KOMBINATORIKA – 2. kolokvij, 28.1.2019.

1. **(7 bodova)**

   U jednoj obitelji roditelji imaju četvero djece. Svatko od njih šestero će pokloniti jedan poklon za Božić nekom drugom članu obitelji, pri čemu će svaki roditelj dati poklon nekom djetetu. Na koliko načina je to moguće?

2. **(8 bodova)**

   Young-Fibonaccijev parcijalno uređeni skup se sastoji od konačnih nizova kojima su znamenke 1 ili 2, a neposredni sljedbenici niza s se dobivaju tako da nizu s prvu jedinicu promijenimo u dvojku ili umetnemo jedinicu na bilo koje mjesto prije prve jedinice (ako s nema jedinica, jedinicu možemo umetnuti na bilo koje mjesto). Na primjer, jedan lanac u tom parcijalnom uređaju je $1 - 2 - 21 - 121 - 221$.

   (a) Nacrtajte Hasseov dijagram za sve nizove s koji se nalaze između 1 i 221 i odredite jedan maksimalan antilanac.

   (b) Odredite $\mu(1, 221)$.

   (c) Je li segment $[1, 221]$ iz (a) dijelu izomorfan uređaju na skupu djelitelja D_n za neki prirodan broj n?

3. **(7 bodova)**

   (a) Definirajte Möbiusovu funkciju μ konačnog parcijalno uređenog skupa $P = (X, \leq)$.

   (b) Definirajte što je lanac u P, duljina lanca i predznak lanca.

   (c) Dokažite da za sve $x, y \in X$ vrijedi $\mu(x, y) = \sum\limits_{L \in S_{x,y}} \operatorname{sgn}(L)$, pri čemu je $S_{x,y}$ skup svih lanaca od x do y.

4. **(6 bodova)**

   Neka je a_n broj n-članih podmultiskupova multiskupa $\{A^\infty, B^{10}, C^5\}$. Odredite zatvorenu formulu za funkciju izvodnicu $F(z) = \sum\limits_{n \geq 0} a_n z^n$. S pomoću funkcije izvodnice izračunajte broj 10-članih podmultiskupova.

5. **(7 bodova)**

   Zatvorena formula za funkciju izvodnicu Fibonaccijevih brojeva je $F(z) = \dfrac{z}{1 - z - z^2}$.

   (a) Ima li $F(z)$ multiplikativni inverz u prstenu formalnih redova potencija $\mathbb{C}[[z]]$? Odgovor obrazložite!

   (b) Neka je $G(z)$ kompozicijski inverz od $F(z)$ u prstenu $\mathbb{C}[[z]]$. Odredite zatvorenu formulu za $G(z)$.

   (c) S pomoću Lagrangeove inverzije odredite formulu za koeficijente g_n u razvoju $G(z) = \sum\limits_{n \geq 1} g_n z^n$.

M. Bašić i V. Krčadinac

Obrazložite sve svoje tvrdnje! Nije dozvoljeno koristiti ništa osim pribora za pisanje i vlastitih praznih papira. Predajte odvojeno prva dva od zadnja tri zadatka. Rezultati će biti objavljeni do kraja tjedna, a žalbe će biti u ponedjeljak, 4.2.2019. u 11 sati.