KOMBINATORIKA – popravni kolokvij, 11.2.2019.

1. **(9 bodova)**
   Izračunajte $\Delta(c^{\underline{x}})$ za danu konstantu c, te iskoristite taj rezultat kako biste izračunali sumu
   $$\sum_{k=1}^{n} \frac{(-2)^{\underline{k}}}{k}.$$

2. **(8 bodova)**
   Definirajte particiju prirodnog broja $n \in \mathbb{N}$. Za particiju $(5, 3, 1)$ odredite topovski polinom i sve particije koje su joj topovski ekvivalentne.

3. **(8 bodova)**
   Definirajte Stirlingove brojeve druge vrste $\left\{ {n \atop k} \right\}$. Dokažite da vrijedi
   $$\left\{ {n \atop 3} \right\} = \frac{1}{2}(3^{n-1} - 2^n + 1)\,.$$

4. **(9 bodova)**
   Koliko ima grafova sa skupom vrhova $V = \{1, 2, \ldots, n\}$ koji nemaju izoliranih vrhova? Za vrh kažemo da je izoliran ako nije incidentan niti s jednim bridom.
   Uputa: upotrijebite formulu uključivanja-isključivanja.

5. **(15 bodova)**
   (a) Definirajte klasičnu Möbiusovu funkciju $\mu : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$.
   (b) Neka su $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Dokažite: ako vrijedi $f(m) = \sum\limits_{d|m} g(d)$, $\forall m \in \mathbb{N}$, onda vrijedi $g(m) = \sum\limits_{d|m} f(\frac{m}{d})\mu(d)$, $\forall m \in \mathbb{N}$.
   (c) Objasnite vezu Möbiusove funkcije parcijalno uređenog skupa $(D(n), |\,)$ s klasičnom Möbiusovom funkcijom. Nacrtajte Hasseov dijagram za $n = 20$ i napišite čemu je jednako $\mu(2, 5)$, $\mu(1, 4)$, $\mu(2, 4)$ i $\mu(2, 20)$.

6. **(9 bodova)**
   U supermarketu na odjelu voća prodaju se lubenice, banane, mango, šljive i mandarine. Neka je a_n broj načina na koji možemo kupiti n komada voća tako da budu zadovoljeni sljedeći uvjeti:

   - broj lubenica je 0 ili 1,
   - broj banana je paran,
   - broj manga je 0, 1 ili 2,
   - broj šljiva je neparan, i
   - broj mandarina je djeljiv s 3.

   Voćke iste vrste smatramo identičnima. Napišite funkciju izvodnicu niza (a_n) i odredite joj zatvoreni oblik. Razvojem u red izvedite formulu za a_n.

7. **(12 bodova)**

(a) Kombinatorno dokažite $\dfrac{1}{(1-z)^{m+1}} = \sum_{n\geq 0} \binom{n+m}{m} z^n$. Za dokaz specijalizacijom binomnog reda ne dobivaju se bodovi!

(b) Ako je $G(z) = \sum_{n\geq 0} g_n z^n$ multiplikativni inverz od $F(z) = \dfrac{1}{(1-z)^{m+1}}$ u prstenu $\mathbb{C}[[z]]$, odredite koeficijente g_n.

M. Bašić i V. Krčadinac

Obrazložite sve svoje tvrdnje! Nije dozvoljeno koristiti ništa osim pribora za pisanje i vlastitih praznih papira.