{2}\binom{4}{2} \cdot 2! \cdot 2! = 36$. Dokažite da Lahovi brojevi zadovoljavaju rekurziju $L(n,k) = L(n-1,k-1) + (n+k-1)L(n-1,k)$.

4. Iskažite Hallov teorem o braku. Dokažite lakšu implikaciju iz tog teorema.

5. Graf G dobijemo od potpunog bipartitnog grafa $K_{n,n}$, $n \geq 2$, tako da iz njega izbacimo bridove jednog ciklusa duljine 4. Koliko ima savršenih sparivanja u grafu G?

Uputa: interpretirajte kao problem prebrojavanja permutacija sa zabranjenim pozicijama, ili rasporeda nenapadajućih topova na krnjoj šahovskoj ploči.

Na kolokviju je dozvoljeno koristiti pribor za pisanje i kalkulator. Svaki zadatak vrijedi 7 bodova.

Vedran Krčadinac