KOMBINATORIKA – 1. kolokvij

19. studenoga 2018.

1. Metodom repertoara odredite rješenje rekurzivnog problema
$$f(1) = 1, \quad f(n+1) = 3f(n) + (n+1)\cdot 2^n, \quad \text{za sve } n \in \mathbb{N}.$$

2. Koristeći diskretni račun izračunajte sumu. Uputa: $x^2 = x^{\underline{2}} + x^{\underline{1}}$.
$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(i+j)^2$$

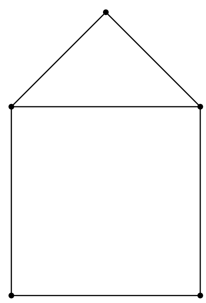
3. (a) Za particiju $(3,3,1,1)$ odredite topovski polinom i sve particije koje su joj topovski ekvivalentne.

   (b) Neka su $k \leqslant n$ prirodni brojevi. Odredite broj načina da na ploču $2n\times 2n$ stavimo $2n$ topova koji se ne napadaju tako da točno k topova bude na donjoj lijevoj $n\times n$ četvrtini ploče.

4. Definirajte Stirlingove brojeve prve vrste $\left[{n \atop k}\right]$ i harmonijske brojeve H_n. Dokažite da vrijedi $\left[{n \atop 2}\right] = (n-1)!\cdot H_{n-1}$.

5. Definirajte Stirlingove brojeve druge vrste $\left\{{n \atop k}\right\}$. Dokažite kombinatorno jednakost polinoma $x^n = \sum\limits_{k=0}^{n} \left\{{n \atop k}\right\} x^{\underline{k}}$. Za dokaz indukcijom ne dobivaju se bodovi!

6. Neka je G jednostavan graf. Definirajte sparivanje u grafu G i "matching polinom" $M(G,x)$. Dokažite da za svaki brid $e = uv$ grafa G vrijedi
$$M(G,x) = x\cdot M(G\setminus\{u,v\}) + M(G\setminus e, x).$$
Koristeći se tom rekurzijom izračunajte $M(G,x)$ za graf prikazan na slici desno.



M. Bašić i V. Krčadinac

Obrazložite sve svoje tvrdnje! Zadaci vrijede redom $6+6+7+5+5+6$ bodova. Nije dozvoljeno koristiti ništa osim pribora za pisanje i vlastitih praznih papira. Predajte odvojeno prva tri od zadnja tri zadatka!