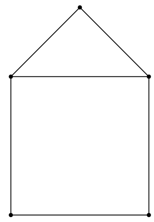
1	2	3	4	5	6	7	Σ

MATIČNI BROJ

IME I PREZIME

Kombinatorika - drugi kolokvij, 27.1.2020.

1. Definirajte sparivanje u grafu G i "matching polinom" $M(G,x)$. Dokažite da vrijedi $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}M(G,x) = \sum M(G \setminus \{u,v\}, x)$, pri čemu suma ide po svim bridovima $e = uv$ grafa G. Provjerite jednakost za graf G na slici desno: izračunajte $M(G,x)$ i njegovu derivaciju te polinome $M(G \setminus \{u,v\}, x)$ za svih šest bridova $e = uv$ i njihovu sumu.



2. Društvo od n planinara hoda u redu, jedan za drugim. Na koliko načina mogu promijeniti redoslijed hodanja tako da nitko ne bude neposredno iza planinara kojem je prije promjene gledao u leđa?

3. Neka je $N = \{1, \ldots, n\}$ i $P \subseteq N \times N$. Dokažite da je broj svih permutacija $\pi : N \to N$ sa svojstvom $(i, \pi(i)) \notin P$, $\forall i = 1, \ldots, n$, jednak $\sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k (n-k)!\, r_k(P)$. Pritom je $r_k(P)$ broj rasporeda k nenapadajućih topova na ploči P.

4. Za $n = 6$ odredite broj permutacija $\pi : N \to N$ takvih da $\pi(1)$ i $\pi(2)$ nisu djeljivi s 3, $\pi(3)$ i $\pi(4)$ nisu djeljivi s 4, a $\pi(5)$ i $\pi(6)$ nisu djeljivi s 5.

5. Neka je $P = (X, \leq)$ lokalno konačan parcijalno uređen skup. Napišite što su elementi incidencijske algebre $I(P)$ i definirajte operacije s njima. Definirajte elemente $\delta,\ \zeta,\ \mu \in I(P)$ i dokažite da za sve $f, g \in I(P)$ vrijedi

$$f(x,y) = \sum_{z \in [x,y]} g(x,z) \quad \Longleftrightarrow \quad g(x,y) = \sum_{z \in [x,y]} f(x,z)\mu(z,y).$$

6. Dokažite da za svaki $n \in \mathbb{N}$ postoji parcijalno uređen skup s elementima x, y takvim da je $\mu(x,y) = n$.

7. **(a)** Odredite zatvorenu formulu za funkciju izvodnicu $F(z) = \sum\limits_{n \geq 0} n z^n$.

(b) Ima li $F(z)$ multiplikativni inverz u prstenu formalnih redova potencija $\mathbb{C}[[z]]$? Napišite multiplikativni inverz od $F(z)$ u polju formalnih Laurentovih redova $\mathbb{C}((z))$.

(c) Neka je $G(z)$ kompozicijski inverz od $F(z)$ u prstenu $\mathbb{C}[[z]]$. Odredite zatvorenu formulu za $G(z)$.

(d) Pomoću Lagrangeove inverzije odredite koeficijente g_n u razvoju $G(z) = \sum\limits_{n \geq 1} g_n z^n$.

Svaki zadatak vrijedi **5 bodova**. Dozvoljeno je koristiti pribor za pisanje i kalkulator.

Vedran Krčadinac