Metoda konačnih elemenata

Predavanja

Mladen Jurak

15. siječnja 2004.

Sadržaj

1

Uvod

U uvodnom poglavlju želimo objasniti metodu konačnih elemenata na vrlo jednostavnoj jednodimenzionalnoj rubnoj zadaći. Jednostavnost zadaće omogućava da se bez tehničkih poteškoća izlože osnovni elementi matematičke teorije. Nedostatak tog pristupa je u tome što nije moguće prezentirati sve elemente važne za implementaciju metode u punoj općenitosti. Pored toga cilj nam je motivirati uvođenje prostora Soboljeva.

Neka je zadana funkcija $f\colon (0,1) \to \mathbb{R}$. Promatramo sljedeću zadaću: treba naći funkciju $u\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ koja zadovoljava

$$\begin{cases} -\dfrac{d^2u}{dx^2} = f & \text{na } (0,1) \\ u(0) = 0, & u'(1) = 0. \end{cases} \tag{1.1}$$

Iako rješenje zadaće (1.1) možemo izraziti jednostavnom formulom korisno je postaviti pitanje precizne definicije rješenja.

1.1 Varijacijska formulacija

Da bismo precizirali smisao rješenja moramo uvesti neke funkcijske prostore. Svi prostori koje ćemo uvesti imaju strukturu linearnog prostora u odnosu na uobičajeno zbrajanje funkcija i množenja skalarom, tako da to nadalje nećemo naglašavati.

Neka $\Omega \subset \mathbb{R}$ otvoren skup, a $\overline{\Omega}$ njegov zatvarač. Tada definiramo:

$$\begin{aligned} C(\Omega) &= \text{ prostor svih neprekidnih funkcija } u\colon \Omega \to \mathbb{R} \\ C(\overline{\Omega}) &= \text{ prostor svih uniformno neprekidnih funkcija } u\colon \Omega \to \mathbb{R} \\ C^k(\Omega) &= \text{ prostor svih } k\text{-puta neprekidno derivabilnih funkcija } u\colon \Omega \to \mathbb{R} \\ C^k(\overline{\Omega}) &= \text{ prostor funkcija } u\colon \Omega \to \mathbb{R} \text{ za koje je } \frac{d^ju}{dx^j} \in C(\overline{\Omega}) \text{ za } j = 0,1,\dots,k. \end{aligned}$$

Ako je $f \in C(0,1)$, onda funkciju $u \in C^2(0,1) \cap C^1([0,1])$ koja zadovoljava rubne uvjete $(1.1)_2$ i diferencijalnu jednadžbu $(1.1)_1$ zadovoljava u svakoj točki $x \in (0,1)$ nazivamo **klasično rješenje**.

U fizikalnim promjenama funkcija f ne mora nužno biti neprekidna. Na primjer, moguće je imati na desnoj strani funkciju

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{za } x < \frac{1}{2} \\ 1 & \text{za } x \geq \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Što je rješenje zadaće (1.1) u tom slučaju? Ono evidentno nije funkcija iz $C^2(0,1)$ već rješenje treba tražiti u prostoru funkcija koje imaju po dijelovima neprekidnu drugu derivaciju. U točki prekida desne strane, $x = 1/2$, druga derivacija ne mora biti definirana, i diferencijalna jednadžba u toj točki tada nije zadovoljena.

Ako idemo korak dalje, postavlja se pitanje koliko je moguće smanjiti glatkoću desne strane f, a da još uvijek možemo na smislen način definirati rješenje problema (1.1)? Odgovor je u varijacijskoj formulaciji rubne zadaća.

Neka je u klasično rješenje zadaće (1.1). Odaberimo funkciju $v \in C^1([0,1])$ takvu da je $v(0) = 0$ i s njom pomnožimo jednadžbu $(1.1)_1$. Nakon integracije dobivamo

$$-\int_0^1 u''(x)v(x)\,dx = \int_0^1 f(x)v(x)\,dx$$

Parcijalnom integracijom u prvom integralu dobivamo:

$$-u'(1)v(1) + u'(0)v(0) + \int_0^1 u'(x)v'(x)\,dx = \int_0^1 f(x)v(x)\,dx.$$

Zbog $v(0) = 0$ i $u'(1) = 0$ izlazi

$$\int_0^1 u'(x)v'(x)\,dx = \int_0^1 f(x)v(x)\,dx, \quad \forall v \in C^1([0,1]) \text{ takvo da je } v(0) = 0.$$

Dobivena se jednadžba naziva **varijacijska** stoga što vrijedi *za svako* $v \in C^1([0,1])$ takvo da je $v(0) = 0$.

Zapisat ćemo dobivenu varijacijsku zadaću u malo apstraktnijoj formi. Prvo uvodima linearan prostor funkcija

$$V = \{\phi \in C^1([0,1]) \colon v(0) = 0\},$$

te funkcionale

$$a \colon V \times V \to \mathbb{R}, \quad F \colon V \to \mathbb{R}$$

definirane formulama:

$$a(u,v) = \int_0^1 u'(x)v'(x)\,dx, \tag{1.2}$$

$$F(v) = \int_0^1 f(x)v(x)\,dx. \tag{1.3}$$

Evidentno je F linearan funkcional, odnosno zadovoljava

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R},\ \forall u, v \in V, \quad F(\alpha u + \beta v) = \alpha F(u) + \beta F(v).$$

Funkcional $a(\cdot,\cdot)$ je bilinearna forma (ili bilinearni funkcional), što znači da je linearan funkcional u svakoj varijabli posebno. Preciznije,

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R},\ \forall u, v, w \in V, \quad a(\alpha u + \beta v, w) = \alpha a(u, w) + \beta a(v, w),$$
$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R},\ \forall u, v, w \in V, \quad a(u, \alpha v + \beta w) = \alpha a(u, v) + \beta a(v, w).$$

Varijacijska formulacija zadaće (1.1) sada prima oblik

$$\begin{cases} \text{naći } u \in V \\ a(u, v) = F(v), \quad \forall v \in V. \end{cases} \tag{1.4}$$

Funkciju v iz varijacijske jednadžbe nazivamo test funkcija.

Lema 1.1 Neka je $f \in C([0,1])$ i $u \in C^2([0,1])$ rješenje zadaće (1.4). Tada je u klasično rješenje zadaće (1.1).

Dokaz. Zbog pretpostavljene glatkoće u varijacijskoj jednadžbi možemo izvršiti parcijalnu integraciju.

$$\int_0^1 \left[(u'(x)v(x))' - u''(x)v(x)\right] dx = \int_0^1 f(x)v(x)\, dx, \quad \forall v \in V. \tag{1.5}$$

Odaberemo li test funkciju $v \in V$ koja zadovoljava $v(0) = v(1) = 0$, dobivamo

$$\int_0^1 (u''(x) + f(x))v(x)\, dx = 0 \quad \forall v \in C^1([0,1]),\ v(0) = v(1) = 0.$$

Funkcija $w = u'' + f$ je iz $C([0,1])$. Kada bi bila različita od nule, onda bi morao postojati interval $(x_0, x_1) \subset (0,1)$ na kome je strogo pozitivna ili strogo negativna. Uzmimo, b.s.o., da postoji jedan takav interval na kome je w strogo pozitivna i definirajmo test funkciju

$$v(x) = \begin{cases} (x - x_0)^2 (x - x_1)^2 & \text{za } x_0 < x < x_1 \\ 0 & \text{inače.} \end{cases}$$

Kako je $v(0) = v(1) = 0$ dobivamo

$$\int_{x_0}^{x_1} w(x)v(x)\, dx = 0,$$

no budući da je podintegralna funkcija stogo pozitivna, dobili smo kontradikciju i zaključujemo da je nužno $w \equiv 0$. Time smo dokazali da je diferencijalna jednadžba zadovoljena u svakoj točki $x \in (0,1)$. Vratimo se sada u (1.5) gdje uzimamo proizvoljnu funkciju $v \in V$ i dobivamo

$$u'(1)v(1) - u'(0)v(0) = \int_0^1 (u''(x) + f(x))v(x)\,dx = 0,$$

gdje zadnja jednakost slijedi iz do sada dokazanog. Kako je $v(0) = 0$, dovoljno je uzeti test funkciju koja zadovoljava $v(1) = 1$ da bismo zaključili da je $u'(1) = 0$; zbog $u \in V$, automatski je zadovoljeno $u(0) = 0$ i time su rubni uvjeti zadovoljeni. □

Napomena. Pokazali smo da varijacijska formulacija sadrži sve informacije o rubnoj zadaći kao i klasična. Pri tome se u varijacijskoj formulaciji javljaju samo derivacije prvog reda, što ju čini općenitijom od klasične. □

Napomena. Dirchletov rubni uvjet, $u(0) = 0$, u varijacijskoj formulaciji je ugrađen u prostor V, pa se stoga naziva i *esencijalni rubni uvjet*. Neumannov rubni uvjet, $u'(1) = 0$, zadovoljen je implicitno samom varijacijskom jednadžbom, pa ga nazivamo i *prirodni rubni uvjet*. □

Lema 1.1 nam govori da je varijacijska zadaća (1.4) generalizacija rubne zadaće (1.1). Stoga rješenje zadaće (1.4) nazivamo *poopćeno* (ili *slabo*) rješenje zadaće (1.1). Slabo rješenje ima smisla za svaku funkciju f za koju je linearni funkcional (1.3) dobro definiran i neprekidan, što ćemo precizirati kasnije.

1.2 Egzistencija rješenja varijacijske jednadžbe

Da bismo vidjeli pod kojim uvjetima varijacijska jednadžba (1.4) ima jedinstveno rješenje trebamo problem postaviti u okviru funkcionalne analize.

Prije svega, uočimo da je prostor V beskonačnodimenzionalan linearan prostor. Da bismo mogli koristiti standardne rezultate funkcionalne analize moramo postaviti zahtjev da je V potpun normiran prostor. To znači da je na V definirana norma, koju ćemo označavati s $\|\cdot\|_V$, te da u njemu svaki Cauchyjev niz konvergira (potpunost). Funkcijski prostori koji su vezani uz linearne diferencijalne jednadžbe obično imaju strukturu potpunog unitarnog prostora. To je prostor u kojem je definiran skalarni produkt, kojeg označavamo s $(\cdot,\cdot)$, a pripadna norma je dana formulom $\|u\|_V = \sqrt{(u,u)}$. U toj normi prostor mora biti potpun.

Standardna terminologija funkcionalne analize je sljedeća: potpun normiran prostor naziva se Banachov prostor, a potpun unitaran prostor je Hilbertov prostor. Osnovne definicije i rezulatati funkcionalne analize koji su nam potrebni dani su u Dodatku B.

Dualni prostor prostora V je prostor svih linearnih i neprekidnih funkcionala $F\colon V \to \mathbb{R}$. To je linearan normiran prostor koji označavamo V', a normu definiramo formulom

$$\|F\|_{V'} = \sup\{|F(v)|\colon v \in V,\ \|v\|_V \le 1\}.$$

On je potpun čak ako V to nije.

Uobičajeno je primjenu funkcionala $F \in V'$ na nekom elementu označavati oštrim zagradama

$$F(v) = \langle F, v\rangle_{V',V}.$$

Oznake prostora se ispuštaju kad je jasno o kojim se prostorima radi. Uočimo još da je po definiciji dualne norme

$$|\langle F, v\rangle_{V',V}| \leq \|F\|_{V'}\|v\|_V.$$

Bilinearna forma $a(\cdot,\cdot)$ definira jedinstven linearan operator

$$A\colon V \to V'$$

pomoću formule

$$\forall u, v \in V, \quad \langle Au, v\rangle_{V',V} = a(u, v).$$

Stoga, zadaću (1.4) možemo zapisati u obliku operatorske jednadžbe

$$Au = F. \tag{1.6}$$

Problem (1.6) je **dobro postavljen** ili **korektan** ako ima jedinstveno rješenje u koje neprekidno ovisi o desnoj strani F. To znači da operator A mora biti bijekcija, a inverz A^{-1} neprekidan operator. Prema teoremu o otvorenom preslikavanju (vidi S. Kurepa [9], str. 389) neprekidnost bijektivnog operatora A povlači neprekidnost inverznog operatora, pa stoga dolazimo do sljedećeg zaključka: Problem (1.6) je dobro postavljen ako je operator A neprekidna bijekcija.

Prostor svih neprekidnih linearnih operatora $A\colon V \to V'$ označava se $\mathcal{L}(V, V')$. To je linearan prostor u koji se uvodi operatorska norma

$$\|A\| = \sup\{\|Av\|_{V'}\colon v \in V,\ \|v\|_V \leq 1\}.$$

Ako je V potpun, onda je i $\mathcal{L}(V, V')$ potpun prostor.

Ograničenost (=neprekidnost) linearnog operatora A bit će osigurana ako imamo ograničenost bilinearne forme. Pri tome kažemo da je bilinearna forma $a\colon V \times V \to \mathbb{R}$ ograničena ako postoji konstanta M, takva da vrijedi

$$\forall u, v \in V, \quad |a(u, v)| \leq M\|u\|_V\|v\|_V. \tag{1.7}$$

Iz (1.7) se lako pokazije da za pripadni operator A vrijedi $\|A\| \leq M$. Nadalje, potrebno je osigurati injektivnost operatora A. Jedan prirodan i jednostavan uvjet na formu $a(\cdot,\cdot)$ koji osigurava injektivnost je uvjet **koercitivnosti**: postoji konstanta $\alpha > 0$ takva da je

$$\forall v \in V, \quad \alpha\|v\|_V^2 \leq a(v, v). \tag{1.8}$$

Iz (1.8) slijedi

$$\alpha\|v\|_V^2 \leq a(v, v) = \langle Av, v\rangle_{V',V} \leq \|Av\|_{V'}\|v\|_V,$$

što povlači da za svako $v \in V$ vrijedi $\alpha\|v\|_V \leq \|Av\|_{V'}$. Iz te nejednakosti lako slijedi injektivnost operatora A i na isti način injektivnost adjungiranog operatora, te zatvorenost slike operatora A. Tada prema Banachovom teoremu o zatvorenoj slici dobivamo surjektivnost operatora A (za detalje vidi H. Brezis [?], II.7). Tako dolazimo do sljedećeg zaključka:

Zaključak. Neka su ispunjeni sljedeći uvjeti:

- Prostor V je Banachov;
- $a\colon V \times V \to \mathbb{R}$ je bilinearna forma koja zadovoljava uvjet ograničenosti (1.7) i uvjet koercitivnosti (1.8);
- $F\colon V \to \mathbb{R}$ linearan i neprekidan funkcional.

Tada varijacijska jednadžba (1.4) ima jedinstveno rješenje $u \in V$. $\square$

Zaključak do kojeg smo došli naziva se Lax-Milgramova lema i kasnije će biti dokazana u potpunosti. Na ovom smo mjestu jedino htjeli pokazati da su uvjeti Lax-Milgramove leme prirodni zahtjevi (s matematičke strane gledano) koje treba postaviti na elemente varijacijske jednadžbe (1.4).

1.3 Prostori Soboljeva

Vratimo se sada našem polaznom primjeru i provjerimo možemo li zadovoljiti gornje zahtjeve.

U prostor $V = \{\phi \in C^1([0,1])\colon \phi(0) = 0\}$ prirodno je uvesti normu

$$\|\phi\| = \sup_{0\leq x\leq 1} |\phi(x)| + \sup_{0\leq x\leq 1} |\phi'(x)|,$$

uz koji je on potpun. Zatim je lako pokazati da je uz tu normu bilinearna forma $a(\cdot,\cdot)$ ograničen:

$$\forall u, v \in V, \quad |a(u,v)| \leq \|u\|\|v\|.$$

Nasuprot tome, ne postoji konstanta α takva da je

$$a(u,u) = \int_0^1 u'(x)^2\,dx \geq \alpha\|u\|^2 \geq \alpha \sup_{0\leq x\leq 1} |u'(x)|^2.$$

Zadatak. Konstruirajte niz funkcija (u_n) iz prostora V za koji vrijedi

$$\int_0^1 u_n'(x)^2\,dx \to 0 \;\text{ kada } n \to \infty,$$
$$\sup_{0\leq x\leq 1} |u_n'(x)| = 1, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \;\square$$

Problem koji se ovdje javlja je u tome što je prirodna norma prostora V suviše jaka. Varijacijska formulacija nam diktira normu integralnog oblika.

Uvedimo prostor

$$L^2(0,1) = \{\phi\colon (0,1) \to \mathbb{R}\colon \int_0^1 \phi^2(x)\,dx < +\infty\}.$$

To je prostor svih kvadratno integrabilnih funkcija i u njemu dobro definiran skalarni produkt

$$(\phi,\psi)_{L^2(0,1)} = \int_0^1 \phi(x)\psi(x)\,dx,$$

te pripadna norma

$$\|\phi\|_{L^2(0,1)} = \left(\int_0^1 \phi^2(x)\,dx\right)^{1/2}. \tag{1.9}$$

Prostor $L^2(0,1)$ s ovom normom je Hilbertov.

Napomena. Teorija $L^2(0,1)$-prostora se oslanja na Lebesgueovu teoriju integracije. Formulom (1.9) definirana je norma na prostoru svih klasa ekvivalencije skoro svuda jednakih funkcija (u odnosu na Lebesgueovu mjeru). Prema tome, elementi $L^2(0,1)$-prostora nisu funkcije nego klase ekvivalencija skoro svuda jednakih funkcija. Ta se tehnička komplikacija može izbjeći tako da se $L^2(0,1)$ promatra kao prostor funkcija, a da se uzima da su dvije funkcije jednake ako su jednake svuda osim na skupu (Lebesgueove) mjere nula. Uz takav dogovor ne možemo govoriti o vrijednosti funkcije u točki ili na bilo kojem skupu mjere nula. □

Zadatak. Pokažite da za svake dvije funkcije $\phi,\psi \in L^2(0,1)$ vrijedi Cauchyjeva nejednakost

$$\left|\int_0^1 \phi(x)\psi(x)\,dx\right| \le \left(\int_0^1 \phi^2(x)\,dx\right)^{1/2}\left(\int_0^1 \psi^2(x)\,dx\right)^{1/2}.$$

Prostor $L^2(0,1)$ će biti zamjena za $C([0,1])$. Prostor $C^1([0,1])$ zamjenjujemo prostorom

$$H^1(0,1) = \{\phi \in L^2(0,1)\colon \int_0^1 \phi'(x)^2\,dx < +\infty\}.$$

To je prostor kvadratno integrabilnih funkcija koje imaju kvadratno integrabilnu derivaciju. U pitanje kako precizno definirati derivaciju funkcije iz $L^2(0,1)$ ovdje nećemo ulaziti (vidi Dodatak C).

U prostoru $H^1(0,1)$ definiramo skalarni produkt

$$(\phi,\psi)_{H^1(0,1)} = \int_0^1 \phi(x)\psi(x)\,dx + \int_0^1 \phi'(x)\psi'(x)\,dx,$$

i pripadnu normu

$$\|\phi\|_{H^1(0,1)} = \left(\int_0^1 \phi(x)^2\,dx + \int_0^1 \phi'(x)^2\,dx\right)^{1/2}. \tag{1.10}$$

Pokazuje se da je $H^1(0,1)$ s ovim skalarnim produktom Hilbertov prostor. To jedan od prostora iz familije prostora Soboljeva.

Reformulirajmo sada varijacijsku jednadžbu (1.4) tako da za prostor V uzmemo

$$V = \{\phi \in H^1(0,1) \colon \phi(0) = 0\}. \tag{1.11}$$

To je Hilbertov prostor s normom prostora $H^1(0,1)$. Štoviše, u njemu možemo uzeti ekvivalentnu normu

$$\|\phi\| = \left(\int_0^1 \phi'(x)^2 \, dx \right)^{1/2}. \tag{1.12}$$

Lema 1.2 Za svaku funkciju $\phi \in H^1(0,1)$, za koju je $\phi(0) = 0$, vrijedi Poincaréova nejednakost

$$\|\phi\|_{L^2(0,1)} \le \|\phi'\|_{L^2(0,1)}. \tag{1.13}$$

Dokaz. Za svako $\phi \in V$ imamo

$$\phi(x) = \phi(x) - \phi(0) = \int_0^x \phi'(t)\, dt \le \left(\int_0^x 1^2 \, dx \right)^{1/2} \left(\int_0^x \phi'(t)^2 \, dt \right)^{1/2},$$

gdje smo iskoristili Cauchyjevu nejednakost. Time dobivamo

$$|\phi(x)| \le \left(\int_0^x \phi'(t)^2 \, dt \right)^{1/2}$$

pa kvadriranjem i integriranjem izlazi

$$\int_0^1 \phi(x)^2 \, dx \le \int_0^1 \int_0^x \phi'(t)^2 \, dt dx \le \int_0^1 \phi'(x)^2 \, dx. \quad \square$$

Iz (1.13) lako slijedi ekvivalencija normi (1.10) i (1.12), tj. vrijedi

$$\forall v \in V, \quad \|v\| \le \|v\|_{H^1(0,1)} \le 2\|v\|.$$

Sada kada imamo prostor V s normom (1.12) s lakoćom dokazujemo:

$$|a(u,v)| = |\int_0^1 u'(x)v'(x)\, dx \le \|u'\|_{L^2(0,1)} \|v'\|_{L^2(0,1)} = \|u\|\|v\|,$$

$$a(v,v) = \int_0^1 v'(x)^2 \, dx = \|v\|^2,$$

Pretpostavimo li da je $f \in L^2(0,1)$ dobivamo neprekidnost linearnog funkcionala F:

$$\begin{aligned} |F(v)| = |\int_0^1 f(x)v(x)\, dx &\le \left(\int_0^1 f^2(x)\, dx \right)^{1/2} \left(\int_0^1 v^2(x)\, dx \right)^{1/2} \\ &= \|f\|_{L^2(0,1)} \|v\|_{L^2(0,1)} \le \|f\|_{L^2(0,1)} \|v\|. \end{aligned}$$

U zadnjoj nejednakosti koristili smo ekvivalenciju normi (1.10) i (1.12) na prostoru V. Dakle, uz promijenjeni osnovni prostor s lakoćom se pokazuje da je varijacijska zadaća korektno postavljena.

Zaključak. Prelaskom na varijacijsku formulaciju rubne zadaće proširili smo pojam rješenja rubne zadaće. Rješenje varijacijske zadaće nazivamo slabim rješenjem zadaće postavljene u diferencijalnom obliku. Na varijacijsku zadaću možemo primijeniti teoreme funkcionalne analize koji na relativno jednostavan način daju korektnost zadaće, pod uvjetom da je funkcijski prostor u kome tražimo rješenje ispravno odabran. To nas vodi do toga da prostore neprekidno derivabilnih funkcija zamijenimo prostorima Soboljeva. Istodobno dobivamo i nove, slabije, uvjete na funkciju $f(x)$ uz koju je slabo rješenje zadaće (1.1) dobro definirano.

Napomena. Analogno kao $H^1(0,1)$ definiraju se prostori Soboljeva višeg reda:

$$H^k(0,1) = \{\phi \in L^2(0,1) \colon \phi', \phi'', \dots, \phi^{(k)} \in L^2(0,1)\}.$$

Pripadna norma je

$$\|\phi\|_{H^k(0,1)} = \left(\int_0^1 \phi(x)^2\,dx + \sum_{i=1}^k \int_0^1 \phi^{(i)}(x)^2\,dx\right)^{1/2}. \;\square$$

Zadatak. Dokažite Poincaréovu nejednakost za funkcije iz $H^1(0,1)$ koje se poništavaju u $x = 1$. $\square$

Zadatak. Dokažite da za funkcije $\phi \in H^1(a,b)$, $-\infty < a < b < \infty$, koje se poništavaju u $x = a$ ili $x = b$ vrijedi Poincaréova nejednakost

$$\|\phi\|_{L^2(a,b)} \le C\|\phi'\|_{L^2(a,b)}.$$

Koliko iznosi konstanta C?

Napomena. Varijacijske jednadžbe sa simetričnom bilinearnom formom mogu se interpretirati kao Eulerove jednadžbe za odgovarajući funkcional energije. Preciznije, ako je bilinearna forma $a \colon V \times V \to \mathbb{R}$ simetrična, odnosno,

$$\forall u, v \in V, \quad a(u,v) = a(v,u),$$

onda varijacijskoj jednadžbi (1.4) možemo pridružiti funkcional energije

$$J(v) = \frac{1}{2}a(v,v) - F(v).$$

Varijacija funkcionala je

$$\frac{d}{dt}J(u+tv)\big|_{t=0} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}a(u+tv, u+tv) - F(u+tv)\right)_{t=0} = a(u,v) - F(v) = 0,$$

ako je $u \in V$ rješenje varijacijske zadaće (1.4). Stoga rješenje varijacijske zadaće možemo interpretirati kao minimim funkcionala energije (za detalje vidi Poglavlje 2). $\square$

1.4 Varijacijska aproksimacija

Varijacijska formulacija rubne zadaće za diferencijalnu jednadžbu vrlo je pogodna za numeričku aproksimaciju. Rekapitulirajmo prvo on što je do sada učinjeno.

Problem (1.1) reformulirali smo u obliku

$$\begin{cases} \text{naći } u \in V \\ a(u,v) = F(v), \quad \forall v \in V. \end{cases}$$

gdje je

- V beskonačnodimenzionalan Hilbertov prostor zadan s (1.11), i s normom (1.12);
- $a(\cdot,\cdot)$ je bilinearna, ograničena i koercitivna forma zadana s (1.2);
- $F \in V'$ funkcional zadan s (1.3), pri čemu je $f \in L^2(0,1)$.

Da bismo aproksimirali rješenje ovoe zadaće uvodimo konačnodimenzionalni prostor $S \subset V$ i formiramo novu varijacijsku zadaću:

$$\begin{cases} \text{naći } u_S \in S \\ a(u_S,v) = F(v), \quad \forall v \in S. \end{cases} \tag{1.14}$$

Dobiveni problem je konačnodimenzionalan pa se njegovo rješenje može efektivno izračunati. Opisani postupak naziva se varijacijska aproksimacija.

Lema 1.3 Za $f \in L^2(0,1)$ zadaća (1.14) ima jedinstveno rješenje.

Dokaz. Neka je $\{\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n\}$ baza u S (n=dim(S)). Tada je

$$u_S(x) = \sum_{j=1}^{n} U_j \phi_j(x).$$

Uzimajući test funkciju $v = \phi_i$ u zadaći (1.14), dobivamo

$$\sum_{j=1}^{n} U_j a(\phi_j, \phi_i) = F(\phi_i), \quad i = 1, \ldots, n. \tag{1.15}$$

Uvedemo li oznake

$$\mathbf{U} = (U_j) \in \mathbb{R}^n, \ \mathbf{F} = (F_j) \in \mathbb{R}^n, \ F_j = F(\phi_j), \ \mathbf{K} = (K_{i,j}), \ K_{i,j} = a(\phi_j, \phi_i),$$

onda (1.15) možemo zapisati kao sustav linearnih algebarskih jednadžbi

$$\mathbf{KU} = \mathbf{F}.$$

Dobiveni sustav ima jedinstveno rješenje ako i samo ako je matrica **K** ima trivijalan nul potprostor (teorem o rangu i defektu). Pretpostavimo suprotno, da **K** ima netrivijalan vektor u nul-potprostoru, recimo **V**, i formirajmo funkciju

$$v(x) = \sum_{j=1}^{n} V_j \phi_j(x).$$

Tada iz $\mathbf{KV} = 0$ slijedi

$$a(v, \phi_i) = 0 \quad \text{za } i = 1, \dots, n,$$

dobivamo $a(v, v) = 0$, što povlači $\|v\| = 0$, zbog koercitivnosti bilinearne forme. Sada imamo:

$$\|v\| = 0 \quad \Rightarrow \quad \int_0^1 v'(x)^2 \, dx = 0 \quad \Rightarrow \quad v'(x) = 0 \quad \text{za skoro svako } x \in (0, 1).$$

Stoga je v konstanta i uvjet $v(0) = 0$ daje $v \equiv 0$. To je kontradikcija s pretpostavkom da je vektor **V** netrivijalan. Dakle, **K** je regularna matrica. □

Napomena. Korak u kome smo zaključili da iz $v' \equiv 0$ slijedi da je v konstanta nije posve trivijalan za funkcije iz $H^1(0, 1)$, jer derivacija nije klasična. □

Napomena. Matrica **K** se tradicionalno naziva matrica krutosti. □

Zadatak. Pokažite da je matrica **K** simetrična i pozitivno definitna. □

1.5 Ocjena greške aproksimacije

Željeli bismo ocijeniti s kojom točnosti rješenje zadaće (1.14) aproksimira rješenje zadaće (**??**), odnosno htjeli bismo ocijeniti grešku aproksimacije $u - u_S$. U toj ocjeni osnovnu ulogu ima svojstvo ortogonalnosti koje izlazi iz toga što je $S \subset V$ (konformnost aproksimacije). Do njega dolazimo oduzimanjem jednadžbi

$$\begin{aligned} a(u, v) &= F(v), \quad \forall v \in S \subset V \\ a(u_S, v) &= F(v), \quad \forall v \in S, \end{aligned}$$

te dobivamo

$$a(u - u_S, v) = 0, \quad \forall v \in S. \tag{1.16}$$

Uočimo da je bilinearna forma $a(\cdot, \cdot)$ simetrična, tj da vrijedi

$$\forall u, v \in V, \quad a(u, v) = a(v, u),$$

pa zbog koercitivnosti ona ima sva svojstva skalarnog produkta. Stoga je

$$\|v\|_E = \sqrt{a(v, v)}$$

dobro definirana norma koju nazivamo **energetska norma**. Kako za svaki skalarni produkt vrijedi Cauchyjeva nejednakost imamo

$$\forall u, v \in V, \quad |a(u,v)| \leq \|u\|_E \|v\|_E. \tag{1.17}$$

Koristeći ortogonalnost (1.16) i Cauchyjevu nejednakost, za proizvoljno $v \in S$ dobivamo:

$$\begin{aligned}
\|u - u_S\|_E^2 &= a(u - u_S, u - u_S) \\
&= a(u - u_S, u - v) + a(u - u_S, v - u_S) \\
&= a(u - u_S, u - v) \qquad \text{(ortogonalnost)} \\
&\leq \|u - u_S\|_E \|u - v\|_E.
\end{aligned}$$

Time smo dobili ocjenu

$$\forall v \in S, \quad \|u - u_S\|_E \leq \|u - v\|_E.$$

Uzimanjem infimuma po svim $v \in S$ dobivamo

Teorem 1.1 Neka je $u \in V$ rješenje varijacijske zadaće (1.4), a $u_S \in S$ rješenje zadaće (1.14). Tada je

$$\|u - u_S\|_E \leq \inf\{\|u - v\|_E \colon v \in S\}.$$

Teorem 1.1 kaže da je varijacijska aproksimacija ujedno najbolja aproksimacija u energetskoj normi. Infimum na desnoj strani se naravno postiže u $v = u_S$. Štoviše, za potpunu ocjenu greške aproksimacije treba samo vidjeti kako dobro prostor S aprosimira funkcije iz prostora V.

1.6 Konstrukcija konačnodimenzionalnog prostora S

Metoda konačnih elemenata bazira se varijacijskoj aproksimaciji, a karakterizira ju specifičan izbor konačnodimenzionalnog prostora S. Općenito metoda konstrukcije prostora S je sljedeća: domena u kojoj je postavljena rubna zadaća razbije se na konačno mnogo podskupova jednostavne geometrije: segmenata u jednoj dimenziji, trokuta ili pravokutnika u dvije, tetraedara u tri itd. Takav rastav domene naziva se *triangulacija*. Prostor S sastoji se tada od funkcija koje su na svakom elemetu triangulacije polinomi određenog stupnja, a globalno su neprekidni. Takav izbor dozvoljava konstrukciju baze koja ima povoljna numerička svojstva.

Napomena. Pri aproksimaciji diferencijalnih jednadžbi četvrtog reda obično se traži da funkcije iz prosotra S imaju neprekidne prve parcijalne derivacije. S druge strane, postoji klasa metoda konačnih elemenata koje koriste prostor S čije funkcije nisu globalno neprekidne. $\Box$

Uvedimo najjednostavniji primjer prostora S koji se koristi u metodi konačnih elemenata. Uzmimo da je zadana jedna particija segmenta $[0,1]$ (triangulacija)

$$0 = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = 1.$$

Prostor S definiramo kao prostor svih funkcija $v(x)$ koje zadovoljavaju sljedeća tri svojstva:

- $v \in C([0,1])$;
- $v\big|_{[x_{i-1},x_i]}$ je afina funkcija za sve $i = 1, 2, \dots, n$;
- $v(0) = 0$.

Dakle, S je prostor po dijelovima afinih funkcija. Lako se pokazuje da je $S \subset H^1(0,1)$, tj. da je naša aproksimacija konformna.

Prvi zadatak je konstruirati bazu prostora $\{\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n\}$. Standardna baza je sastavljena od *krovića*:

$$\phi_i(x) = \begin{cases} 0 & x \notin (x_{i-1}, x_{i+1}) \\ \dfrac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} & x \in [x_{i-1}, x_i] \cap [0,1] \\ \dfrac{x_{i+1} - x}{x_{i+1} - x_i} & x \in [x_i, x_{i+1}] \cap [0,1] \end{cases}$$

ili jednostavnije, $\phi_i(x)$ je funkcija iz S sa svojstvom

$$\phi_i(x_j) = \delta_{i,j},$$

za sve $i, j = 1, 2, \dots, n$. Linearna nezavisnost takvih funkcija je evidentna. Lako je vidjeti da se svaka funkcija $v \in S$ može na jedinstven način napisati u obliku

$$v(x) = \sum_{i=1}^{n} V_i \phi_i(x),$$

gdje je $V_i = v(x_i)$. Deriviranjem dobivamo

$$v'(x) = \sum_{i=1}^{n} V_i \phi_i'(x) = \text{ po dijelovima konstantna funkcija}$$

pa je stoga $v' \in L^2(0,1)$ i time smo provjerili da je $S \subset H^1(0,1)$.

Uz prostor S definira se i interpolacijski operator. Za svaku funkciju $v \in C([0,1]) \cap V$ definiramo funkciju $v_I \in S$ formulom

$$v_I(x) = \sum_{i=1}^{n} v(x_i)\phi_i(x).$$

Tu smo evidentno interpolirali funkciju v u čvorovima mreže pomoću afinih funkcija. Interpolacijski operator $\mathcal{I}\colon C([0,1]) \cap V \to S$ definira se formulom $\mathcal{I}v = v_I$. On ima važnu ulogu u ocjeni veličine

$$\inf\{\|u - v\|_E \colon v \in S\},$$

budući da koristeći ocjenu

$$\inf\{\|u - v\|_E \colon v \in S\} \leq \|u - u_I\|_E,$$

ocjenu greške svodimo na ocjenu greške interpolacije.

Teorem 1.2 Neka je $u \in H^2(0,1) \cap V$ i $h = \max_{1\leq i\leq n}(x_i - x_{i-1})$. Tada postoji konstanta C, neovisna o h i u, takva da je

$$\|u - u_I\|_E \leq Ch\|u''\|_{L^2(0,1)}.$$

Dokaz. Ako pogledamo definiciju normi, dovoljno je za svako $j = 1, \ldots, n$ dokazati

$$\int_{x_{j-1}}^{x_j} |(u - u_I)'(x)|^2\,dx \leq c(x_j - x_{j-1})^2 \int_{x_{j-1}}^{x_j} |u''(x)|^2\,dx.$$

Tvrdnja se dobije sumiranjem po j. Označimo $e(x) = u(x) - u_I(x)$. Kako je u_I afina funkcija, prethodna nejednakost je ekvivalentna s

$$\int_{x_{j-1}}^{x_j} |e'(x)|^2\,dx \leq c(x_j - x_{j-1})^2 \int_{x_{j-1}}^{x_j} |e''(x)|^2\,dx.$$

Napravimo li zamjenu varijabli

$$x = x_{j-1} + y(x_j - x_{j-1}), \quad \tilde{e}(y) = e(x_{j-1} + y(x_j - x_{j-1})),$$

izlazi

$$\int_0^1 |\tilde{e}'(y)|^2\,d \leq c\int_0^1 |e''(y)|^2\,dy. \tag{1.18}$$

Potrebno je dokazati samo posljednju nejednakost. Prethodna onda slijedi zamjenom varijabli. Takav se postupak često koristi pa je dobio ime argument skaliranja.

Da bismo dokazali (1.18) uočimo da je $\tilde{e}(0) = \tilde{e}(1) = 0$ (tu koristimo činjenicu da je u_I interpoland funkcije u) . Po Rolleovom teoremu postoji točka $\xi \in (0,1)$ u kojoj je $\tilde{e}'(\xi) = 0$. Stoga je

$$\tilde{e}'(y) = \int_\xi^y \tilde{e}''(t)\,dt.$$

Pomoću Cauchyjeve nejednakosti izlazi

$$\begin{aligned} |\tilde{e}'(y)| = \left|\int_\xi^y \tilde{e}''(t)\,dt\right| &\leq \left(\int_\xi^y 1^2\,dt\right)^{1/2} \left(\int_\xi^y \tilde{e}''(t)^2\,dt\right)^{1/2} \\ &\leq |y-\xi|^{1/2} \left(\int_0^1 \tilde{e}''(t)^2\,dt\right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Uzmemo li u obzir da je

$$\max_{0\leq\xi\leq 1} \int_0^1 |y-\xi|\,dy = \frac{1}{2}, \tag{1.19}$$

integriranjem dobivamo

$$\int_0^1 |\tilde{e}'(y)|^2\,dy \leq \int_0^1 |y-\xi|\,dy \left(\int_0^1 \tilde{e}''(t)^2\,dt\right) \leq \frac{1}{2}\int_0^1 \tilde{e}''(t)^2\,dt.$$

Time je (1.18) dokazano s $c = 1/2$. □

Zadatak. Dokažite (1.19). □

Sada možemo formulirati osnovni rezultat o grešci aproksimacije.

Teorem 1.3 Neka je $u \in H^2(0,1) \cap V$ rješenje zadaće (1.4), a u_S rješenje zadaće (1.14). Tada postoji konstanta C, neovisna o $h = \max_{1\leq i\leq n}(x_i - x_{i-1})$ i u, takva da je

$$\|u - u_S\|_E \leq Ch\|u''\|_{L^2(0,1)}.$$

Dokaz. Pomoću Teorema 1.1 i Teorema 1.2 dobiva se

$$\|u - u_S\|_E \leq \inf\{\|u - v\|_E \colon v \in S\} \leq \|u - u_I\|_E \leq Ch\|u''\|_{L^2(0,1)}. \ \square$$

1.7 Argument dualnosti

Teorem 1.3 rješava problem konvergencije metode konačnih elemenata u energetskoj normi. Podsjetimo se

$$\|u\|_E = \|u'\|_{L^2(0,1)}.$$

Dakle radi se o konvergenciji derivacije. Ali što možemo reći o ocjeni greške u $L^2(0,1)$ normi? Ta bi ocjena trebala biti bolja od ocjene za derivaciju. Iz Poincaréove nejednakosti (1.13) i Teorema 1.3 odmah dobivamo ocjenu

$$\|u - u_S\|_{L^2(0,1)} \le Ch\|u''\|_{L^2(0,1)},$$

no pokazat ćemo da vrijedi jača ocjena.

Tehnika koja se naziva argument dualnosti dozvoljava izvod precizne ocjene greške u $L^2(0,1)$ normi. U njoj se prvo definira tzv. dualni problem:

$$\begin{cases} -w'' = u - u_S & \text{na } (0,1) \\ w(0) = 0, & w'(1) = 0. \end{cases} \tag{1.20}$$

Nadalje, potrebno je uvesti određenu pretpostavku regularnosti. U ovom slučaju pretpostavljamo da zadaća (1.20) ima rješenje u $H^2(0,1)$ i da je diferencijalna jednadžba zadovoljena skoro svuda na $(0,1)$. U jednodimenzionalnom slučaju to je evidentno jer je $u - u_S \in C([0,1])$ pa (1.20) ima klasično rješenje. Sada imamo:

$$\begin{aligned} \|u - u_S\|^2_{L^2(0,1)} &= \int_0^1 (u - u_S)(u - u_S)\, dx = -\int_0^1 (u - u_S)w''\, dx \\ &= -\int_0^1 ((u - u_S)w')'\, dx + \int_0^1 (u - u_S)'w'\, dx \\ &= -(u - u_S)(1)w'(1) + (u - u_S)(0)w'(0) + \int_0^1 (u - u_S)'w'\, dx \\ &= \int_0^1 (u - u_S)'w'\, dx = a(u - u_S, w) \end{aligned}$$

gdje smo iskoristili $w'(1) = 0$ i $u(0) = u_S(0) = 0$. Koristeći relaciju ortogonalnosti (1.16) dobivamo za svako $v \in S$

$$\|u - u_S\|^2_{L^2(0,1)} = a(u - u_S, w - v) \le \|u - u_S\|_E \|w - v\|_E.$$

To ćemo pisati u obliku

$$\|u - u_S\|_{L^2(0,1)} \le \|u - u_S\|_E \frac{\|w - v\|_E}{\|u - u_S\|_{L^2}}.$$

Kako je $-w'' = u - u_S$, a $v \in S$ proizvoljno, imamo

$$\|u - u_S\|_{L^2(0,1)} \le \|u - u_S\|_E \inf_{v \in S} \frac{\|w - v\|_E}{\|w''\|_{L^2}}.$$

Primijenjujući Teorem 1.2 na funkciju w dobivamo

$$\inf_{v \in S} \frac{\|w - v\|_E}{\|w''\|_{L^2}} \le \frac{\|w - w_I\|_E}{\|w''\|_{L^2}} \le Ch.$$

Time smo dobili

$$\|u - u_S\|_{L^2(0,1)} \le Ch\|u - u_S\|_E,$$

pa još jedna primjena Teorema 1.3 daje

$$\|u - u_S\|_{L^2(0,1)} \le Ch^2\|u''\|_{L^2(0,1)}. \tag{1.21}$$

Konvergencija u $L^2(0,1)$ normi je dakle kvadratična.

1.8 Uniformna ocjena

Željeli bismo imati ocjene u normama koje nisu integralne. Na primjer, uzmimo normu

$$\|v\|_\infty = \sup_{0\le x\le 1} |v(x)|.$$

U tu svrhu se koristi Greenova funkcija za diferencijalni operator. Tehnika je dosta složena u slučaju parcijalne diferencijalne jednadžbe, no kako je naš diferencijalni operator naprosto druga derivacija, ovdje je vrlo jednostavna. U našem primjeru Greenova funkcija je familija funkcija (x je parametar)

$$g_x(t) = \begin{cases} t & \text{za } t < x, \\ x & \text{za } t \ge x \end{cases}$$

To je funkcija iz prostora V pa imamo za proizvoljno $v \in V$

$$a(v, g_x) = \int_0^1 v'(t)g_x'(t)\,dt = \int_0^x v'(t)\,dt = v(x).$$

Primijenjujući tu relaciju na $v = u - u_S$, slijedi

$$(u - u_S)(x) = a(u - u_S, g_x).$$

Uočimo sada da za $x = x_i$ funkcija g_x pripada prostoru S, pa koristeći relaciju ortogonalnosti (1.16) dobivamo

$$(u - u_S)(x_i) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Dakle $u_S = u_I$, odnosno, rješenje problema (1.14) je interpoland točnog rješenja. Sada nam treba odgovarajuća ocjena za grešku interpolacije u max-normi. Takva se greška može izvesti po analogiji s dokazom Teorema 1.2.

Zadatak. Pokažite da vrijedi sljedeća tvrdnja:

Neka je $u \in H^2(0,1) \cap V$, funkcija s ograničenom drugom derivacijom i $h = \max_{1\le i\le n}(x_i - x_{i-1})$. Tada postoji konstanta C, neovisna o h i u, takva da je

$$\|u - u_I\|_{\max} \le Ch^2\|u''\|_{\max}. \quad \square$$

Budući da je $u_S = u_I$ dobivamo ocjenu greške

$$\|u - u_S\|_{\max} \le Ch^2\|u''\|_{\max}.$$

1.9 O implementaciji

U implementaciji metode konačnih elemenata na zadaću (1.4) prvo je u domenu $(0,1)$ potrebno uvesti mrežu, odnosno "triangulaciju". U jednoj dimenziji to je naprosto niz točaka

$$0 = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = 1.$$

Mreža je obično ekvidistantna, ali ako imamo određene informacje o rješenju, ona može biti finija na mjestima gdje se rješenje brže mijenja.

Konstruiranoj mreži pridružujemo nodalnu bazu $\{\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n\}$ po dijelovima afinih funkcija, definiranih svojstvom

$$\phi_i(x_j) = \delta_{i,j}, \quad \forall ij, = 1, \ldots, n.$$

Aproksimativno rješenje je oblika

$$u_S(x) = \sum_{j=1}^{n} U_j \phi_j(x),$$

pri čemu vektor $\mathbf{U} = (U_j) \in \mathbb{R}^n$ dobivamo rješavanjem sustava

$$\sum_{j=1}^{n} U_j a(\phi_j, \phi_i) = F(\phi_i), \quad i = 1, \ldots, n.$$

Matrica sustava je

$$\mathbf{K} = (K_{i,j}) \in \mathbb{R}^{n\times n},\ K_{i,j} = a(\phi_j, \phi_i) = \int_0^1 \phi_j'(x)\phi_i'(x)\,dx,$$

a vektor desne strane je

$$\mathbf{F} = (F_j) \in \mathbb{R}^n,\ F_j = F(\phi_j) = \int_0^1 f(x)\phi_i(x)\,dx.$$

Implementacija metode se sastoji od faze formiranje sustava i njegovog rješavanje. Ovdje ćemo se koncentrirati na formiranje sustava.

Formiranje sustav i vektora desne strane vrši se *po elementima*. Elementom nazivamo svaki segment $I_j = [x_{j-1}, x_j]$ i koristimo rastav

$$K_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} \int_{I_k} \phi_j'(x)\phi_i'(x)\,dx, \quad F_i = \sum_{k=1}^{n} \int_{I_k} f(x)\phi_i(x)\,dx.$$

Proces asembliranja ima ovu formu:

$K_{i,j} = 0,\ F_i = 0$

for $k = 1, 2, \ldots, n$ **do**
  $K_{i,j} = K_{i,j} + \int_{I_k} \phi'_j(x)\phi'_i(x)\,dx$
  $F_i = F_i + \int_{I_k} f(x)\phi_i(x)\,dx$
end for

Točke x_j nazivamo nodalne točke. Svaki element I_k ima dvije nodalne točke: x_{k-1} i x_k ($I_k = [x_{k-1}, x_k]$). Indeks k je *globalni indeks* nodalne točke x_k. Pomoću njega ona se identificira u polju koje sadrži sve nodalne točke. U svakom elementu nodalne točke elementa dobivaju lokalne indekse. Na primjer, možemo se dogovoriti da lijevi rub segmenta I_k nosi indeks 0, a desni indeks 1. Time smo implicitno zadali preslikavanje lokalnih u globalne indekse. U našem slučaju ono je dano formulom

$$n(k, j) = k + j - 1,$$

gdje je prvi argument indeks elementa (k), a drugi lokalni indeks nodalne točke (j).

Restrikcije baznih funkcija na neki element I_k identički su jednake nuli za sve funkcije osim one s indeksima $k-1$ i k (na I_1 samo ϕ_1 ima netrivijalnu restrikciju). Netrivijalne restrikcije dviju baznih funkcija nazivamo lokalnim baznim funkcijama. Za njih ćemo uvesi nove oznake

$$\psi_0 = \phi_{k-1}\big|_{I_k}, \quad \psi_1 = \phi_k\big|_{I_k}.$$

One naravno ovise o element I_k, a indeksirali smo ih pomoću lokalnih indeksa nodalnih točaka: funkcija koja je jednaka 1 u j-toj nodalnoj točki nosi indeks j.

Pri implementaciji metode lokalne bazne funkcije se rijetko koriste neposredno. Umjesto toga uvodi se referentni element $I = [0, 1]$. Svaki konačni element dane mreže može se dobiti afinim preslikavanjem referentnog elementa. Za k-ti elemet očito imamo

$$T_k \colon [0, 1] \to I_k, \quad T_k(\hat{x}) = x_{k-1} + \hat{x}(x_k - x_{k-1}),$$

gdje smo varijablu na referentnom elementu označili s $\hat{x}$. Inverzno preslikavanje dano je formulom

$$T_k^{-1}(x) = \frac{x - x_{k-1}}{x_k - x_{k-1}}.$$

Na referentnom elementu definiramo lokalne bazne finkcije

$$\hat{\psi}_0(\hat{x}) = 1 - \hat{x}, \quad \hat{\psi}_1(\hat{x}) = \hat{x}.$$

Lokalne bazne funkcije na proizvoljnom elementu dobivaju se iz lokalnih baznih funkcija na referentnom elementu zamjenom varijabli: na elementu I_k

$$\psi_0(x) = \hat{\psi}_0(T_k^{-1}(x)) = \frac{x_k - x}{x_k - x_{k-1}}, \quad \psi_1(x) = \hat{\psi}_1(T_k^{-1}(x)) = \frac{x - x_{k-1}}{x_k - x_{k-1}}.$$

Računanje sada organiziramo na sljedeći način. Na svakom ćemo elementu izračunati sve relevanten integrale: na I_k računamo

$$\text{za } i,j=0,1: \quad k_{i,j}=\int_{I_k}\psi_j'(x)\psi_i'(x)\,dx=\frac{1}{x_k-x_{k-1}}\int_0^1\hat{\psi}_j'(\hat{x})\hat{\psi}_i'(\hat{x})\,d\hat{x}$$

$$\text{za } i=0,1: \quad f_i=\int_{I_k}f(x)\psi_i(x)\,dx=(x_k-x_{k-1})\int_0^1 f(T_k(\hat{x}))\hat{\psi}_i(\hat{x})\,d\hat{x}.$$

U oba smo slučaja izvršili zamjenu varijabli kako bismo integraciju sveli na referentni element. U formulama se pojavljuju samo lokalne bazne funkcije na referentnom elementu. U integralu u kojem se pojavljuje funkcija f potrebno je, općenito, primijeniti neku formulu numeričke integracije. Ponovo, takva nam je formula potrebna samo na referentnom elementu.

Na svako elementu računamo lokalnu matricu krutosti $\mathbf{k}=(k_{i,j})\in\mathbb{R}^{2\times 2}$ i lokalni vektor desne strane $\mathbf{f}=(f_i)\in\mathbb{R}^2$. Pomoću tih vrijednosti asembliramo globalne veličine koristeći vezu između globalnih i lokalnih indeksa nodalnih točaka. Imamo za $i,j\in\{1,2\}$

$$\begin{aligned} k_{i,j} &= \int_{I_k}\psi_j'(x)\psi_i'(x)\,dx=\int_{I_k}\phi_{n(k,j)}'(x)\phi_{n(k,i)}'(x)\,dx,\\ f_i &= \int_{I_k}f(x)\psi_i(x)\,dx=\int_{I_k}f(x)\phi_{n(k,i)}(x)\,dx. \end{aligned}$$

Stoga procedura asembliranja ima sljedeći oblik:

$K_{i,j}=0$ za sve $i,j=1,2,\dots,n$
$F_i=0$ za sve $i=1,2,\dots,n$
for $k=1,2,\dots,n$ **do**
  for $j=0,1$ **do**
    for $i=0,1$ **do**
      $K_{n(k,i),n(k,j)}=K_{n(k,i),n(k,j)}+k_{i,j}$
    end for
    $F_{n(k,j)}=F_{n(k,j)}+f_j$
  end for
end for

Opisana procedura primijenjuje se na asembliranje sustava koji proizlaze iz metode konačnih elemenata i u višedimenzionalnim zadaćama. Sav račun (numerička integracija) je lokaliziran i provodi se na referentnom elementu: Izračunate se vrijednosti uključuju u maticu krutosti i vektor desne strane putem veze globalnih i lokalnih indeksa.

2

Varijacijska formulacija eliptičkih rubnih zadaća

U ovom poglavlju diskutiramo varijacijsku formulaciju rubnih zadaća eliptičkog tipa. Osnovni primjer takve zadaće je Dirichetova zadaća za Laplaceov operator:

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{u } \Omega \\ u = 0 & \text{na } \partial\Omega \end{cases} \tag{2.1}$$

gdje je $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ otvoren i povezan skup, a $\partial\Omega$ njegova granica. Klasično rješenje zadaće (2.1) je funkcija $u \in C^2(\Omega)$ koja diferencijalnu jednadžbu $(2.1)_1$ zadovoljava u svakoj točki domene Ω i poništava se u svakoj točki granice $\partial\Omega$. Da bi takvo rješenje postojalo evidentno desna strana f mora biti neprekidna funkcija.

Temelj metode konačnih elemenata je varijacijska, odnosno slaba formulacija zadaće (2.1) koja se dobije množenjem jednadžbe $(2.1)_1$ s test funkcijom $v \in C_0^1(\Omega)$ i integracijom po Ω:

$$-\int_\Omega \Delta u v\, dx = \int_\Omega f v\, dx.$$

Parcijalnom integracijom u integralu na lijovoj strani dobivamo

$$-\int_{\partial\Omega} (\nabla u \cdot \mathbf{n}) v\, dS + \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v\, dx = \int_\Omega f v\, dx,$$

gdje je $\mathbf{n}$ jedinična vanjska normala na $\partial\Omega$. Budući da se test funkcija v poništava na rubu domene, integral po $\partial\Omega$ propada i dobivamo

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v\, dx = \int_\Omega f v\, dx, \tag{2.2}$$

za svako $v \in C_0^1(\Omega)$. To je varijacijska formulacija rubne zadaće (2.1) . Kao i u jednodimenzionalnom slučaju (vidi Poglavlje 1) da bismo precizno zadali varijacijsku zadaću morat ćemo tražiti rješenje u prostoru Soboljeva i birati test funkcije također iz prostora Soboljeva. Nadalje, lako se provjerava da je varijacijska jedadžba (2.2) Eulerova jednadžba za funkcional energije

$$J(v) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla v|^2\,dx - \int_\Omega f v\,dx,$$

i slabo rješenje zadaće (2.1) može se interpretirati kao minimum funkcionala energije.

2.1 Problem minimizacije i varijacijska zadaća

Lema 2.1 Neka je V linearan prostor i $a\colon V\times V \to \mathbb{R}$ simetrična, pozitivna bilinearna forma, tj. $a(v,v) > 0$ za svako $0 \neq v \in V$. Zadan je još linearan funkcional $F\colon V \to \mathbb{R}$. Tada funkcional

$$J(v) = \frac{1}{2}a(v,v) - \langle F, v\rangle$$

dostiže svoj minimum na V u točki $u \in V$ ako i samo ako vrijedi

$$\forall v \in V, \quad a(u,v) = \langle F, v\rangle. \tag{2.3}$$

Štoviše, (2.3) ima najviše jedno rješenje.

Dokaz. Za $u, v \in V$ i $t \in \mathbb{R}$ imamo

$$\begin{aligned} J(u+tv) &= \frac{1}{2}a(u+tv, u+tv) - \langle F, u+tv\rangle \\ &= J(u) + t[a(u,v) - \langle F, v\rangle] + \frac{1}{2}t^2 a(v,v). \end{aligned}$$

Ako sad $u \in V$ zadovoljava (2.3), onda za $t = 1$ imamo

$$J(u+tv) = J(u) + \frac{1}{2}a(v,v) > J(u), \quad \forall v \in V,\ v \neq 0.$$

Prema tome, $u \in V$ je jedinstvena točka minimuma. Obratno, neka J ima minimum u točki $u \in V$. Tada derivacija funkcije $t \mapsto J(u+tv)$ mora biti nula u $t = 0$ (radi se o kvadratnoj funkciji). Iz

$$\frac{d}{dt}J(u+tv)\Big|_{t=0} = a(u,v) - \langle F, v\rangle$$

slijedi tvrdnja. □

Neka je L eliptički diferencijalni operator drugog reda u divergentnom obliku:

$$Lu = -\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}(a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}) + a_0 u, \tag{2.4}$$

pri čemu je matrica koeficijenata $\mathbf{A}(x) = (a_{ij}(x))_{i,j=1}^n$ simetrična i pozitivno definitna u svakoj točki $x \in \Omega$, te vrijedi

$$a_0(x) \geq 0, \quad \forall x \in \Omega.$$

Promatramo nehomogenu Dirichletovu rubnu zadaću

$$\begin{aligned} Lu &= f \quad \text{u } \Omega \\ u &= g \quad \text{na } \partial\Omega. \end{aligned}$$

Pri tome pretpostavljamo da postoji barem jedna funkcija u_0 koja se podudara na rubu s g i za koju Lu_0 postoji. Funkcija $w = u - u_0$ tada zadovoljava

$$\begin{aligned} Lw &= f_1 \quad \text{u } \Omega \\ w &= 0 \quad \text{na } \partial\Omega. \end{aligned}$$

gdje je $f_1 = f - Lu_0$. Prema tome, barem teorijski, uvijek možemo homogenizirati rubni uvjet te je stoga dovoljno promatrati homogenu rubnu zadaću.

Lema 2.2 Svako klasično rješenje rubne zadaće

$$\begin{aligned} -\sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i}(a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}) + a_0 u &= f \quad \text{u } \Omega \\ u &= 0 \quad \text{na } \partial\Omega \end{aligned}$$

je minimum funkcionala

$$J(v) = \int_\Omega \left[\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^n a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial v}{\partial x_i} + \frac{1}{2}a_0 v^2 - fv \right] dx$$

na skupu svih funkcija iz $C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$, koje se poništavaju na $\partial\Omega$.

Dokaz. Neka je

$$v \in V = \{\phi \in C^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega}) \colon \phi = 0 \text{ na } \partial\Omega\}.$$

Za klasično rješenje u tada vrijedi

$$\int_\Omega \left[-\sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i}(a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}) + a_0 u \right] v\, dx = \int_\Omega fv\, dx.$$

Parcijalnom integracijom dobivamo

$$-\sum_{i,j=1}^n \int_\Omega \frac{\partial}{\partial x_i}(a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}v)\, dx + \int_\Omega \left[\sum_{i,j=1}^n a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial v}{\partial x_i} + a_0 uv \right] dx = \int_\Omega fv\, dx$$

Zbog odabira test funkcije v, prvi integral na lijevoj strani propada, pa stoga imamo da je u ($u \in V$) rješenje varijacijske zadaće

$$a(u,v) = \langle F, v\rangle, \quad \forall v \in V,$$

gdje je

$$a(u,v) = \int_\Omega \left[\sum_{i,j=1}^n a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial v}{\partial x_i} + a_0 uv\right] dx \tag{2.5}$$

$$\langle F, v\rangle = \int_\Omega f v\, dx. \tag{2.6}$$

Prema Lemi 2.1 u je rješenje problema minimizacije. □

Napomena. Isti dokaz pokazuje da je svako rješenje varijacijske jednadžbe koje leži u $C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ ujedno i klasično rješenje. □

2.2 Egzistencija minumuma

Neka je H Hilbertov prostor s normom $\|\cdot\|$ i $a\colon H \times H \to \mathbb{R}$ simetrična bilinearna, ograničena i koercitivna forma. To znači da postoje konstante $M > 0$ i $\alpha > 0$ takve da je

$$\forall u, v \in H, \quad |a(u,v)| \le M\|u\|\|v\|,$$

$$\forall v \in H, \quad \alpha\|v\|^2 \le a(v,v).$$

Takva forma predstavlja jedan skalrni produkt, pa je formulom

$$\|v\|_a = \sqrt{a(v,v)}$$

dobro definirana norma koju nazivamo energetska norma.

Teorem 2.1 Lax-Milgramova lema (za konveksan skup) Neka je $V \subset H$ zatvoren i konveksan podskup Hilbertovog prostora H te neka je $a\colon H \times H \to \mathbb{R}$ simetrična bilinearna, ograničena i koercitivna forma. Tada za svako $F \in H'$ varijacijski problem

$$J(v) = \frac{1}{2}a(v,v) - \langle F, v\rangle \to \text{ min}$$

ima jedinstveno rješenje u V,

Dokaz.

J je ograničen odozdo zbog

$$\begin{aligned} J(v) &\ge \frac{1}{2}\alpha\|v\|^2 - \|F\|\|v\| \\ &= \frac{1}{2\alpha}(\alpha\|v\| - \|F\|)^2 - \frac{1}{2\alpha}\|F\|^2 \ge -\frac{1}{2\alpha}\|F\|^2. \end{aligned}$$

Neka je $c_1 = \inf\{J(v) \colon v \in V\}$. Po definiciji infimuma možemo naći niz (v_n) (tzv. minimizirajući niz) takav $J(v_n) \to c_1$ kada $n \to \infty$. Koristeći bilinearnost forme dobivamo

$$\begin{aligned}\alpha\|v_n - v_m\|^2 &\leq a(v_n - v_m, v_n - v_m)\\ &= 2a(v_n, v_n) + 2a(v_m, v_m) - a(v_n + v_m, v_n + v_m)\\ &= 4J(v_n) + 4J(v_m) - 8J(\frac{v_n + v_m}{2})\\ &\leq 4J(v_n) + 4J(v_m) - 8c_1.\end{aligned}$$

U zadnjoj ocjeni smo koristili konveksnost skupa V koja daje $(v_n + v_m)/2 \in V$. Sada evidentno desna strana teži u nulu kada $n, m \to \infty$ pa izlazi da je (v_n) Cauchyjev niz. Zbog potpunosti prostora, postoji $v \in H$ takav da je $u = \lim v_n$. Zatvorenost skupa V povlači da je $u \in V$, a neprekidnost funkcionala J daje

$$J(u) = \lim J(v_n) = \inf_{v \in V} J(v).$$

Jedinstvenost. Pretpostavimo da su u_1 i u_2 rješenja problema minimizacije. Niz $u_1, u_2, u_1, u_2, \ldots$ je evidentno minimizirajući niz. Prema dokazanom, on je Cauchyjev, što moše biti samo tako da je $u_1 = u_2$. □

Napomena. U dokazu smo koristili jednakost paralelograma

$$2a(v_n, v_n) + 2a(v_m, v_m) = a(v_n - v_m, v_n - v_m) + a(v_n + v_m, v_n + v_m)$$

koja slijedi iz bilinearnosti forme. □

Napomena. U specijalnom slučaju $V = H$ problem minimizacije je ekvivalentan varijacijskoj zadaći (Lema 2.1) : naći $u \in H$ tdj.

$$\forall v \in H, \quad a(u, v) = \langle F, v\rangle.$$

Napomena. Uzmimo da je $a(\cdot,\cdot) = (\cdot,\cdot)$ skalarni produkt u H. Tada nam prethodni teorem daje Rieszov teorem o reprezentaciji funkcionala: za svako $F \in H'$ postoji jedinstveni element $u \in H$ sa svojstvom

$$\forall v \in H, \quad (u, v) = \langle F, v\rangle.$$

Time je definirano preslikavanje sa H' u H koje nazivamo kanonsko ulaganje. Ono je evidentno bijekcija. □

Napomena. U konačnodimenzionalnom prostoru, umjesto koercitivnosti, dovoljno je zahtijevati da forma zadovoljava strogu pozitivnost

$$\forall v \in H,\ v \neq 0, \quad a(v, v) > 0.$$

Tad će koercitivnost slijediti iz kompaktnosti jedinične kugle. □

Definicija 2.1 Neka je L diferencijalni operator definiran u (2.4). Funkcija $u \in H_0^1(\Omega)$ je slabo rješenje homogene Dirichletove zadaće

$$
\begin{aligned}
Lu &= f \quad \text{u } \Omega \qquad (2.7)\\
u &= 0 \quad \text{na } \partial\Omega, \qquad (2.8)
\end{aligned}
$$

ako vrijedi

$$\forall v \in H_0^1(\Omega), \quad a(u,v) = \langle F, v\rangle,$$

gdje je $a(\cdot,\cdot)$ pridružena bilinearna forma definirana s (2.5), a desna strana je dana s (2.6).

Precizirajmo sada pretpostavke o operatoru L.

$$\forall i,j, \quad a_{ij} \in L^\infty(\Omega), \quad a_0 \in L^\infty(\Omega), \quad f \in L^2(\Omega), \tag{2.9}$$

$$\forall \xi \in \mathbb{R}^n,\ \forall x \in \Omega, \quad \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq \alpha \sum_{i=1}^n \xi_i^2. \tag{2.10}$$

$$\forall x \in \Omega, \quad \text{matrica } \mathbf{A}(x) = (a_{ij}(x)) \ \text{ je simetrična,} \tag{2.11}$$

$$\forall x \in \Omega, \quad a_0(x) \geq 0. \tag{2.12}$$

Teorem 2.2 Za operator L neka vrijede pretpostavke (2.9)—(2.12). Tada Dirichletova zadaća (2.7)–(2.8) ima jedinstveno slabo rješenje. Ono minimizira funkcional

$$J(v) = \frac{1}{2}a(v,v) - \langle F, v\rangle$$

na prostoru $H_0^1(\Omega)$.

Dokaz. Potrebno je provjeriti uvjete Lax-Milgramove leme. Iz simetrije matrice koeficijenata lako slijedi simetrija bilinearne forme. Da bismo provjerili ograničenost uvedimo konstantu $M = \max\{\|a_{ij}\|_{L^\infty}, \|a_0\|_{L^\infty}\}$. Imamo

$$
\begin{aligned}
\left|\sum_{i,j=1}^n \int_\Omega a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_j}\,dx\right| &\leq M \sum_{i,j=1}^n \int_\Omega |\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_j}|\,dx\\
&\leq M \sum_{i,j=1}^n (\int_\Omega |\frac{\partial u}{\partial x_i}|^2\,dx)^{1/2}(\int_\Omega |\frac{\partial v}{\partial x_j}|^2\,dx)^{1/2}\\
&\leq Mn|u|_{1,2}|v|_{1,2}.
\end{aligned}
$$

Nadalje,

$$\left|\int_\Omega a_0 uv\,dx\right| \leq M\int_\Omega |uv|\,dx \leq M\|u\|_{L^2}\|v\|_{L^2}.$$

Kombinirajući ove dvije ocjene, dobivamo

$$a(u,v) \leq C\|u\|_{1,2}\|v\|_{1,2},$$

gdje je konstanta C jednaka Mn^2.

Iz pozitivne definitnosti matrice koeficijenata slijedi

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\frac{\partial v}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_j} \geq \alpha \sum_{i=1}^{n} |\frac{\partial v}{\partial x_i}|^2.$$

Integriranjem dobivamo

$$a(v,v) \geq \alpha \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega |\frac{\partial v}{\partial x_i}|^2 \, dx = \alpha |v|_{1,2}^2.$$

Prema Poincaréovoj nejednakosti $|\cdot|_{1,2}$ i $\|\cdot\|_{1,2}$ su ekvivalentne norme na $H_0^1(\Omega)$, pa je koercitivnost dokazana. Tvrdnja teorema sada slijedi primjenom Lax-Milgramove leme i lemi o karakterizaciji varijacijske zadaće (Lema 2.1). □

2.3 Nehomogena Dirichletova zadaća

Na nehomogenu zadaću ne možemo neposredno primijeniti Lax-Milgramovu lemu već je potrebno je prvo homogenizirati rubni uvjet. Pri tome treba postaviti određene uvjete na funkciju zadanu na rubu.

Posve isto kao u dokazu Leme 2.2 pokazuje se da je klasično rješenje nehomogene Dirichletove zadaće u ujedno i rješenje varijacijske zadaće: Naći $u \in H^1(\Omega)$ tdj.

$$\forall v \in H_0^1(\Omega), \quad a(u,v) = \langle F, v\rangle, \tag{2.13}$$

$$\gamma_0(u) = g, \tag{2.14}$$

gdje je γ_0 operator traga na $\partial\Omega$. Da bi varijacjska zadaća imala rješenje nužno moramo pretpostaviti da funkcija g pripada prostoru svih tragova funkcija iz $H^1(\Omega)$. Drugim riječima pretpostavljamo da je

$$g \in H^{1/2}(\partial\Omega).$$

Iz te pretpostavke slijedi da postoji barem jedna funkcija $u_g \in H^1(\Omega)$ za koju je $\gamma_0(u_g) = g$. Funkcija $w = u - u_g \in H_0^1(\Omega)$ zadovoljava

$$\forall v \in H_0^1(\Omega), \quad a(w,v) = \langle F, v\rangle - a(u_g, v).$$

Ovo je ponovo varijacijska zadaća na koju je moguće primijeniti Lax-Milgramovu lemu. Jedini novi element je provjeriti da je desna strana linearan i neprekidan funkcional na $H_0^1(\Omega)$ (tj. da je u $H^{-1}(\Omega)$). To slijedi iz

$$\begin{aligned} |\langle F, v\rangle - a(u_g, v)| &\leq \|f\|_{L^2}\|v\|_{L^2} + M\|_g\|_{1,2}\|v\|_{1,2} \\ &\leq (\|f\|_{L^2} + M\|u_g\|_{1,2})\|v\|_{1,2}. \end{aligned}$$

Kako zadaća za w ima jedinstveno rješenje, zaključujemo da i polazna nehomogena zadaća ima rješenje $u = u_g + w$. Jedinstvnost rješenja slijedi iz toga što se razlika bilo koja dva rješenja $w = u_1 - u_2$ nalazi u $H_0^1(\Omega)$ i zadovoljava homogenu varijacijsu jednadžbu

$$\forall v \in H_0^1(\Omega), \quad a(w, v) = 0.$$

Time smo dokazali

Teorem 2.3 Neka su ispunjeni uvjeti Teorema 2.2 i neka je Ω Lipschitzova domena. Tada za svako $g \in H^{1/2}(\partial\Omega)$ varijacijska zadaća (2.13)–(2.14) ima jedinstveno rješenje u $H^1(\Omega)$.

(Regularnost granice nam je potrebna da bismo mogli govoriti o tragu funkcije.)

2.4 Neumannova i mješovita zadaća

Uzmemo li dodatnu pretpostavku da postoji $\alpha' > 0$ tdj.

$$\forall x \in \Omega, \quad a_0(x) \geq \alpha' > 0, \tag{2.15}$$

onda je forma $a(\cdot, \cdot)$ koercitivna na čitavom $H^1(\Omega)$ jer imamo ocjenu

$$a(v, v) \geq \alpha |v|_{1,2}^2 + \alpha' \|v\|_{L^2}^2 \geq \beta \|v\|_{1,2}^2,$$

gdje je $\beta = \min(\alpha, \alpha')$.

K tome, pored $f \in L^2(\Omega)$ uzmimo i $g \in L^2(\partial\Omega)$ i formirajmo funkcional

$$\langle F, v \rangle = \int_\Omega f v \, dx + \int_{\partial\Omega} g v \, dS. \tag{2.16}$$

Ako je domena Ω takva da vrijedi teorem o tragu, onda je F neprekidan linearan funkcional na $H^1(\Omega)$. Zaista, koristeći teorem o tragu dobivamo ocjenu

$$\begin{aligned} |\langle F, v \rangle| &\leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)} + \|g\|_{L^2(\partial\Omega)} \|v\|_{L^2(\partial\Omega)} \\ &\leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)} + C \|g\|_{L^2(\partial\Omega)} \|v\|_{1,2} \\ &\leq (\|f\|_{L^2(\Omega)} + C \|g\|_{L^2(\partial\Omega)}) \|v\|_{1,2}. \end{aligned}$$

Sada možemo primijeniti Lax-Milgramovu lemu pa dolazimo do sljedećeg zaključka: Pretpostavimo da je domena Ω Lipschitzova i da koeficijenti diferencijalnog operatora L zadovoljavaju uvjete (2.9)—(2.11) i (2.15). Tada funkcional

$$J(v) = \frac{1}{2} a(v, v) - \int_\Omega f v \, dx - \int_{\partial\Omega} g v \, dS$$

ima jedinstveni minimum u na $H^1(\Omega)$, koji zadovoljava varijacijsku jednadžbu

$$\forall v \in H^1(\Omega), \quad a(u,v) = \int_\Omega f v \, dx + \int_{\partial\Omega} g v \, dS. \tag{2.17}$$

Da bismo vidjeli kojoj klasičnoj zadaći odgovara ova varijacijska zadaća pretpostavit ćemo da je domena Ω dovoljno glataka, da su svi koeficijenti jednadžbe najmanje neprekidni na $\overline{\Omega}$ te da varijacijska jednadžba ima rješenje $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$. Tada u problemu (2.17) možemo izvršiti parcijalnu integraciju.

$$\begin{aligned}\int_\Omega \left[\sum_{i,j=1}^n a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial v}{\partial x_i} + a_0 uv\right] dx &= \sum_{i,j=1}^n \int_\Omega \frac{\partial}{\partial x_i}(a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j} v)\, dx \\ &+ \int_\Omega \left[-\sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i}(a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}) + a_0 u\right] v\, dx.\end{aligned}$$

Uzmemo li u obzir varijacijsku jednadžbu i iskoristimo li teorem o divergenciji u prvom integralu na desnoj strani, izlazi

$$\int_{\partial\Omega} (\sum_{i,j=1}^n a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j} n_i - g) v\, dS + \int_\Omega \left[-\sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i}(a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}) + a_0 u - f\right] v\, dx = 0,$$

gdje je $\mathbf{n} = (n_i)$ jedinična vanjska normala na $\partial\Omega$. Uzimajući test funkcije koje se poništavaju na $\partial\Omega$ dobivamo da za svaku takvu vrijedi

$$\int_\Omega \left[-\sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i}(a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}) + a_0 u - f\right] v\, dx = 0.$$

Odavde se lako pokazuje da je diferencijalna jednadžba zadovoljena u svakoj točki domene Ω, pa onda integral propada za svaki izbor test funkcije (a ne samo one koja se poništava na rubu). Iz prethodne jednakosti dobivamo

$$\int_{\partial\Omega} (\sum_{i,j=1}^n a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j} n_i - g) v\, dS = 0.$$

Odavde slijedi

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j} n_i = g \quad \text{na } \partial\Omega.$$

Time smo došli do sljedećeg zaključka: Varijacijska jednadžba (2.17) je slabo rješenje Neumannovog problema

$$\begin{cases} -\displaystyle\sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i}(a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}) + a_0 u = f & \text{u } \Omega \\ \displaystyle\sum_{i,j=1}^n a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j} n_i = g & \text{na } \partial\Omega. \end{cases}$$

Prethodni izvod ne možemo primijeniti na problem

$$\begin{cases} -\triangle u = f & \text{u } \Omega \\ \dfrac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} = g & \text{na } \partial\Omega. \end{cases}$$

budući da pripadna bilinearna forma nije koecitivna na $H^1(\Omega)$. Uočimo da je rješenje određeno do na aditivnu konstantu. Stoga je prirodno, kako bi se dobilo jedinstveno rješenje, promatrati pripadnu varijacijsku formulaciju na prostoru

$$V = \{\phi \in H^1(\Omega)\colon \int_\Omega \phi(x)\, dx = 0\}.$$

Na njemu je bilinearna forma

$$a(u, v) = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v\, dx$$

ponovo koercitivna. To slijedi iz ove varijante Poincaréove nejednakosti.

Lema 2.3 Neka je Ω ograničena Lipschitzova domena. Tada postoji konstanta C, takva da za svako $v \in H^1(\Omega)$ vrijedi

$$\|v\|_{L^2(\Omega)} \le C(|v|_{1,2;\Omega} + \left|\int_\Omega v(x)\, dx\right|).$$

Dokaz. Metodom kontradikcije. Pretpostavimo da takva konstanta ne postoji. Tada bi za svako $n \in \mathbb{N}$ postojalo $v_n \in H^1(\Omega)$ koje bi narušavalo nejednakost s konstantom $C = n$. Drugim riječima,

$$\|v_n\|_{L^2(\Omega)} > n(|v_n|_{1;\Omega} + \left|\int_\Omega v_n(x)\, dx\right|).$$

Podijelimo cijelu nejednakost sa $\|v_n\|_{L^2(\Omega)}$ i uvedimo funkciju $w_n = v_n/\|v_n\|_{L^2(\Omega)}$. Niz (w_n) nalazi se na jediničnoj sferi u $L^2(\Omega)$ i zadovoljava

$$|w_n|_{1;\Omega} + \left|\int_\Omega w_n(x)\, dx\right| < \frac{1}{n}$$

za sve $n \in \mathbb{N}$. Iz dokazanog sijedi da je niz (w_n) ograničen u $H^1(\Omega)$, pa ima slabo konvergentan podniz (w_{n_k}). Neka je $w \in H^1(\Omega)$ slabi limes tog podniza. Zbog kompaktnog ulaganja $H^1(\Omega) \subset L^2(\Omega)$ dobivamo da taj niz konvergira jako u $L^2(\Omega)$; iz činjenice da je $\|w_{n_k}\|_{L^2} = 1$, zaključujemo da je $\|w\|_{L^2} = 1$. S druge strane, po konstrukciji je

$$|w|_{1;\Omega} = \int_\Omega w(x)\, dx = 0,$$

pa je w konstanta (gradijent joj je jednak nuli) i stoga $w \equiv 0$. To je kontradikcija s $\|w\|_{L^2} = 1$. $\square$

Na osnovu ove leme lako se pokazuje da je $v \mapsto |v|_{1,2}$ ekvivalentna norma na V, pa se stoga može primijeniti Lax-Milgramova lema na problem: naći $u \in V$, takvo da

$$\forall v \in V, \quad a(u, v) = \int_\Omega fv\,dx + \int_{\partial\Omega} gv\,dS,$$

koji stoga ima jedinstveno rješenje $u \in V$. Da bi to rješenje bilo klasično, mora biti zadovoljen nužan uvjet egzistencije

$$\int_\Omega f\,dx + \int_{\partial\Omega} g\,dS = 0,$$

koji se dobiva integracijom diferencijalne jednadžbe po Ω. Tada varijacijska jednadžba vrijedi za svako $v \in H^1(\Omega)$ pa je svako glatko rješenje klasično.

Pretpostavimo, konačno, da imamo mješoviti problem. Granicu $\partial\Omega$ ćemo podijeliti u dva disjunktna podskupa

$$\partial\Omega = \overline{\Gamma_D} \cup \overline{\Gamma_N}, \quad \Gamma_D \cap \Gamma_N = \phi.$$

Na Γ_D zadajemo Dirichletov, a na Γ_N Neumannov rubni uvjet. Na primjer,

$$\begin{cases} -\triangle u = f & \text{u } \Omega \\ u = u_0 & \text{na } \Gamma_D \\ \dfrac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} = g & \text{na } \Gamma_N. \end{cases}$$

U ovom slučaju prostor V formiramo na sljedeći način. Uvedemo

$$\mathcal{V} = \{v \in C^\infty(\Omega) \cap H^1(\Omega) \colon u \ \text{ je jednako nuli na nekoj okolini skupa } \Gamma_D\}.$$

Definiramo

$$V \ \text{ je zatvarač skupa } \ \mathcal{V} \ \text{ u normi prostora } \ H^1(\Omega).$$

Uz uvjet da je površinska mjera skupa Γ_D strogo pozitivna $|\cdot|_{1,2}$ je ekvivalentna norma na V. Formulacija slabog rješenja i primjena Lax-Milgramove leme sada slijedi analogno kao u prethodnim primjerima.

Zadatak. Definirajte slabo rješenje zadaće s Robinovim rubnim uvjetom

$$\begin{cases} -\triangle u = f & \text{u } \Omega \\ \dfrac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} + \alpha u = g & \text{na } \partial\Omega. \end{cases}$$

Uz koje uvjete na $\alpha(x)$ možemo primijeniti Lax-Milgramovu lemu? $\square$

Zadatak. Pokažite da je klasično rješenje problema

$$\begin{cases} -\triangle u + a_0 u = f \quad \text{u } \Omega \\ u \geq 0, \ \dfrac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \geq 0 \quad \text{na } \partial\Omega \\ u\dfrac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} = 0 \quad \text{na } \partial\Omega, \end{cases}$$

rješenje jedne varijacijske zadaće na konveksnom skupu

$$V^+ = \{v \in H^1(\Omega) \colon \gamma(v) \geq 0 \ \text{ s.s. na } \ \partial\Omega\}.$$

(Iz teorije integracije znamo da je skup $\{\phi \in L^2(\Gamma) \colon \phi \geq 0 \text{ s.s na } \Gamma\}$ zatvoren.)
□

2.5 Nesimetrične zadaće

Diferencijalni operatori koje smo do sada promatrali vode na simetričnu bilinearnu formu. Varijacijska zadaća za takvu formu uvijek odgovara problemu minimizacije pripadnog funkcionala. Ako forma nije simetrična, onda to nije slučaj, što je lako provjeriti. Ipak tvrdnja Lax-Milgramove leme ostaje vrijediti.

Pogledajmo jedan primjer operatora koji vodi na nesimetričnu varijacijsku zadaću.

$$\begin{aligned} -\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}(a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}) + \sum_{i=1}^{n} b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + a_0 u = f \quad \text{u } \Omega \\ u = 0 \quad \text{na } \partial\Omega \end{aligned}$$

Odabrali smo homogeni Dirichletov rubni uvjet, a novost u diferencijalnom operatoru je član s derivacijama prvog reda. Pretpostavke o koeficijentima jednadžbe su sljedeće:

$$\forall i,j, \quad a_{ij}, b_i, a_0 \in L^\infty(\Omega), \quad f \in L^2(\Omega), \tag{2.18}$$

$$\forall \xi \in \mathbb{R}^n, \ \forall x \in \Omega, \quad \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq \alpha \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2. \tag{2.19}$$

$$\forall x \in \Omega, \quad \text{matrica } \mathbf{A}(x) = (a_{ij}(x)) \ \text{ je simetrična}, \tag{2.20}$$

$$\mathbf{b} = (b_i), \quad \operatorname{div} \mathbf{b} \in L^\infty(\Omega). \tag{2.21}$$

Tada u jednakosti

$$-\sum_{i,j=1}^{n} \int_\Omega \frac{\partial}{\partial x_i}(a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}) v \, dx + \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} v \, dx + \int_\Omega a_0 uv \, dx = \int_\Omega fv \, dx$$

ponovo parcijalno integriramo u prvom članu ($v \in H_0^1(\Omega)$), što nas vodi na jednadžbu

$$\sum_{i,j=1}^{n} \int_\Omega a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial v}{\partial x_i}\, dx + \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} v\, dx + \int_\Omega a_0 uv\, dx = \int_\Omega fv\, dx$$

Time dolazimo do varijacijskog problema: naći $u \in H_0^1(\Omega)$ takvo da je

$$\forall v \in H_0^1(\Omega), \quad a(u,v) = \langle F, v\rangle,$$

gdje je

$$a(u,v) = \sum_{i,j=1}^{n} \int_\Omega a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial v}{\partial x_i}\, dx + \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} v\, dx + \int_\Omega a_0 uv\, dx \tag{2.22}$$

$$\langle F, v\rangle = \int_\Omega fv\, dx. \tag{2.23}$$

Nova forma je evidentno bilinearna. Da bismo pokazali njenu neprekidnost, potrebno je samo ocijeniti dodatni član

$$\begin{aligned} \Big|\sum_{i=1}^{n} \int_\Omega b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} v\, dx\Big| &\le \max_i \|b_i\|_{L^\infty} \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega \Big|\frac{\partial u}{\partial x_i} v\Big|\, dx \\ &\le \sqrt{n} \max_i \|b_i\|_{L^\infty} |u|_{1,2} \|v\|_{L^2}. \end{aligned}$$

Uvedemo li oznaku

$$M = \max\{\|a_{ij}\|_{L^\infty}, \|a_0\|_{L^\infty}, \|b_i\|_{L^\infty}\}$$

dobivamo

$$\begin{aligned} |a(u,v)| &\le Mn(|u|_{1,2}|v|_{1,2} + |u|_{1,2}\|v\|_{L^2} + \|u\|_{L^2}\|v\|_{L^2}) \\ &\le 3Mn\|u\|_{1,2}\|v\|_{1,2}. \end{aligned}$$

Kod koercitivnosti treba isto tako ocijeniti samo drugi integral u formi $a(\cdot,\cdot)$. To se može učiniti na razne načine. Uz pretpostavku $\operatorname{div} \mathbf{b} \in L^\infty(\Omega)$ imamo

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} u\, dx &= \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} \int_\Omega b_i \frac{\partial u^2}{\partial x_i}\, dx \\ &= \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} \int_\Omega \frac{\partial}{\partial x_i}(b_i u^2)\, dx - \frac{1}{2}\int_\Omega \operatorname{div} \mathbf{b}\, u^2\, dx \\ &= -\frac{1}{2}\int_\Omega \operatorname{div} \mathbf{b}\, u^2\, dx \end{aligned}$$

gdje smo iskoristili rubni uvjet. Stoga dobivamo

$$a(u,u) \geq \alpha |u|_{1,2}^2 + \int_\Omega (a_0 - \frac{1}{2}\operatorname{div}\mathbf{b})\, u^2\, dx.$$

Prema Poincaréovoj nejednakosti postoji konstanta C_Ω, koja ovisi samo o domeni Ω, takva da je

$$\forall v \in H_0^1(\Omega), \quad \|v\|_{L^2} \leq C_\Omega |u|_{1,2}^2.$$

Pretpostavimo sada da postoji broj η takav da vrijedi:

$$\forall x \in \Omega, \quad a_0(x) - \frac{1}{2}\operatorname{div}\mathbf{b}(x) \geq -\eta. \tag{2.24}$$

Tada imamo ocjenu

$$a(u,u) \geq \alpha |u|_{1,2}^2 - \eta \|u\|_{L^2}^2 \geq (\alpha - \eta C_\Omega)|u|_{1,2}^2.$$

Time dolazimo do sljedećeg dovoljnog uvjeta koercitivnosti: ako postoji broj η takav da je

$$\alpha - \eta C_\Omega > 0, \tag{2.25}$$

i za koji vrijedi (2.24), onda je bilinearna forma (2.22) koercitivna na $H_0^1(\Omega)$.
Napomena. Jedan važan specijalan slučaj je $\operatorname{div}\mathbf{b} = 0$ i $a_0 \geq 0$. □

Bilinearna forma je evidentno nesimetrična, tj. općenito je $a(u,v) \neq a(v,u)$.

Dokaz Lax-Milgramove leme u nesimetričnom slučaju bazira se na Rieszovom teoremu o reprezentaciji funkcionala na Hilbertovom prostoru.

Teorem 2.4 (Lax-Milgramova lema) Neka je V Hilbertov prostor i $a\colon V \times V \to \mathbb{R}$ bilinearna, ograničena i koercitivna forma. Tada za svako $F \in V'$ problem

$$\begin{cases} \text{Naći} \;\; u \in V \\ \forall v \in V, \quad a(u,v) = \langle F, v \rangle \end{cases}$$

ima jedinstveno rješenje $u \in V$ i preslikavanje $F \mapsto u$ je neprekidno sa V' u V.

Dokaz. Označimo sa $((\cdot,\cdot))$ skalarni produkt u V. Prema Rieszovom teoremu o reprezentaciji funkcionala na Hilbertovom prostoru za svako $F \in V'$ postoji jedinstven element $\tau F \in V$ takav da je

$$\forall v \in V, \quad ((\tau F, v)) = \langle F, v \rangle.$$

Štoviše, to preslikavanje je izometrija jer je

$$\|\tau F\|_V = \sup_{\substack{v \in V \\ v \neq 0}} \frac{((\tau F, v))}{\|v\|_V} = \sup_{\substack{v \in V \\ v \neq 0}} \frac{\langle F, v \rangle}{\|v\|_V} = \|F\|_{V'}.$$

Prema svojstvima bilinearnosti i neprekidnosti forme $a(\cdot,\cdot)$, za fiksno $u \in V$, preslikavanje $v \mapsto a(u,v)$ je element prostora V'. Ponovo primijenjujući Rieszov teorem, dobivamo da postoji jedinstveni element $A(u) \in V$, takav da je

$$\forall v \in V, \quad ((A(u), v)) = a(u, v).$$

Time je dobro definirano preslikavanje $u \mapsto A(u)$, sa V u V, koje je evidentno linearno, pa ćemo stoga pisati Au umjesto $A(u)$.

Zbog ograničenosti bilinearne forme, operator A je neprekidan:

$$\|Au\|_V = \sup_{\substack{v\in V\\ v\neq 0}} \frac{((Au, v))}{\|v\|_V} = \sup_{\substack{v\in V\\ v\neq 0}} \frac{a(u,v)}{\|v\|_V} \leq M\|u\|_V.$$

Naš problem ima ekvivalentan zapis: Naći $u \in V$ takvo da je

$$Au = \tau F.$$

Prema tome, preostaje pokazati da je operatora A bijekcija i da je njegov inverz neprekidan.

Iz koercitivnosti slijedi

$$\forall v \in V, \quad \alpha\|v\|_V^2 \leq a(v,v) = ((Av, v)) \leq \|Av\|_V\|v\|_V,$$

odnosno

$$\forall v \in V, \quad \|Av\|_V \geq \alpha\|v\|_V. \tag{2.26}$$

Operator je stoga injektivan.

Označimo s $\mathcal{R}(A)$ sliku operatora A i pokažimo da je ona zatvorena. Ako je (Au_n) konvergentan niz, onda je on i Cauchyjev. Zbog

$$\alpha\|u_n - u_m\|_V \leq \|Au_n - Au_m\|_V$$

zaključujemo da je i niz (u_n) Cauchyjev, pa je stoga konvergentan. Neka je $u = \lim u_n$. Tada je $Au = \lim Au_n$, zbog neprekidnosti operatora A, a to znači da je slika zatvorena.

Konačno, pokažimo da je $\mathcal{R}(A)^\perp = \{0\}$. Ako je $v_0 \perp \mathcal{R}(A)$, onda je posebno $((Av_0, v_0)) = 0$, pa koercitivnost daje $v_0 = 0$. Kao posljedicu dobivamo (vidi Posljedicu B.1) da je $\mathcal{R}(A) = V$, tj. operator je surjektivan. Budući da $A^{-1}\colon V \to V$ postoji, (2.26) daje

$$\|A^{-1}v\|_V \leq \frac{1}{\alpha}\|v\|_V.$$

Sada imamo

$$\|u\|_V = \|A^{-1}\tau F\|_V \leq \frac{1}{\alpha}\|\tau F\|_V = \frac{1}{\alpha}\|F\|_{V'}.$$

□

2.6 Generalizacije

U Lax-Milgramovoj lemi prostor u kome se traži rješenje varijacijskog problema i prostor iz kojega uzimamo test funkcije su isti. To je situacija koja se redovito javlja kod zadaća eliptičkog tipa, no kod drukčijih problema može se doći od varijacijske jednadžbe u kojoj se ta dva prostora razlikuju.

Pogledajmo sljedeći problem stacionarne konvekcije:

$$\begin{aligned} \mathbf{a}\cdot\nabla u + a_0 u &= f \quad \text{u } \Omega \\ u &= \phi \quad \text{na } \partial\Omega^{in}, \end{aligned}$$

gdje je $\mathbf{a}(\mathbf{x})$ zadano polje brzine, a a_0, f i ϕ su neke zadane funkcije. Rubni uvjet je zadan samo na ulaznom dijelu granice

$$\partial\Omega^{in} = \{\mathbf{x}\in\partial\Omega\colon \mathbf{a}(\mathbf{x})\cdot\mathbf{n}(\mathbf{x}) < 0\},$$

gdje je $\mathbf{n}$ jedinična vanjska normala na $\partial\Omega$.

Varijacijsku jednadžbu formiramo množenjem s test funkcijom $v\in H^1(\Omega)$:

$$\begin{aligned} \int_\Omega (\mathbf{a}\cdot\nabla u)v\,dx &= \int_\Omega \operatorname{div}(\mathbf{a}uv)\,dx - \int_\Omega \operatorname{div}(\mathbf{a}v)u\,dx \\ &= \int_{\partial\Omega} \mathbf{a}\cdot\mathbf{n}uv\,dS - \int_\Omega \operatorname{div}(\mathbf{a}v)u\,dx. \end{aligned}$$

Time smo parcijalne derivacije s funkcije u prebacili na v. Sada je na ulaznom dijelu granice moguće uvažiti rubni uvjet $u=\phi$ pa dobivamo zadaću: naći $u\in L^2(\Omega)$ koje zadovoljava

$$\begin{aligned} -\int_\Omega \operatorname{div}(\mathbf{a}v)u\,dx &+ \int_{\partial\Omega\setminus\partial\Omega^{in}} \mathbf{a}\cdot\mathbf{n}uv\,dS + \int_\Omega a_0 uv\,dx \\ &= \int_\Omega fv\,dx - \int_{\partial\Omega^{in}} \mathbf{a}\cdot\mathbf{n}\phi v\,dS \quad \forall v\in H^1(\Omega). \end{aligned}$$

Ovdje rješenje tražimo u prostoru $L^2(\Omega)$, budući da njegove derivacije ne ulaze u varijacijsku jednadžbu, a test funkcije biramo iz prostora $H^1(\Omega)$. U apstraktnoj formulaciji imamo problem:

$$\begin{cases} u\in W \\ a(u,v) = F(v), \quad \forall v\in V, \end{cases} \tag{2.27}$$

gdje je je $W = L^2(\Omega)$, $V = H^1(\Omega)$,

$$\begin{aligned} a(u,v) &= -\int_\Omega \operatorname{div}(\mathbf{a}v)u\,dx + \int_{\partial\Omega\setminus\partial\Omega^{in}} \mathbf{a}\cdot\mathbf{n}uv\,dS + \int_\Omega a_0 uv\,dx \\ F(v) &= \int_\Omega fv\,dx - \int_{\partial\Omega^{in}} \mathbf{a}\cdot\mathbf{n}\phi v\,dS \end{aligned}$$

Vidimo da je Dirichletov rubni uvjet ušao u varijacijsku jednadžbu. Teorem sličan Lax-Milgramovj lemi daje nam uvjete na bilinearnu formu $a(\cdot,\cdot)$ i linearni funkcional F uz koje zadaća (2.27) ima jedinstveno rješenje.

Teorem 2.5 (Nečas) Neka su W i V (realni) Hilbertovi prostori s normama $\|\cdot\|_W$ i $\|\cdot\|_V$. Pretpostavimo da postoje konstante $\alpha > 0$ i M za koje bilinearna forma $a\colon W \times V \to \mathbb{R}$ zadovoljava

$$|a(w,v)| \leq M\|w\|_W\|v\|_V, \quad \forall w \in W,\ \forall v \in V$$
$$\sup_{v\in V,\, v\neq 0} \frac{a(w,v)}{\|v\|_V} \geq \alpha\|w\|_W, \quad \forall w \in W$$
$$\sup_{w\in W} a(w,v) > 0, \quad \forall v \in V,\ v \neq 0.$$

Tada za svako $F \in V'$ postoji jedinstveno rješenje $u \in W$ zadaće (2.27) koje k tome zadovoljava

$$\|u\|_W \leq \frac{1}{\alpha}\|F\|_{V'}. \tag{2.28}$$

Za dokaz vidi Quarteroni, Valli: Numerical Approximation of PDE, str.135. U slučaju $V = W$ dobivamo zaključke Lax-Milgramove leme uz slabije pretpostavke. Može se pokazati da su te pretpostavke nužne i dovoljne.

3

Varijacijska aproksimacija

Varijacijska aproksimacija je prirodan način konstrukcije konačnodimenzionalne aproksimacije varijacijske zadaće. U njoj se jednostavno prostor u kojem je zadaća postavljena aproksimira konačnodimenzionalnim potprostorom. Na tom se principu bazira Galerkinova i Petrov-Galerkinova metoda. Uzimajući aproksimativne prostore kao prostore konačnih elemenata dolazimo do metode konačnih elemenata.

3.1 Galerkinova metoda

Pretpostavljat ćemo da su uvjeti Lax-Milgramove leme zadaovoljeni. Te pretpostavke sumiramo ovdje.
Pretpostavke (A):

- V je realan Hilbertov prostor s normom $\|\cdot\|$;
- $a\colon V \times V \to \mathbb{R}$ je bilinearna forma;
- $\exists M > 0$ takvo da $\forall u, v \in V \quad |a(u,v)| \leq M\|u\|\|v\|$ (ograničenost);
- $\exists \alpha > 0$ takvo da $\forall v \in V \quad a(v,v) \geq \alpha\|v\|^2$ (koercitivnost);
- $F \in V'$.

Promatramo sljedeću apstraktnu varijacijsku zadaću:
Varijacijska zadaća (P):

$$\begin{cases} \text{Naći} \ \ u \in V \\ \forall v \in V, \quad a(u,v) = \langle F, v \rangle \end{cases}$$

Neka je $V_h \subset V$ neki konačnodimenzionalni potprostor.

Aproksimacijski problem $(P)_h$:

$$\begin{cases} \text{Naći} \;\; u_h \in V_h \\ \forall v \in V_h, \quad a(u_h, v) = \langle F, v\rangle \end{cases}$$

Osnovna ideja je sljedeća: ako imamo niz prostora $V_h \subset V$, koji sve bolje aproksimiraju prostor V, kada parametar $h \to 0$, onda možemo očekivati da će $u_h \to u$ kada $h \to 0$.

Lema 3.1 Uz pretpostavke (A) problem $(P)_h$ ima jedinstveno rješenje.

Dokaz. Neka je $\{\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n\}$ baza u V_h (n=dim(V_h)). Tada je

$$u_h(x) = \sum_{j=1}^{n} U_j \phi_j(x).$$

Uzimajući test funkciju $v = \phi_i$ u problemu $(P)_h$, dobivamo

$$\sum_{j=1}^{n} U_j a(\phi_j, \phi_i) = \langle F, \phi_i\rangle, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Uvedemo li oznake

$$\mathbf{U} = (U_j) \in \mathbb{R}^n,\ \mathbf{F} = (F_j) \in \mathbb{R}^n,\ F_j = \langle F, \phi_j\rangle,\ \mathbf{K} = (K_{i,j}),\ K_{i,j} = a(\phi_j, \phi_i),$$

onda imamo sustav linearnih algebarskih jednadžbi

$$\mathbf{KU} = \mathbf{F}.$$

Matrica $\mathbf{K}$ je pozitivno definitna. Zaista, za $\xi = (\xi_j) \in \mathbb{R}^n$ zbog koercitivnosti imamo

$$\mathbf{K}\xi \cdot \xi = \sum_{i,j=1}^{n} a(\phi_j, \phi_i)\xi_i\xi_j = a(\sum_{j=1}^{n} \xi_j\phi_j, \sum_{i=1}^{n} \xi_i\phi_i) \geq \alpha \| \sum_{i=1}^{n} \xi_i\phi_i\|^2 \geq 0.$$

Ako je $\mathbf{K}\xi \cdot \xi = 0$, onda zbog linearne nezavisnosti baznih funkcija slijedi $\xi = 0$. Kako je matrica pozitivno definitna, ona je i regularna. □

Matricu $\mathbf{K}$ tradicionalno nazivamo matrica krutosti i vidimo da koercitivnof bilinearne forme implicira njenu pozitivnu definitnost. K tome, ako je bilinearna forma simetrična, onda je i matrica krutosti simetrična.

Teorem 3.1 (Céa-ina lema) Neka su ispunjene pretpostavke (A). Neka je $u \in V$ rješenje problema (P), te $u_h \in V_h$ rješenje problema $(P)_h$. Tada je

$$\|u - u_h\| \leq C \inf_{v \in V_h} \|u - v\|.$$

Dokaz. Iz

$$
\begin{aligned}
a(u,v) &= \langle F, v\rangle, \quad \forall v \in V_h \subset V \\
a(u_h,v) &= \langle F, v\rangle, \quad \forall v \in V_h,
\end{aligned}
$$

dobivamo relaciju ortogonalnosti

$$
a(u-u_h, v) = 0, \quad \forall v \in V_h. \tag{3.1}
$$

Za proizvoljno $v \in V_h$ imamo

$$
\begin{aligned}
\alpha\|u-u_h\|^2 &\leq a(u-u_h, u-u_h) \\
&= a(u-u_h, u-v) + a(u-u_h, v-u_h) \\
&= a(u-u_h, u-v) \\
&\leq M\|u-u_h\|\|u-v\|.
\end{aligned}
$$

Time smo dobili ocjenu

$$
\forall v \in V_h, \quad \|u-u_h\| \leq \frac{M}{\alpha}\|u-v\|.
$$

Uzimanjem infimuma po svim $v \in V_h$ dobivamo tvrdnju sa $C = M/\alpha$. $\square$

U slučaju simetrične forme možemo dobiti bolju konstantu u ocjeni. Zbog ortogonalnosti imamo za proizvoljno $v \in V_h$

$$
\begin{aligned}
a(u-v, u-v) &= a(u-u_h + (u_h - v), u-u_h + (u_h-v)) \\
&= a(u-u_h, u-u_h) + 2a(u-u_h, u_h-v) + a(u_h-v, u_h-v) \\
&= a(u-u_h, u-u_h) + a(u_h-v, u_h-v)
\end{aligned}
$$

Time smo dobili optimalnu ocjenu u energetskoj normi

$$
a(u-u_h, u-u_h) = \inf_{v\in V_h} a(u-v, u-v).
$$

Odavde je

$$
\alpha\|u-u_h\|^2 \leq M\|u-v\|^2,
$$

izlazi da je za svako $v \in V_h$

$$
\|u-u_h\| \leq \sqrt{\frac{M}{\alpha}}\|u-v\|.
$$

Osnovni rezultat o konvergenciji je sljedeći.

Teorem 3.2 Neka su ispunjene pretpostavke (A) i neka prostor V ima gust potprostor $\mathcal{V} \subset V$ te neka postoji preslikavanje

$$
r_h \colon \mathcal{V} \to V_h
$$

sa svojstvom

$$\forall v \in \mathcal{V}, \quad \lim_{h \to 0} \|v - r_h(v)\| = 0. \tag{3.2}$$

Tada metoda varijacijske aproksimacije konvergira, tj.

$$\lim_{h \to 0} \|u - u_h\| = 0.$$

Dokaz. Neka je C konstanta iz prethodne leme. Za $u \in V$, rješenje problema (P) i proizvoljno $\varepsilon > 0$, zbog gustoće možemo naći $v \in \mathcal{V}$ takav da je $\|u-v\| < \varepsilon/2C$. Zbog svojstva aproksimacije, za tako odabrani v postoji $h_0 > 0$, takav da za sve $h \le h_0$ vrijedi $\|v - r_h(v)\| < \varepsilon/2C$. Sada koristeći Céa-inu lemu dobivamo

$$\|u - u_h\| \le C\|u - r_h(v)\| \le C(\|u - v\| + \|v - r_h(v)\|) < \varepsilon. \ \square$$

Varijacijska aproksimacija ima točnost reda k ako je

$$\|u - u_h\| = O(h^k),$$

kada $h \to 0$. Red točnosti ovisi o izboru potprostora V_h te o izboru norme.

Prostor V_h treba zadovoljavati dva uvjeta: 1) da dobro aproksimira prostor V; 2) da se pripadni linearni sustav lako formira i rješava. Ti su uvjeti u određenoj kontradikciji budući da će povećanje preciznosti aproksimacije uvijek voditi na veći matrični sustav koji je teže riješiti.

Teorijski važan slučaj varijacijske aproksimacije je Galerkinova metoda.

Uzmimo da je V separabilan Hilbertov prostor. Tada niz (w_n) iz V zovemo Hilbertovom bazom u V, ukoliko je ispunjeno:

- Za svako $m \ge 1$, elementi $w_1, \ldots, w_m$ su linearno nezavisni;
- Vektorski prostor razapet svim linearnim kombinacijama vektora (w_n) je gust u V.

Evidentno je da je svaki Hilbertov prostor koji ima Hilberovu bazu ujedno separabilan. Vrijedi i obrat.

Lema 3.2 Svaki separabilan Hilbertov prostor ima Hilbertovu bazu.

Dokaz. Neka je $\{v_n : n \in \mathbb{N}\}$ gust podskup u V. Niz (w_n) selektiramo na sljedeći način: w_1 je v_{j_1}, prvi element niza (v_j) različit od nule; w_2 je v_{j_2}, prvi element niza $(v_j)_{j>j_1}$, linearno nezavisan s w_1; w_3 je prvi element niza $(v_j)_{j>j_2}$, linearno nezavisan s $\{w_1, w_2\}$. I tako dalje. Lako je provjeriti da je dobiveni niz Hilbertova baza. $\square$

Neka je (w_n) Hilbertova baza u V. Galerkonova metoda sastoji se u tome da uzmemo prostor $V_m = \mathcal{L}(w_1, \ldots, w_m)$ i definiramo $u_m \in V_m$ kao rješenje problema

$$\forall v \in V_m, \quad a(u_m, v) = \langle F, v\rangle. \tag{3.3}$$

Pema Lemi 3.1 ovaj problem ima jedinstveno rješenje.

Prema dokazanom imamo sljedeći rezultat:

Teorem 3.3 Neka je V separabilan Hilbertov prostor i neka su ispunjene pretpostavke (A). Ako je $u \in V$ rješenje problema (P), a u_m rješenje problema (3.3), onda vrijedi

$$\lim_{m\to\infty} \|u - u_m\| = 0.$$

Dokaz. Treba samo vidjeti da možemo primijeniti Teorem 3.2. Uzmimo

$$h = \frac{1}{m}, \quad V_h = V_m.$$

Za prostor $\mathcal{V}$ možemo uzeti čitav V, a za operator $r_h\colon V \to V_h$, ortogonalnu projekciju. Prema svojstvima Hilbertove baza lako se vidi da je

$$\lim_{h\to 0} \|u - r_h(u)\| = 0$$

za svako $u \in V$. Teorem 3.2 sada daje zaključak. □

Galerkinova metoda se najčešće koristi za dokazivanje egzistencije rješenja pojedinih problema. U takvoj situaciji se pokazuje da je niz Galerkinovih aproksimacija konvergentan i da je funkcija na limesu traženo rješenje.

Kada je bilinearna forma simetrična može se na potprostorima V_m promatrati problem minimizacije funkcionala umjesto varijacijske jednadžbe. Pripadna metoda se tada naziva Ritz-Galerkinova metoda.

Metoda konačnih elemenata se od Galerkinove metode razlikuje po načinu izbora potprostora V_h. Osnovna karakteristika metode je razbijanje domene problema na niz jednostavnih podskupova, tzv. elemenata. Elementi mogu biti trokuti, četverokuti, tetraedri, paralelopipedi itd. Funkcije iz V_h definiraju se "po elemetima". Na svakom elementu one se biraju kao polinomi određenog stupnja (najčešće, mada ne i uvijek), a globalno se od njih traži da imaju dovoljnu glatkoću; to znači da su neprekidne, ili neprekidno derivabilne i slično. Takav pristup omogućava izbor baznih funkcija s malim nosačem, što onda daje rijetku matricu krutosti. Rijetke matrice (tj. matrice u kojima je broj elemenata različitih od nule malen u odnosu na ukupni broj elemenata) omogućavaju upotrebu iterativnih postupaka rješavanja, a to je temelj efikasnosti metode konačnih elemenata.

3.2 Petrov-Galerkinova metoda

3.3 Generalizacije

4

Konstrukcija prostora konačnih elemenata u $H^1(\Omega)$ i $H^2(\Omega)$

Promatramo linearnu varijacijsku zadaću: naći $u \in V$ takav da je

$$\forall v \in V, \quad a(u, v) = \langle F, v \rangle, \tag{4.1}$$

gdje je V Hilbertov prostor, a bilinearna forma $a(\cdot, \cdot)$ i funkcional F zadovoljavaju uvjete Lax-Milgramove leme. Aproksimacijska zadaća glasi: naći $u_h \in V_h$ takav da je

$$\forall v_h \in V_h, \quad a(u_h, v_h) = \langle F, v_h \rangle,$$

gdje je $V_h \subset V$ konačnodimenzionalan potprostor. U ovom se poglavlju bavimo konstrukcijom prostora konačnih elemenata V_h, takvog da je $V_h \subset H^1(\Omega)$ ili $V_h \subset H^2(\Omega)$.

Prvi korak u konstrukciji prostora V_h je dekompozicija (triangulacija) domene na jednostavne podskupove, uglavnom poliedre. Funkcije iz V_h su na svakom podskupu triangulacije polinomi određenog stupnja. Zatim se pokazuje da je za inkluziju $V_h \subset H^1(\Omega)$ potrebno da su funkcije iz V_h neprekidne, a za $V_h \subset H^2(\Omega)$ i prve derivacije moraju biti neprekidne. Neprekidnost se postiže pažljivim odabirom stupnjeva slobode za koje se uzimaju vrijednosti funkcije i (eventualno) njenih prvih parcijalnih derivacija u simetrično odabranim točkama. Zadavanjem svih stupnjeva slobode postižemo da je funkcija na jedinstven način definirana na svakom elementu triangulacije i neprekidnost funkcije (i njenih prvih derivacija) na granici susjednih elemenata.

4.1 Osnovna svojstva prostora konačnih elemenata

Varijacijska zadaća (4.1) postavljena je u nekoj domeni $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, za koju pretpostavljamo da je ograničena i Lipschitzova.

1. Prvi korak u konstrukciji prostora V_h je triangulacija domene Ω. Triangulacija domene Ω je svaka konačna familija $\mathcal{T}_h$ podskupova od $\overline{\Omega}$ koja ima ova svojstva:

(T1) $\overline{\Omega} = \cup_{K \in \mathcal{T}_h} K$;

(T2) Svaki $K \in \mathcal{T}_h$ je zatvoren i ima nepraznu unutrašnjost;

(T3) Za svaka dva različita $K_1, K_2 \in \mathcal{T}_h$ vrijedi $\mathrm{Int}(K_1) \cap \mathrm{Int}(K_2) = \phi$;

(T4) Svako $K \in \mathcal{T}_h$ je Lipschitzov skup.

To su minimalne pretpostavke o triangulaciji. Skupove iz $\mathcal{T}_h$ nazivamo elementima i oni su redovito jednostavni poligonalni skupovi.

2. Svakom elementu $K \in \mathcal{T}_h$ pridružujemo jedan konačnodimenzionalni prostor funkcija koji označavamo s P_K. Prostor X_h zatim definiramo kao

$$X_h = \{v \colon \overline{\Omega} \to \mathbb{R} \colon \forall K \in \mathcal{T}_h, \quad v|_K \in P_K\}.$$

Funkcije[1] iz $V_h \subset X_h$ moraju imati određenu glatkoću da bismo ih mogli koristiti u varijacijskoj aproksimaciji. Minimalno mora biti zadovoljeno $V_h \subset V$. Prema konstrukciji prostora X_h to svojstvo općenito nije ispunjeno te stoga moramo promatrati odgovarajući potprostor. Sljedeća lema kaže da je potprostor neprekidnih funkcija iz X_h zadovoljavajući za $V = H^1(\Omega)$, ako su one glatke u unutrašnjosti svakog elementa.

Lema 4.1 Neka je $P_K \subset H^1(K)$ za svako $K \in \mathcal{T}_h$ i neka je $V_h = X_h \cap C(\overline{\Omega})$. Tada je

$$\begin{aligned} &V_h \subset H^1(\Omega) \\ &V_{oh} = \{v \in V_h \colon v = 0 \ \text{ na } \ \partial\Omega\} \subset H^1_0(\Omega). \end{aligned}$$

Dokaz. Evidentno je $X_h \subset L^2(\Omega)$. Treba samo dokazati da svako $v \in V_h$ ima distribucijsku derivaciju u $L^2(\Omega)$. To znači da za $i = 1, 2, \dots, n$ postoje $v_i \in L^2(\Omega)$ takve da je

$$\forall \phi \in \mathcal{D}(\Omega), \quad \int_\Omega v \partial_i \phi \, dx = -\int_\Omega v_i \phi \, dx.$$

Parcijalnom integracijom na svakom elementu dobivamo

$$\int_K v \partial_i \phi \, dx = -\int_K \partial_i (v|_K) \phi \, dx + \int_{\partial K} v|_K \phi \, n_{i,K} \, d\sigma,$$

[1] Elementi prostora X_h, strogo govoreći, nisu funkcije jer su višeznačne na granicam elemenata. Bilo bi ispravnije pisati $X_h = \prod_{K \in \mathcal{T}_h} P_K$.

gdje je $n_{i,K}$ komponenta jedinične vanjske normale na ∂K. Sumiranjem po svim elementima dobivamo

$$\int_\Omega v\partial_i\phi\,dx = -\int_\Omega v_i\phi\,dx + \sum_{K\in\mathcal{T}_h}\int_{\partial K} v|_K\phi\, n_{i,K}\,d\sigma,$$

gdje smo v_i definirali formulom $v_i|_K = \partial_i(v|_K) \in L^2(K)$, pa je očito $v_i \in L^2(\Omega)$. Da bi v_i bila slaba derivacija, mora suma integrala po rubovima elemenata iščezavati. No to je istina jer je ϕ nula na $\partial\Omega$, a doprinosi od dva susjedna elementa se poništavaju zbog neprekidnosti funkcije v. $\square$

Analogno se dokazuje.

Lema 4.2 Neka je $P_K \subset H^2(K)$ za svako $K \in \mathcal{T}_h$ i neka je $V_h = X_h \cap C^1(\overline{\Omega})$. Tada je

$$\begin{aligned} V_h &\subset H^2(\Omega)\\ V_{oh} &= \{v \in V_h : v = 0 \text{ na } \partial\Omega\} \subset H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)\\ V_{ooh} &= \{v \in V_h : v = \frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}} = 0 \text{ na } \partial\Omega\} \subset H_0^2(\Omega). \end{aligned}$$

Uvjet neprekidnosti moguće je postići samo ako postoji određena usklađenost prostora P_K, što će voditi na nova ograničenja na elemente K i prostore P_K.

3. Sljedeći bitan element metode konačnih elementa je zahtijev da prostori P_K sadrže polinome (ili funkcije bliske polinomima). To je važno iz praktičnog razloga – jednostavnosti računaja s polinomima, ali se pokazuje i kao ključan element u dokazu teorema konvergencije.

4. Konačno, u prostoru V_h mora postojati jedna *kanonska baza* koja se sastoji od funkcija s malim nosačem. To će svojstvo voditi na matricu krutosti s vrlo malo elemenata različitih od nule, što je odlučujući element u numeričkom rješavanju dobivenog sustava.

U sljedećim sekcijama konstruiramo osnovne primjere prostora konačnih elemenata. Nakon toga ćemo pojam konačnog elementa formalizirati i uvesti pojam interpolacijskog operatora koji ima centralnu ulogu u ocjeni greške aproksimacije.

4.2 Simplicijalni elementi

Promatrat ćemo prostore dimenzije $n = 1, 2$ i 3. Kanonsku bazu u $\mathbb{R}^n$ označavamo s $(\mathbf{e}_i)_{i=1}^n$, a s $\mathbb{P}_k$ označavamo prostor svih polinoma stupnja manjeg ili jednakog k, u $\mathbb{R}^n$:

$$\mathbb{P}_k = \{p\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}\colon p(x) = \sum_{|\alpha|\le k} a_\alpha x^\alpha\},$$

gdje smo iskoristili notaciju pomoću multiindeksa (vidi Poglavlje A). Koristit ćemo i oznaku

$$\mathbb{P}_k(K) = \{p\big|_K : p \in \mathbb{P}_k\}.$$

Zadatak. $\dim(\mathbb{P}_k) = \binom{n+k}{k}$. Ako K ima neprazan interior, onda $\mathbb{P}_k$ i $\mathbb{P}_k(K)$ imaju istu dimenziju. □

Neka su $a_1, a_2, \dots, a_{n+1}$ točke u $\mathbb{R}^n$ koje ne leže u istoj hiperravnini. n-simpleks K, razapet točkama $a_1, a_2, \dots, a_{n+1}$, je konveksna ljuska točaka $a_1, \dots, a_{n+1}$:

$$K = \{x = \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i a_i : 0 \le \lambda_i \le 1, \quad 1 \le i \le n+1, \quad \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i = 1\}.$$

Točke a_i nazivamo vrhovima simpleksa.

2-simpleks je trokut, a 3-simpleks je tetraedar.

Zadatak. Neka je $a_i = (a_{ji})_{j=1}^n$. Točke $a_1, a_2, \dots, a_{n+1}$ ne leže u istoj hiperravnini ako i samo ako je matrica

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n+1} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn+1} \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \tag{4.2}$$

regularna. □

m-stranica simpleksa je svaka konveksna kombinacija od $m+1 \le n$ vrhova simpleksa. U $\mathbb{R}^3$ za $m=2$ govorimo o stranicama, a za $m=1$ o bridovima.

Baricentričke koordinate $\lambda_i = \lambda_i(x)$, $1 \le i \le n+1$ bilo koje točke $x \in \mathbb{R}^n$, u odnosu na točke $a_1, a_2, \dots, a_{n+1}$, koje ne leže u istoj hiperravnini, je jedinstveno rješenje linearnog sustava

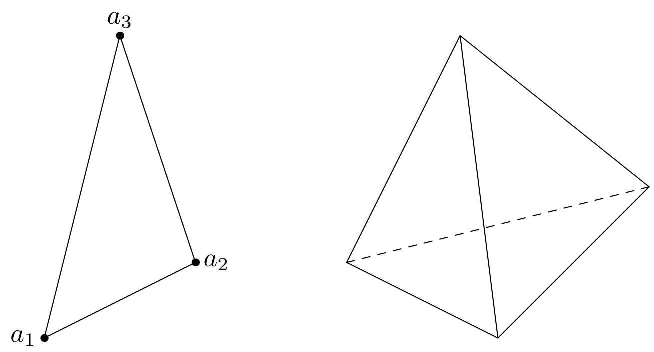
$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n+1} a_{ji}\lambda_i &= x_j, \quad 1 \le j \le n \\ \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i &= 1. \end{aligned}$$

Matrica sustava je (4.2) pa je egzistencija i jedinstvenost koordinata osigurana uvjetom nekomplanarnosti.

Zadatak. Baricentričke koordinate su afine funkcije varijabli $x_1, \dots, x_n$ (dakle, nalaze se u $\mathbb{P}_1$):

$$\lambda_i = \sum_{j=1}^{n} b_{ij}x_j + b_{in+1}, \quad 1 \le i \le n+1,$$

gdje je $B = (b_{ij})$ inverz matrice A iz (4.2). □



Slika 4.1: Simpleksi tipa (1) u $\mathbb{R}^2$ i $\mathbb{R}^3$

Najjednostavniji konačni element konstruiran nad jednim n-simpleksom je onaj u kojem je $P_K = \mathbb{P}_1(K)$. Sve funkcije iz tog prostora možemo jednostavno reprezentirati pomoću njihovih vrijednosti u vrhovima simpleksa, na osnovu sljedeće tvrdnje: svaki polinom $p(x) = \sum_{|\alpha|\leq 1} \gamma_\alpha x^\alpha$ jedinstveno je određen svojim vrijednostima u vrhovima simpleksa.

Tvrdnja je ekvivalentan sa zaključkom da za svako $\mu = (\mu_j)$ linearan sustav

$$\sum_{|\alpha|\leq 1} \gamma_\alpha (a_j)^\alpha = \mu_j, \quad 1 \leq j \leq n+1$$

ima jedno i samo jedno rješenje $(\gamma_\alpha, |\alpha| \leq 1)$. Budući da se radi o linearnom sustavu s kvadratnom matricom reda $n+1$, egzistencija i jedinstvenost rješenja su ekvivalentni. Stoga je dovoljno, na primjer, pokazati egzistenciju polinoma koji prima zadane vrijednosti u vrhovima. U tu svrhu uočimo da baricentričke koordinate zadovoljavaju

$$\lambda_i(a_j) = \delta_{ij}, \quad 1 \leq i, j \leq n+1.$$

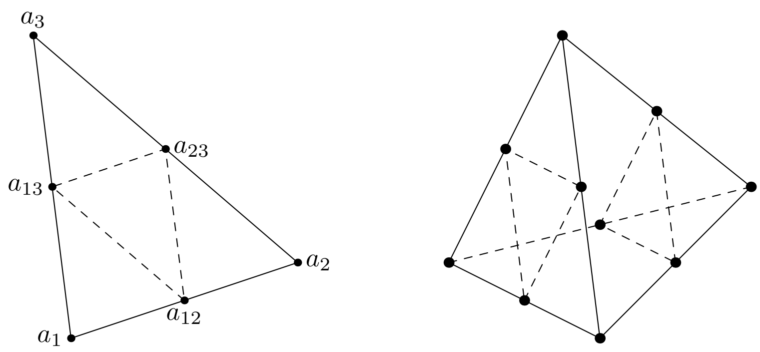
Traženi polinom očito ima oblik

$$p(x) = \sum_{i=1}^{n} p(a_i)\lambda_i(x),$$

i time je tvrdnja dokazana.

Vrijednosti $p(a_i)$ nazivaju se **stupnjevi slobode** konačnog elementa (eng. *degrees of freedom*, kraće *dofs*). Funkcije λ_i su pripadne lokalne bazne funkcije pomoću kojih ćemo dobiti kanonsku bazu. Za skup svih stupnjeva slobode elementa K koristit ćemo oznaku Σ_K; točke a_i nazivamo **nodalnim točkama** elementa.

Ovako konstruirane elemente nazivamo *n-simpleksima tipa (1)*. U $n = 2$ govorimo o trokutu tipa (1) ili *Courant-ovom trokutu*, a za $n = 3$ govorimo o tetraedru tipa (1).



Slika 4.2: Simpleksi tipa (2) u $\mathbb{R}^2$ i $\mathbb{R}^3$

n-simpleks tipa (1)
$P_K = \mathbb{P}_1(K), \quad \dim P_K = n+1$
$\Sigma_K = \{p(a_i)\colon 1 \leq i \leq n+1\}$.

n-simpleks tipa (2) sadrži sve polinome stupnja manjeg ili jednakog dva: $P_K = \mathbb{P}_2(K)$. Da bismo definirali stupnjeve slobode uvedimo dodatne nodalne točke $a_{ij} = (a_i + a_j)/2$, za $1 \leq i, j \leq n+1$. To su polovišta bridova n-simpleksa. Budući da su baricentričke koordinate afine funkcije koje u vrhovima simpleksa primaju vrijednost 0 ili 1, vidimo da je

$$\lambda_k(a_{ij}) = \frac{1}{2}(\delta_{ki} + \delta_{kj}).$$

Sada je lako uočiti da funkcije

$$\lambda_i(2\lambda_i - 1), \quad i = 1, \ldots, n+1,$$

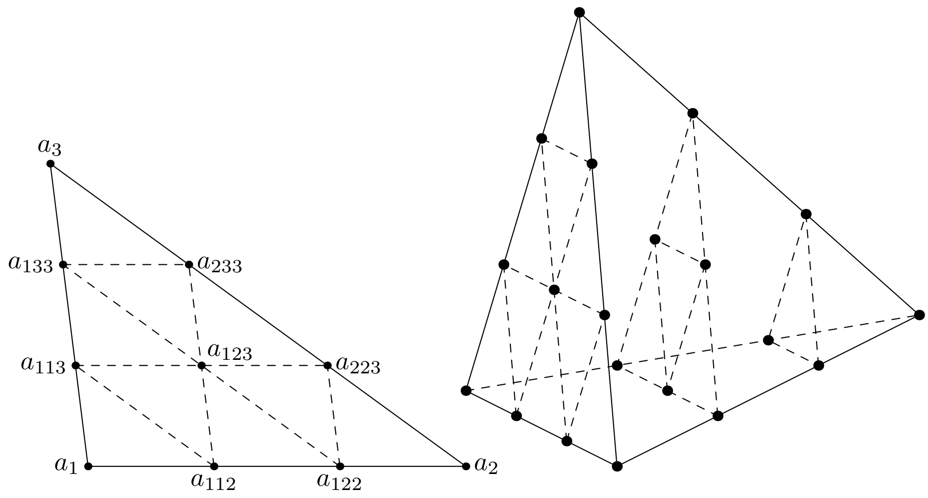
imaju svojstvo da su jednake jedan u a_i, a nula u svim ostalim a_k te a_{ij}. Nadalje funkcije

$$\lambda_i\lambda_j, \quad i < j, \;\; i, j = 1, \ldots, n+1,$$

jednake su 1/4 u a_{ij}, a nula u svim drugim točkama. Na temelju tih činjenica lako konstruiramo polinom drugog stupnja koji ima zadane vrijednosti u točkama a_i, a_{ij}. Dobivamo

$$\forall p \in \mathbb{P}_2, \quad p = \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i(2\lambda_i - 1)p(a_i) + 4 \sum_{\substack{i,j=1 \\ i<j}}^{n+1} \lambda_i\lambda_j p(a_{ij}).$$

n-simpleks tipa (2)
$P_K = \mathbb{P}_2(K), \quad \dim P_K = (n+1)(n+2)/2$
$\Sigma_K = \{p(a_i),\ 1 \leq i \leq n+1,\ p(a_{ij}),\ 1 \leq i < j \leq n+1\}$.



Slika 4.3: Simpleksi tipa (3) u $\mathbb{R}^2$ i $\mathbb{R}^3$

n-simpleksi tipa (3) definiraju se analogno. Pored vrhova simpleksa uvedu se dodatne nodalne točke:

$$a_{iij} = \frac{1}{3}(2a_i + a_j), \quad \text{za } i \neq j, \qquad a_{ijk} = \frac{1}{3}(a_i + a_j + a_k), \quad \text{za } i < j < k,$$

i dobije se da za svako $p \in \mathbb{P}_3$ vrijedi

$$\begin{aligned} p = {} & \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i(3\lambda_i - 1)(3\lambda_i - 2)p(a_i) + \frac{9}{2}\sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{n+1} \lambda_i\lambda_j(3\lambda_i - 1)p(a_{iij}) \\ & + 27\sum_{i<j<k} \lambda_i\lambda_j\lambda_k p(a_{ijk}). \end{aligned} \tag{4.3}$$

n-simpleks tipa (3)
$P_K = \mathbb{P}_3(K), \quad \dim P_K = (n+1)(n+2)(n+3)/6$ $\Sigma_K = \{p(a_i),\ 1 \leq i \leq n+1,\ p(a_{iij}),\ 1 \leq i, j \leq n+1, i \neq j,$ $p(a_{ijk}),\ 1 \leq i < j < k \leq n+1\}.$

Ova se konstrukcija može nastaviti za proizvoljno $k \in \mathbb{N}$. Imamo sljedeći rezultat:

Teorem 4.1 Neka je K n-simpleks s vrhovima a_j, $j = 1, \ldots, n+1$. Za dano $k \geq 1$, svaki polinom $p \in \mathbb{P}_k$ jedinstveno je određen svojim vrijednostima na skupu

$$L_k(K) = \{x = \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i a_i \colon \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i = 1,\ \lambda_i \in \{0, \frac{1}{k}, \ldots, \frac{k-1}{k}, 1\},\ 1 \leq i \leq n+1\}.$$

Zadatak. Dokažite teorem. □

S praktične strane zgodno je raditi sa simpleksima tipa (3) koji imaju stupnjeve slobode samo na bridovima elemenata. Pri tome treba prijeći na neki manji prostor polinoma, no koji bi još uvijek sadržavao sve polinom drugog stupnja (u suprotnom možemo koristiti simpleks tipa (2). U [6], str 50, dokazuje se sljedeći rezultat:

Teorem 4.2 Za svaku trojku (i, j, k) za koju je $i < j < k$ definiramo funkcional

$$\phi_{ijk}(p) = 12p(a_{ijk}) + 2 \sum_{l \in \{i,j,k\}} p(a_l) - 3 \sum_{\substack{l,m \in \{i,j,k\} \\ l \neq m}} p(a_{llm}).$$

Tada je svaki polinom iz prostora

$$\mathbb{P}'_3 = \{p \in \mathbb{P}_3 \colon \phi_{ijk}(p) = 0,\ 1 \leq i < j < k \leq n+1\}$$

jedinstveno određen svojim vrijednostima u vrhovima a_i, $1 \leq i \leq n+1$ i točkama a_{iij}, $1 \leq i, j \leq n+1$, $i \neq j$. Štoviše, vrijedi

$$\mathbb{P}_2 \subset \mathbb{P}'_3.$$

Dokaz. Dat ćemo dokaz za $n = 2$. U tom slučaju elementi iz $\mathbb{P}'_3$ određeni su samo jednim uvjetom:

$$12p(a_{123}) + 2 \sum_{l=1}^{3} p(a_l) - 3 \sum_{\substack{l,m=1 \\ l \neq m}}^{3} p(a_{llm}) = 0. \tag{4.4}$$

Općenito možemo primijetiti da je broj funkcionala ϕ_{ijk} jednak $\binom{n+1}{3}$ (oni su linearno nezavisni), pa je

$$\dim \mathbb{P}'_3 = \dim \mathbb{P}_3 - \binom{n+1}{3} = \binom{n+3}{3} - \binom{n+1}{3} = (n+1)^2,$$

upravo jednako broju čvorova na rubu simpleksa.

Za proizvoljan element $p \in \mathbb{P}'_3 \subset \mathbb{P}_3$ vrijedi formula

$$p = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{3} \lambda_i (3\lambda_i - 1)(3\lambda_i - 2) p(a_i) + \frac{9}{2} \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^{3} \lambda_i \lambda_j (3\lambda_i - 1) p(a_{iij})$$
$$+ 27 \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 p(a_{123}).$$

Pomoću relacije (4.4) eliminiramo $p(a_{123})$ iz ovog prikaza i time dobivamo

$$\begin{aligned} p = {} & \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3}\left[\lambda_i(3\lambda_i-1)(3\lambda_i-2)-9\lambda_1\lambda_2\lambda_3\right]p(a_i) \\ & + \sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{3}\left[\frac{9}{2}\lambda_i\lambda_j(3\lambda_i-1)+\frac{27}{4}\lambda_1\lambda_2\lambda_3\right]p(a_{iij}). \end{aligned}$$

Time je prvi dio teorema dokazan i dane su nove bazne funkcije. Pokažimo drugi dio teorema. U tu svrhu uzmimo proizvoljan polinom $p \in \mathbb{P}_2$. Razvojem u Taylorov red dobivamo

$$p(a_i) = p(a_{123}) + Dp(a_{123})(a_i - a_{123}) + \frac{1}{2}\mathbf{A}(a_i - a_{123})\cdot(a_i - a_{123}),$$

gdje je $\mathbf{A}$ matrica drugih derivacija (konstantna i simetrična). Sumiranjem po i dobivamo

$$\begin{aligned} \sum_{l=1}^{3} p(a_i) &= 3p(a_{123}) + Dp(a_{123})\sum_{l=1}^{3}(a_l - a_{123}) + \frac{1}{2}\sum_{l=1}^{3}\mathbf{A}(a_l - a_{123})\cdot(a_l - a_{123}) \\ &= 3p(a_{123}) + \frac{1}{2}\sum_{l=1}^{3}\mathbf{A}(a_l - a_{123})\cdot(a_l - a_{123}). \end{aligned}$$

Analogno

$$p(a_{llm}) = p(a_{123}) + Dp(a_{123})(a_{llm} - a_{123}) + \frac{1}{2}\mathbf{A}(a_{llm} - a_{123})\cdot(a_{llm} - a_{123}).$$

Sumiranjem dobivamo

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{l,m=1\\ l\neq m}}^{3} p(a_{llm}) = {} & 6p(a_{123}) + Dp(a_{123})\sum_{\substack{l,m=1\\ l\neq m}}^{3}(a_{llm} - a_{123}) \\ & + \frac{1}{2}\sum_{\substack{l,m=1\\ l\neq m}}^{3}\mathbf{A}(a_{llm} - a_{123})\cdot(a_{llm} - a_{123}). \end{aligned}$$

Sada je lako uočiti da je

$$\sum_{\substack{l,m=1\\ l\neq m}}^{3}(a_{llm} - a_{123}) = 0,$$

(vidi Sliku 4.3). Nadalje,

$$\begin{aligned} a_{llm} - a_{123} &= a_{llm} - a_l + a_l - a_{123} = (a_m - a_l)/3 + (a_l - a_{123}) \\ &= (a_m - a_{123})/3 + 2(a_l - a_{123})/3, \end{aligned}$$

gdje smo u drugom retku dodali i oduzeli a_{123}. Sada je

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{l,m=1\\l\neq m}}^{3}\mathbf{A}(a_{llm}-a_{123})\cdot(a_{llm}-a_{123}) &= \frac{1}{9}\sum_{\substack{l,m=1\\l\neq m}}^{3}\mathbf{A}(a_m-a_{123})\cdot(a_m-a_{123})\\ &+\frac{4}{9}\sum_{\substack{l,m=1\\l\neq m}}^{3}\mathbf{A}(a_l-a_{123})\cdot(a_m-a_{123})\\ &+\frac{4}{9}\sum_{\substack{l,m=1\\l\neq m}}^{3}\mathbf{A}(a_l-a_{123})\cdot(a_l-a_{123}),\end{aligned}$$

gdje smo iskoristili simetriju matrice. Uzimajući u obzir $\sum_{m=1,m\neq l}^{3}(a_m-a_{123})=-(a_l-a_{123})$ dobivamo

$$\sum_{\substack{l,m=1\\l\neq m}}^{3}\mathbf{A}(a_{llm}-a_{123})\cdot(a_{llm}-a_{123})=\frac{2}{3}\sum_{l=1}^{3}\mathbf{A}(a_l-a_{123})\cdot(a_l-a_{123}).$$

time konačno izlazi

$$\sum_{\substack{l,m=1\\l\neq m}}^{3}p(a_{llm})=6p(a_{123})+\frac{1}{3}\sum_{l=1}^{3}\mathbf{A}(a_l-a_{123})\cdot(a_l-a_{123}).$$

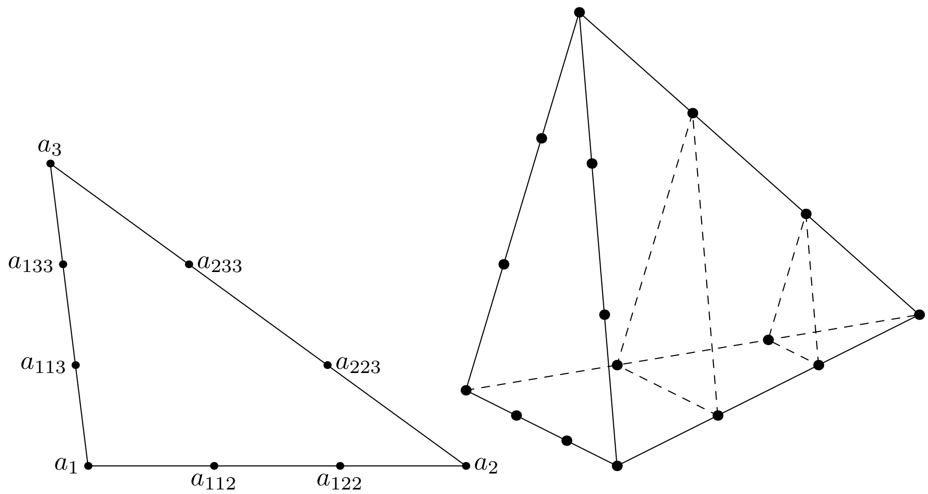
Kombinirajući dobivene jednakosti vidimo da za svaki polinom p drugog stupnja vrijedi

$$2\sum_{l=1}^{3}p(a_l)-3\sum_{\substack{l,m=1\\l\neq m}}^{3}p(a_{llm})=-12p(a_{123}).$$

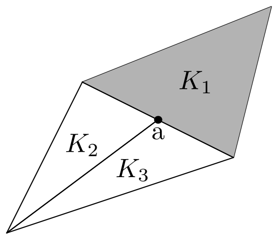
Time je dokaz gotov. □

Na taj način dobivamo n-simplekse tipa $(3')$. Njihova dimenzija je $(n+1)^2$, što je 16 za $n=3$, pa je tetraedar tipa $(3')$ dosta bogatiji od od tetraedra tipa (2), koji ima dimenziju 10. Uočimo da su konstante u definiciji funkcionala ϕ_{ijk} određene tako da je svaka konstanta u $\mathbb{P}_3'$. Netrivijalan dio ove konstrukcije je pokazati da je čitav $\mathbb{P}_2$ podskup od $\mathbb{P}_3'$. Lokalne bazne funkcije u općem slučaju dane su u dokazu u [6].

n-simpleks tipa (3')
$P_K=\mathbb{P}_3'(K),\quad \dim P_K=(n+1)^2$
$\Sigma_K=\{p(a_i),\ 1\leq i\leq n+1,\ p(a_{iij}),\ 1\leq i,j\leq n+1, i\neq j,\}.$



Slika 4.4: Simpleksi tipa (3') u $\mathbb{R}^2$ i $\mathbb{R}^3$



Slika 4.5: Nedozvoljena situacija

4.2.1 Asembliranje u triangulaciju

Promatrat ćemo sada triangulaciju domene Ω, sastavljenu od n-simplekas. Ona mora zadovoljavati svojstva (T1)–(T4) te dodatna svojstva koja će osigurati da su funkcije iz V_h neprekidne.

Triangulacija domene Ω sastavljena od n-simpleksa tipa (k) je svaka konačna familija $\mathcal{T}_h$ n-simpleksa koja ima ova svojstva:

TS1 Svako $K \in \mathcal{T}_h$ je jedan n-simpleks tipa (k);

TS2 $\overline{\Omega} = \cup_{K \in \mathcal{T}_h} K$;

TS3 $\text{int}(K_i) \cap \text{int}(K_j) = \phi$ za $i \neq j$;

TS4 Svaka (m-)stranica nekog simpleksa $K_1 \in \mathcal{T}_h$ je ili podskup granice $\partial\Omega$ ili (m-)stranica nekog simpleksa K_2 u triangulaciji. Simplekse K_1 i K_2 tada nazivamo susjednim.

Uvjeti T2 i T4 su automatski zadovoljeni, dok je posljednji uvjet TS4 novost.

Situacija koja nije dozvoljena jer ne zadovoljava posljednji uvjet prikazana je na Slici 4.5; točka a se naziva eng. *hanging node*.

Simetričan raspored nodalnih točaka u svakom elementu i uvjet poklapanja stranica susjednih elemenata ima za posljedicu da se nodalne točke dva susjedna elementa podudaraju na zajedničkoj stranici.

Označimo skup svih nodalnih točaka u cijeloj triangulaciji s $\mathcal{N}_h$. To je skup koji se sastoji od svih nodalnih točaka svih elemenata triangulacije. Prostor X_h na triangulaciji s n-simpleksima tipa (k) definiran je kao prostor svih funkcija na $\overline{\Omega}$ koje su na svakom elementu polinomi stupnja najviše k. Te funkcije općenito imaju skokove na granicama elemenata. U prostoru X_h promatrat ćemo samo one funkcije koje su jednoznačno definirane u točkama skupa $\mathcal{N}_h$. Drugim riječima, to su funkcije koje u nodalnim točkama koje se nalaze na granici dva ili više elementa primaju istu vrijednost u svim elementima koji ih sadrže. Podskup svih takvih funkcija je naš prostor konačnih elemenata $V_h \subset X_h$. Svaka funkcija iz tog skupa posve je određena svojim vrijednostima u $\mathcal{N}_h$, pa vrijednosti funkcije u tim točkama predstavljaju globalne stupnjeve slobode.

Definirajmo skup globalnih stupnjeva slobode

$$\Sigma_h = \{v_h(b) \colon b \in \mathcal{N}_h\}.$$

Evidentno je prostor V_h linearan i $\dim(V_h) = \mathrm{card}(\Sigma_h)$.

Teorem 4.3 Neka je V_h prostor konačnih elemenata konstruiran pomoću n-simpleksa tipa (k), za $k \geq 1$ ili n-simpleksa tipa (3'). Tada vrijedi

$$V_h \subset C(\overline{\Omega}) \cap H^1(\Omega).$$

Dokaz. Pokažimo da tvrdnja vrijedi za $n = 2$. Dokaz je posve analogan i u višim dimenzijama.

Promatramo dva susjedna elementa K_1 i K_2. Njihova zajednička stranica neka je $\gamma = \partial K_1 \cap \partial K_2$. Restrikcije funkcije $v_h \in V_h$ na K_1 i K_2 su funkcije iz $\mathbb{P}_k$. Označimo $p_1 = v_h|_{K_1}$ i $p_2 = v_h|_{K_2}$. Restrikcije od p_1 i p_2 na stranicu γ ponovo leže u $\mathbb{P}_k$ i podudaraju se u $k+1$ različitih točaka. Stoga je $p_1|_\gamma = p_2|_\gamma$ i neprekidnost funkcije je dokazana. Ostalo slijedi iz Leme 4.1. $\square$

Konačno, kanonsku bazu u V_h definiramo na sljedeći način: Indeksiramo skup $\mathcal{N}_h$ tako da bude $\mathcal{N}_h = \{b_1, b_2, \ldots\}$ i definiramo

$$w_i \in V_h, \quad w_i(b_j) = \delta_{ij}, \quad i, j = 1, \ldots, \mathrm{card}(\Sigma_h).$$

Funkcije $(w_1, \ldots, w_{\mathrm{card}(\Sigma_h)})$ očito čine jednu bazu koju nazivamo nodalna baza. Lako se provjerava da bazne funkcije imaju malen nosač: funkcija w_i ima za nosač uniju svih elemenata koji sadrže nodalnu točku b_i.

4.3 Pravokutni elementi

Uz ove elemente je vezan prostor polinoma stupnja manjeg ili jednakog k u svakoj varijabli zasebno. To su polinomi oblika

$$p(x) = \sum_{\substack{0 \le \alpha_i \le k \\ 1 \le i \le n}} \gamma_\alpha x^\alpha.$$

Prostor takvih polinoma označavamo s $\mathbb{Q}_k$ i imamo

$$\dim \mathbb{Q}_k = (k+1)^n$$
$$\mathbb{P}_k \subset \mathbb{Q}_k \subset \mathbb{P}_{nk}.$$

U $\mathbb{R}^n$ ćemo promatrati elemente oblika

$$K = \prod_{i=1}^n [a_i, b_i]$$

gdje je $-\infty < a_i < b_i < +\infty$. Takav ćemo skup općenito zvati n-pravokutnikom, odnosno samo pravokutnikom za $n = 2$. Uobičajeno je pravokutne elemente definirati na hiperkocki $[0,1]^n$, te u općoj situaciji element dobiti preslikavanjem hiperkocke.

Kao i ranije, koristit ćemo oznaku $\mathbb{Q}_k(K)$ za restrikciju funkcija iz $\mathbb{Q}_k$ na element K. Čim K ima neprazan interior $\mathbb{Q}_k(K)$ i $\mathbb{Q}_k$ imaju istu dimenziju.

Lema 4.3 Svaki polinom $p \in \mathbb{Q}_k$ jedinstveno je određen svojim vrijednostima na skupu

$$\hat{M}_k = \{x = (\frac{i_1}{k}, \frac{i_2}{k}, \cdots, \frac{i_n}{k}) \in \mathbb{R}^n \colon i_j \in \{0, 1, \ldots, k\},\ 1 \le j \le n\}.$$

Dokaz. Broj točaka u skupu $\hat{M}_k$ je $(k+1)^n$, koliko je i koeficijenata u polinomu iz $\mathbb{Q}_k$. Kako se problem određivanja polinima koji prima zadane vrijednosti u točkama skupa $\hat{M}_k$ svodi na rješavanje jednog linearnog sustava s kvadratnom matricom reda $(k+1)^n$, zaključujemo da iz egzistencije polinoma slijedi njegova jedinstvenost i obratno.

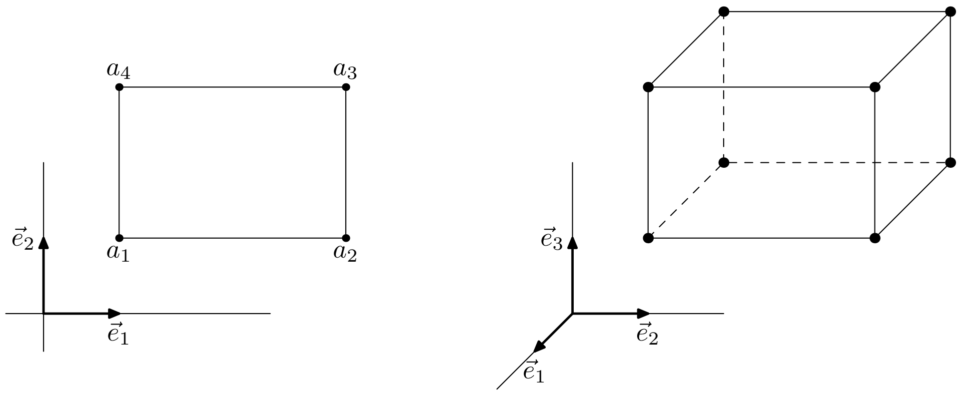
Za svaku n-torku $\mu = (\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n) \in \hat{M}_k$, definiramo polinom

$$\hat{p}_\mu(x) = \prod_{j=1}^n \left(\prod_{\substack{i=0 \\ i \ne k\mu_j}}^k \frac{x_j - i/k}{\mu_j - i/k} \right) \in \mathbb{Q}_k. \tag{4.5}$$

On je[2] jednak 1 u μ i nula u svim ostalim točkama iz $\hat{M}_k$. Stoga je polinom $p \in \mathbb{Q}_k$ koji prima vrijednosti $\alpha(\mu)$ u točkama $\mu \in \hat{M}_k$ dan formulom

$$p(x) = \sum_{\mu \in \hat{M}_k} \hat{p}_\mu(x) \alpha(\mu).$$

[2] Radi se o tenzorskom produktu Lagrangeovih interpolacijskih polinoma jedne varijable.



Slika 4.6: Pravokutnik tipa (1), 3-pravokutnik tipa (1)

Time je dokaz gotov. □

Neka je sada $K \subset \mathbb{R}^n$ proizvoljan n-pravokutnik. Tada postoji afino preslikavanje $F_K(x) = B_K x + b_K$, s dijagonalnom matricom B_K, takvo da je $K = F_K([0,1]^n)$.

n-pravokutnik tipa (k) je svaki n-pravokutnik $K \subset \mathbb{R}^n$, s prostorom funkcija $P_K = \mathbb{Q}_k(K)$. Svaki polinom iz $\mathbb{Q}_k$ jedinstveno je određen svojim vrijednostima u točkama

$$M_k(K) = F_K(\hat{M}_k),$$

gdje je F_K dijagonalno afino preslikavanje koje preslikava hiperkocku na K. To je posljedica činjenice da je kompozicija polinoma $p \in \mathbb{Q}_k$ i afinog preslikavanja s dijagonalnom matricom, ponovo polinom iz $\mathbb{Q}_k$. Uočimo da to nije istina za proizvoljno afino preslikavanje.

Zadatak. Regularno afino preslikavanje s dijagonalnom matricom preslikava n-pravokutnik ponovo u n-pravokutnik. Pokažite da proizvoljno regularno afino preslikavanje preslikava n-pravokutnik u paralelotop (n-paralelogram). □

Bazne funkcije na hiperkocki $\hat{K} = [0,1]^n$ dane su formulom (4.5). Bazne funkcije na elementu K dobivaju se zamjenom varijabli $p_\mu = \hat{p}_\mu \circ F_K^{-1}$.

Pravokutnik tipa (1) prikazan je na Slici 4.6.

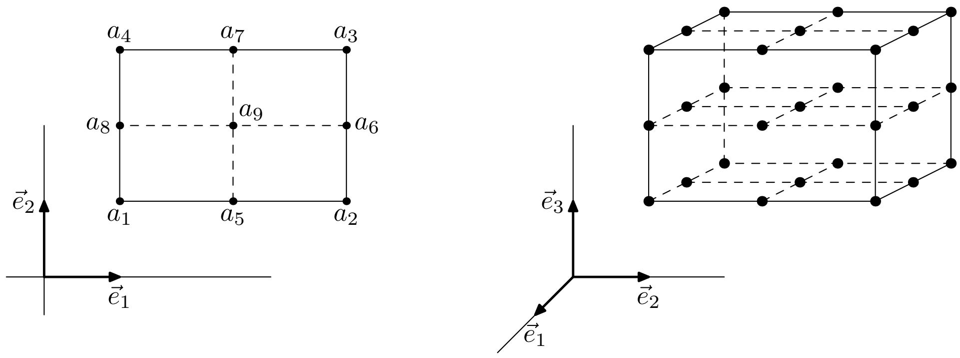
n-pravokutnik tipa (1)
$P_K = \mathbb{Q}_1(K), \quad \dim P_K = 2^n$ $\Sigma_K = \{p(a) \colon a \in M_1(K)\}.$

Bazne funkcije na jediničnoj kocki $[0,1]^n$, moguće je jednostavnije zapisati ako uvedemo koordinate u odnosu na pojedine vrhove kocke. Na primjer, u $n = 2$, koordinate u odnosu na četiri vrha kvadrata $a_1, \ldots, a_4$ su

$$(x_1, x_2), \ (x_2, 1 - x_1), \ (1 - x_1, 1 - x_2), \ (1 - x_2, x_1).$$

Uvedimo oznake

$$x_3 = 1 - x_1, \ \ x_4 = 1 - x_2.$$



Slika 4.7: Pravokutnik tipa (2), 3-pravokutnik tipa (2)

Lako je vidjeti da su bazne funkcije ($p_i(a_j) = \delta_{ij}$):

$$p_1 = (1 - x_1)(1 - x_2),\ p_2 = x_1(1 - x_2),\ p_3 = x_1x_2,\ p_4 = (1 - x_1)x_2,$$

što možemo zapisati u obliku

$$p_1 = x_3x_4,\ p_2 = x_1x_4,\ p_3 = x_1x_2,\ p_4 = x_2x_3.$$

Vidimo da se funkcije dobivaju cikličkom zamjenom koordinata (modulo 4).

Pravokutnik tipa (2) prikazan je na Slici 4.7.

n-pravokutnik tipa (2)
$P_K = \mathbb{Q}_2(K), \quad \dim P_K = 3^n$ $\Sigma_K = \{p(a) \colon a \in M_2(K)\}.$

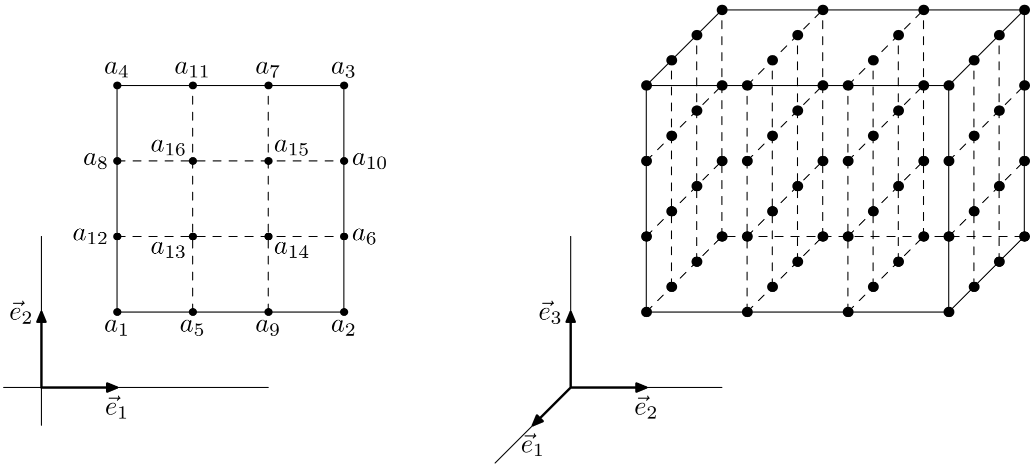
Bazne funkcije na jediničnom pravokutniku i ovdje je najlakše izraziti preko koordinata $x_1, \ldots, x_4$:

$$\begin{aligned} p_1 &= x_3(2x_3 - 1)x_4(2x_4 - 1), \ldots \\ p_5 &= -4x_3(x_3 - 1)x_4(2x_4 - 1), \ldots \\ p_9 &= 16x_1x_2x_3x_4. \end{aligned}$$

Zadatak. Raspišite sve funkcije i provjerite da je $p_i(a_j) = \delta_{ij}$. $\square$

Pravokutnik tipa (3) dan je na Slici 4.8.

n-pravokutnik tipa (3)
$P_K = \mathbb{Q}_3(K), \quad \dim P_K = 4^n$ $\Sigma_K = \{p(a) \colon a \in M_3(K)\}.$



Slika 4.8: Pravokutnik tipa (3), 3-pravokutnik tipa (3)

Zadatak. Pokažite da su bazne funkcije jediničnog pravokutnika tipa (3), za $n = 2$, dane formulama:

$$
\begin{aligned}
p_1 &= \frac{1}{4}x_3(3x_3-1)(3x_3-2)x_4(3x_4-1)(3x_4-2), \ldots \\
p_5 &= -\frac{9}{4}x_3(3x_3-1)(x_3-1)x_4(3x_4-1)(3x_4-2), \ldots \\
p_9 &= \frac{9}{4}x_3(3x_3-2)(x_3-1)x_4(3x_4-1)(3x_4-2), \ldots \\
p_{13} &= \frac{81}{4}x_3(3x_3-1)(x_3-1)x_4(3x_4-1)(x_4-1), \ldots
\end{aligned}
$$

□

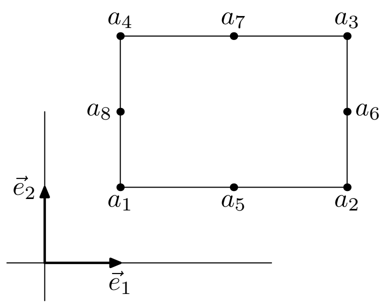
Kao i u slučaju simpleksa tipa $(3')$ praktično je definirati pravokutnike koji nemaju unutarnjih nodalnih točaka. Važno je pri tome da skup P_K ostane dovoljno bogat. Sljedeća dva teorema daju takve elemente u slučaju $n = 2$.

Teorem 4.4 Neka su točke a_i, $1 \leq i \leq 9$ definirane kao na Slici 4.7. Tada je svaki polinom iz prostora

$$\mathbb{Q}_2' = \{p \in \mathbb{Q}_2 \colon 4p(a_9) + \sum_{i=1}^{4} p(a_i) - 2\sum_{i=5}^{8} p(a_i) = 0\}$$

jedinstveno određen svojim vrijednostima u točkama a_i, $1 \leq i \leq 8$. Pri tome vrijedi

$$\mathbb{P}_2 \subset \mathbb{Q}_2'.$$



Slika 4.9: Pravokutnik tipa $(2')$

Teorem se dokazuje analogno kao Teorem 4.2. Kada izbacimo $p(a_9)$ dobivamo sljedeće stupnjeve slobode:

$$\forall p \in \mathbb{Q}_2', \quad p = \sum_{i=1}^{8} p(a_i) p_i,$$

gdje je

$$\begin{aligned} p_1 &= x_3 x_4 (2x_3 + 2x_4 - 3), \dots \\ p_5 &= -4 x_3 x_4 (x_3 - 1), \dots \end{aligned}$$

(ostale funkcije slijede cikličkim ponavljanjem koordinata).
Zadatak. Dokažite Teorem 4.4.

Pravokutnik tipa $(2')$ dan je na Slici 4.9.

Pravokutnik tipa $(2')$
$P_K = \mathbb{Q}_2'(K), \quad \dim P_K = 8$
$\Sigma_K = \{p(a_i) \colon i = 1, \dots, 8\}$.

Teorem 4.5 Neka su točke a_i, $1 \le i \le 16$ definirane kao na Slici 4.8. Definiramo prostor

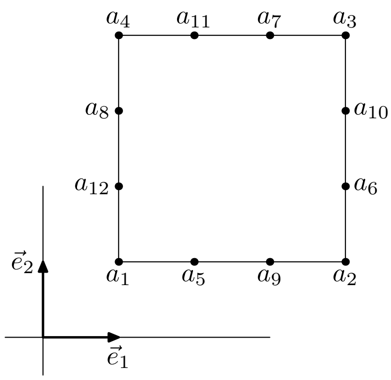
$$\mathbb{Q}_3' = \{p \in \mathbb{Q}_3 \colon \psi_i(p) = 0, \ 1 \le i \le 4\}$$

gdje je

$$\begin{aligned} \psi_1(p) = {} & 9p(a_{13}) + 4p(a_1) + 2p(a_2) + p(a_3) + 2p(a_4) \\ & - 6p(a_5) - 3p(a_6) - 3p(a_{11}) - 6p(a_{12}), \end{aligned}$$

a $\psi_2(p)$, $\psi_3(p)$ i $\psi_4(p)$ su definirani cirkularnim permutacijama u skupovima $\cup_{i=1}^{4}\{a_i\}$, $\cup_{i=5}^{8}\{a_i\}$, $\cup_{i=9}^{12}\{a_i\}$ i $\cup_{i=13}^{16}\{a_i\}$. Tada je svaki polinom iz $\mathbb{Q}_3'$ jedinstveno određen svojim vrijednostima u točkama a_i, $1 \le i \le 12$. Pri tome vrijedi

$$\mathbb{P}_3 \subset \mathbb{Q}_3'.$$



Slika 4.10: Pravokutnik tipa $(3')$

Zadatak. Dokažite Teorem 4.5 i pokažite da funkcije iz $\mathbb{Q}_3'$ imaju prikaz

$$\forall p \in \mathbb{Q}_3', \quad p = \sum_{i=1}^{12} p(a_i) p_i,$$

gdje su bazne funkcije dane formulama

$$p_1 = x_3 x_4 \left(1 + \frac{9}{2} x_3(x_3 - 1) + \frac{9}{2} x_4(x_4 - 1)\right), \ldots$$
$$p_5 = -\frac{9}{2} x_3(x_3 - 1)(3x_3 - 1)x_4, \ldots$$
$$p_9 = \frac{9}{2} x_3(x_3 - 1)(3x_3 - 2)x_4, \ldots$$

(ostale funkcije slijede cikličkim ponavljanjem koordinata). $\square$

Pravokutnik tipa $(3')$ dan je na Slici 4.10.

Pravokutnik tipa $(3')$
$P_K = \mathbb{Q}_3'(K), \quad \dim P_K = 12$
$\Sigma_K = \{p(a_i) \colon i = 1, \ldots, 12\}.$

4.3.1 Asembliranje u triangulaciju

Ukoliko je domena Ω *paravokutna*, onda pomoću pravokutnih elemenata možemo definirati prostor konačnih elemenata V_h, posve analogno kao i kod simplicijalnih elemenata. Triangulacija $\mathcal{T}_h$ koja se sastoji od n-pravokutnika mora zadovoljavati uvjete analogne triangulaciji pomoću simpleksa:

TP1 Svako $K \in \mathcal{T}_h$ je jedan n-pravokutnik tipa (k);

TP2 $\overline{\Omega} = \cup_{K \in \mathcal{T}_h} K$;

TP3 $\text{int}(K_i) \cap \text{int}(K_j) = \phi$ za $i \neq j$;

TP4 Svaka stranica nekog n-pravokutnika $K_1 \in \mathcal{T}_h$ je ili podskup granice $\partial\Omega$ ili stranica nekog drugog n-pravokutnika K_2 u triangulaciji. Elemente K_1 i K_2 tada nazivamo susjednim.

Posve analogno, kao u slučaju simpleksa dokazuje se:

Teorem 4.6 Neka je V_h prostor konačnih elemenata konstruiran pomoću n-pravokutnika tipa (k), za $k \geq 1$ ili pomoću pravokutnika tipa (2') ili (3'). Tada vrijedi

$$V_h \subset C(\overline{\Omega}) \cap H^1(\Omega).$$

Ključni moment u dokazu je činjenica da se restrikcija funkcije iz $\mathbb{Q}_k(\mathbb{R}^n)$ na stranicu pravokutnika nalazi u $\mathbb{Q}_k(\mathbb{R}^{n-1})$. Budući da na svakoj stranici imamo odgovarajući broj stupnjeva slobode, lako dobivamo globalnu neprekidnost funkcije.

4.4 Elementi s derivacijama kao stupnjevima slobode

Zadatak. Dokažite da za baricentričke koordinate u n-simpleksu vrijedi

$$D\lambda_j \cdot (a_k - x) = \delta_{jk} - \lambda_j(x),$$

odakle slijedi

$$D\lambda_j \cdot (a_k - a_i) = \delta_{jk} - \lambda_j(a_i). \ \Box$$

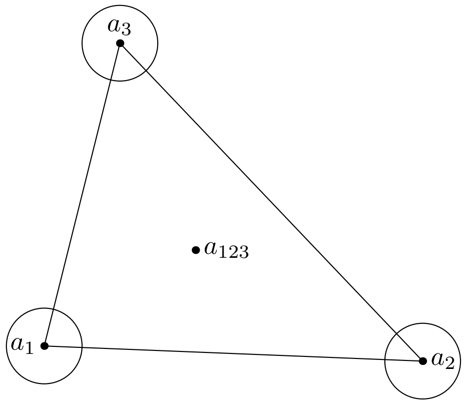
Zadatak. Dokažite da za polinome trećeg stupnja u $\mathbb{R}^2$ vrijedi formula

$$\begin{aligned} \forall p \in \mathbb{P}_3(\mathbb{R}^2), \quad p = & \sum_{i=1}^{3}(-2\lambda_i^3 + 3\lambda_i^2 - 7\lambda_1\lambda_2\lambda_3)p(a_i) \\ & + 27\lambda_1\lambda_2\lambda_3 p(a_{123}) \\ & + \sum_{i=1}^{3}\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{3} \lambda_i\lambda_j(2\lambda_i + \lambda_j - 1)Dp(a_i)\cdot(a_j - a_i). \end{aligned}$$

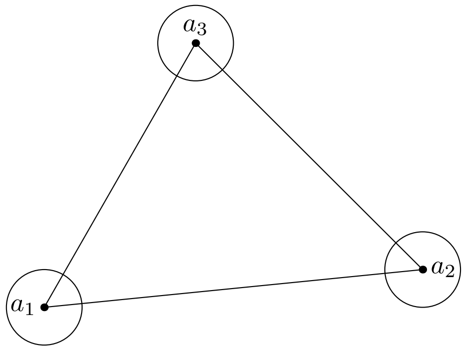
Uputa. Treba krenuti od formule (4.3) i izbaciti iz nje čvorove a_{iij}. To je moguće učiniti stoga što je p na svakoj stranici trokuta određen s četiri parametra, koji mogu biti odabrani kao vrijednosti funkcije i prve derivacije u rubnim točkama. Pri tome treba koristiti prethodni zadatak. $\Box$

Na osnovu ove formule definiramo Hermitov trokut tipa (3) kao element definiran s $P_K = \mathbb{P}_3$ te stupnjevima slobode

$$\Sigma_K = \{p(a_i),\ i = 1, 2, 3;\ \ p(a_{123}),\ \ Dp(a_i)\cdot(a_j - a_i),\ i, j = 1, 2, 3,\ i \neq j\}.$$



Slika 4.11: Hermiteov trokut tipa (3), dim(P_K)=10



Slika 4.12: Zienkiewiczev trokut, dim(P_K)=9

Budući da je poznavanje dvije usmjerene derivacije u svakom vrhu trokuta isto što i poznavanje čitavog gradijenta, možemo uzeti alternativan skup stupnjeva slobode

$$\Sigma_K' = \{p(a_i),\ i = 1,2,3;\ \ p(a_{123}),\ \ \partial_j p(a_i),\ i = 1,2,3,\ j = 1,2\}.$$

Hermitov trokut tipa (3) prikazan je na slici 4.11. Jedna kružnica oko svakog vrha označava da se gradijent u vrhovima trokuta koristi kao stupanj slobode.

Moguće je iz skupa stupnjeva slobode izbaciti vrijednost u točki a_{123}, a da prostor polinoma i dalje sadrži sve polinome drugog stupnja. Takav se trokut naziva **Zienkiewiczev trokut**, odnosno Hermiteov trokut tipa ($3'$) (vidi [6]).

Triangulacija sastavljena od Hermiteovih trokuta treba zadovoljavati iste uvjete kao i triangulacija sastavljena od trokuta tipa (k). Globalni stupnjevi slobode su

$$\Sigma_h = \{v(b)\colon b \in \mathcal{N}_v \cup \mathcal{N}_c;\ \ \partial_j v(b)\colon b \in \mathcal{N}_v,\ j = 1,2\}.$$

gdje je $\mathcal{N}_v$ skup svih vrhova triangulacije, a $\mathcal{N}_c$ skup svih baricentara trokuta. Odavde je jasno da je za lokalne stupnjeve slobode praktičnije uzeti skup Σ_K'.

Prostor $V_h \subset X_h$ sastoji se od onih funkcija iz X_h čiji su stupnjevi slobode dobro definirani. To znači da te funkcije u točkama iz $\mathcal{N}_v$ imaju jednoznačno definiranu prvu derivaciju. Da su takve funkcije neprekidne, odnosno, da je

$$V_h \subset C(\overline{\Omega}) \cap H^1(\Omega)$$

vidi se na sljedeći način: Na svakoj zajedničkoj stranici dvaju trokuta funkcija $v \in V_h$ ima jednostrane limese koji su polinomi trećeg stupnja koji se podudaraju, zajedno sa svojim prvim derivacijama, u krajnjim točkama stranice. Odatle izlazi da su jednaki na cijeloj stranici. To dokazuje neprekidnosti. Uočimo da takve funkcije ne mogu biti neprekidno derivabilne jer su normalne derivacije restrikcija polinomi drugog stupnja koji se podudaraju samo u dvije točke.

Konačno, jedna kanonska baza se lako konstruira. Neka vrhovi trokuta nose indekse od 1 do J, dok baricentri imaju indekse od $J+1$ do L. Tada bazne funkcije $w^k \in V_h$, $k = 1, \ldots, L$, $w_k^1, w_k^2 \in V_h$ za $k = 1, \ldots, J$ definiramo uvjetima

$$\begin{cases} w_k(b_l) = \delta_{kl}, & k, l = 1, \ldots, L, \\ \partial_1 w_k(b_l) = \partial_2 w_k(b_l) = 0, & k = 1, \ldots, L,\ l = 1, \ldots, J \end{cases}$$

$$\begin{cases} w_k^1(b_l) = 0, & k = 1, \ldots, J,\ ,l = 1, \ldots, L, \\ \partial_1 w_k^1(b_l) = \delta_{kl}, & k, l = 1, \ldots, J, \\ \partial_2 w_k^1(b_l) = 0, & k, l = 1, \ldots, J, \end{cases}$$

$$\begin{cases} w_k^2(b_l) = 0, & k = 1, \ldots, J,\ ,l = 1, \ldots, L, \\ \partial_1 w_k^2(b_l) = 0, & k, l = 1, \ldots, J, \\ \partial_2 w_k^2(b_l) = \delta_{kl} & k, l = 1, \ldots, J, \end{cases}$$

Nije teško vidjeti da ove funkcije imaju mali nosač.

Konstrukcija Hermiteovog (n)-simpleksa je posve analogna, vidi [6].

Lema 4.4 Neka je $L(x) = c \cdot x + b$ ($c, x \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}$) i $H = \{x \in \mathbb{R}^n \colon L(x) = 0\}$ hiperravnina određena funkcionalom L. Ako polinom $p \in \mathbb{P}_k$, $k \geq 1$, iščezava na H, onda postoji polinom $q \in \mathbb{P}_{k-1}$ takav da je $p(x) = L(x)q(x)$.

Dokaz. Dokaz je lako provesti u slučaju $L(x) = x_n$. Tada možemo pisati

$$p(x) = \sum_{i=0}^{k} x_n^i q_i(x_1, \ldots, x_{n-1}), \quad \deg(q_i) \leq k - i.$$

Sada je $p|_H = p|_{x_n=0} = q_0 \equiv 0$, pa je

$$p(x) = x_n \sum_{i=1}^{k} x_n^{i-1} q_i(x_1, \ldots, x_{n-1}) = x_n q(x).$$

Očito je $\deg(q) \leq k-1$.

U općem slučaju se nađe regularno afino preslikavanje $x = G(\hat{x})$ takvo da je $L(G(\hat{x})) = \hat{x}_n$. Sada je $p(G(\hat{x})) = \hat{x}_n q(\hat{x})$, $\deg(q) \leq k-1$, što daje traženu tvrdnju. $\square$

Zadatak. Konstruirajte preslikavanje G. $\square$

Zadatak. Neka je $p \in \mathbb{P}_k$, $k \geq 2$, takav da je $p = 0$ i $Dp = 0$ na H. Tada je $p(x) = L(x)^2 q(x)$, gdje je $q \in \mathbb{P}_{k-2}$. $\square$

Primjer prostora konačnih elemenata za koji vrijedi $V_h \subset C^1(\overline{\Omega})$ dobiva se na osnovu sljedećeg rezultata:

Lema 4.5 Neka je K trokut s vrhovima a_i, $i = 1, 2, 3$ i neka su $a_{ij} = (a_i + a_j)/2$ polovišta stranica. Tada je svaki polinom stupnja 5 jedinstveno određen sljedećim skupom od 21 stupnjeva slobode:

$$\Sigma_K = \{\partial^\alpha p(a_i),\ \ |\alpha| \leq 2,\ i = 1, 2, 3;\ \ \partial_\nu p(a_{ij}),\ \ 1 \leq i < j \leq 3\},$$

gdje je ∂_ν normalna derivacija na granicu trokuta.

Dokaz. Evidentno je dovoljno dokazati jedinstvenost takvog polinoma. Uzmimo stoga da za polinom $p \in \mathbb{P}_5$ vrijedi

$$\partial^\alpha p(a_i) = 0,\ \ |\alpha| \leq 2,\ i = 1, 2, 3;\ \ \partial_\nu p(a_{ij}) = 0,\ \ 1 \leq i < j \leq 3.$$

Pogledajmo, na primjer, stranicu $[a_1, a_2]$. Uvedimo i nju koordinatu t i neka je $q(t)$ restrikcija polinoma p na $[a_1, a_2]$. Tada je q polinom stupnja 5 za koji vrijedi

$$q(a_1) = q'(a_1) = q''(a_1) = q(a_2) = q'(a_2) = q''(a_2) = 0$$

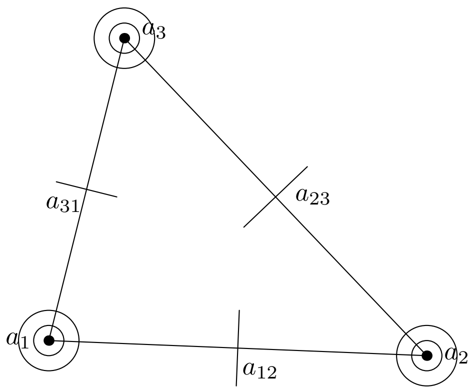
i stoga je $q \equiv 0$. Analogno, neka je $r(t)$ restrikcija normalne derivacije $\partial_\nu p$ na $[a_1, a_2]$. Tada je r polinom četvrtog stupnja za koji vrijedi

$$r(a_1) = r'(a_1) = r(a_{12}) = r(a_2) = r'(a_2) = 0$$

pa je $r \equiv 0$. Time smo dokazali da je $p = 0$ i $Dp = 0$ na $[a_1, a_2]$. Iz te činjenice možemo zaključiti da p ima faktor λ_3^2 (vidi Lemu 4.4 i zadatak iza nje). Na taj način dobivamo da p ima faktor $\lambda_1^2\lambda_2^2\lambda_3^2$. Kako je polinom stupnja 5, to je moguće samo ako je $p \equiv 0$. $\square$

Konačni element u kojem je K trokut, $P_K = \mathbb{P}_5$ sa 21 stupnjeva slobode iz Leme 4.5 naziva se Argyrisov trokut. Prostor konačnih elementa V_h konstruira se kao i ranije pomoću globalnih stupnjeva slobode koji su sada $\partial^\alpha p(b)$, $|\alpha| \leq 2$, $b \in \mathcal{N}_v$ te normalne derivacije u polovištima susjednih stranica. Normalno, zahtijevamo da u polovištima stanice susjednih trokuta funkcija ima normalne derivacije suprotnog predznaka. Sada se jednostavno dokazuje da za prostor konačnih elemenata V_h vrijedi

$$V_h \subset C^1(\overline{\Omega}) \cap H^2(\Omega).$$



Slika 4.13: Argyrisov trikut, dim(P_K)=21

Argyrisov trokut je prikazan na slici 4.13. Dvije kružnice ok vrhova označavaju da su derivacije i prvog i drugog reda stupnjevi slobode; okomice na stranice označavaju normalne derivacije u polovištima.

Sljedeća lema nam omogućuje da izbacimo normalne derivacije iz definicije stupnjeva slobode.

Lema 4.6 Svaki polinom oz prostora

$$\mathbb{P}_5'(K) = \{p \in \mathbb{P}_5(K) \colon \partial_\nu p \in \mathbb{P}_3(K') \text{ za svaku stranicu } K' \subset \partial K\}$$

je jedinstveno određen sljedećim skupom od 18 stupnjeva slobode:

$$\Sigma_K' = \{\partial^\alpha p(a_i), \ \ |\alpha| \leq 2, \ i = 1, 2, 3\}$$

K tome vrijedi

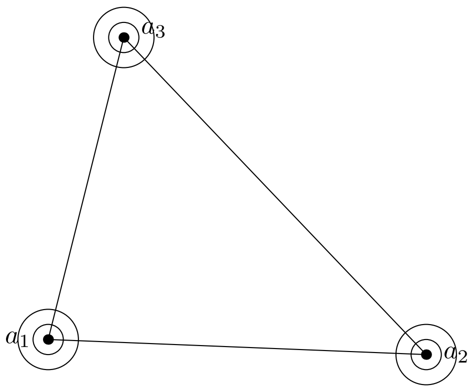
$$\mathbb{P}_4 \subset \mathbb{P}_5'(K).$$

Za dokaz vidi [6]. Konačni element baziran na ovoj lemi se naziva Bellov trokut. Lako se pokazuje da i on daje prostor konačnih elemenata sadržan u $C^1(\overline{\Omega}) \cap H^2(\Omega)$. Bellov trokut je prikazan na slici 4.14.

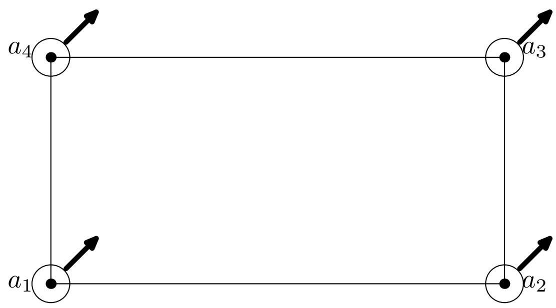
Zadnji je primjer pravokutnog elementa koji omogućava konstrukciju H^2-konformne aproksimacije.

Lema 4.7 Neka K označava pravokutnik s vrhovima a_i, $i = 1, 2, 3, 4$. Tada je svaki polinom $p \in \mathbb{Q}_3$ jedinstveno određen sljedećim skupom od 16 stupnjeva slobode:

$$\Sigma_K = \{p(a_i), \ \partial_1 p(a_i), \ \partial_2 p(a_i), \ \partial_{12} p(a_i), \ i = 1, 2, 3, 4\}.$$



Slika 4.14: Bellov trokut, dim(P_K)=18



Slika 4.15: Bogner-Fox-Schmidtov pravokutnik, dim(P_K)=16

Konačni element zasnovan na ovoj lemi se naziva Bogner-Fox-Schmidtov pravokutnikt. Za prostor konačnih elemenata V_h vezan uz njega vrijedi $V_h \subset C^1(\overline{\Omega}) \cap H^2(\Omega)$.

Zadatak. Dokažite tvrdnje vezane uz Bogner-Fox-Schmidtov pravokutnikt. □

Bogner-Fox-Schmidtov pravokutnik je prikazan na slici 4.15. Strelice označavaju mješovitu derivaciju.

4.5 Konačni element. Interpolacijski operator

Nakon niza primjera konačnih elemenata želimo formalizirati pojam konačnog elementa. Uvest ćemo trojku (K, P, Σ) sa sljedećim svojstvima:

1. K je zatvoren podskup od $\mathbb{R}^n$, nepraznog interiora, s Lipschitzovom granicom.

2. P je linearan prostor realnih funkcija definiranih na K.

3. Σ je skup linearno nezavisnih linearnih i neprekidnih funkcionala ϕ_i, $1 \leq i \leq N$, nad prostorom P.

Napomena. Prirodno je i sa formalne strane korisno uzimati da su linearni funkcionali ϕ_i definirani na širem prostoru, koji sadrži P. Na primjer, $C(K)$ ili $C^1(K)$. □

Definicija 4.1 Za skup Σ kažemo da je P-unisolventan ako za sve realne brojeve α_i, $1 \leq i \leq N$, postoji jedinstvena funkcija $p \in P$ za koju vrijedi

$$\phi_i(p) = \alpha_i, \quad 1 \leq i \leq N.$$

Sada možemo definirati konačan element (vidi Ciarlet [6]).

Definicija 4.2 Uređena trojka (K, P, Σ) koja zadovoljava uvjete 1-3 je konačni element ako je skup Σ P-unisolventan.

Iz svojstva unisolventnosti slijedi da su dobro definirane funkcije $p_i \in P$, za koje je

$$\phi_j(p_i) = \delta_{ij}, \quad 1 \leq j \leq N. \tag{4.6}$$

Stoga imamo prikaz:

$$\forall p \in P, \quad p = \sum_{i=1}^{N} \phi_i(p) p_i. \tag{4.7}$$

To implicira da je $\dim(P) = N$.

Funkcije p_i predstavljaju bazne funkcije konačnog elementa, a funkcionali ϕ_i su stupnjevi slobode. Stupnjevi slobode čine bazu u dualu prostora P i $\{p_i\}$, $\{\phi_i\}$ su očito dualne baze.

Napomena. Unisolventnost danog elementa (K, P, Σ) provjerava se na sljedeći način. Prvo se utvrdi da je $\dim(P) = \dim(\Sigma)$. Zatim je dovoljno:

(i) ili naći bazne funkcije p_i,

(ii) ili pokazati da iz $\phi_i(p) = 0$, za sve $i = 1, \dots, N$, slijedi $p \equiv 0$. □

U našim dosadašnjim primjerima skup K je bio ili simpleks ili n-pravokutnik. Mogući su i drugi oblici kao što su prizme u 3D ili elementi sa zakrivljenim stranicama (izoparametrički elementi).

Stupnjevi slobode koje smo do sada sreli sljedećeg su oblika:

$$\left.\begin{array}{l} p \mapsto p(a_i^0) \\ p \mapsto Dp(a_i^1) \cdot \xi_{ik}^1 \\ p \mapsto D^2p(a_i^2)\xi_{il}^2 \cdot \xi_{ik}^2 \end{array}\right\} \tag{4.8}$$

gdje su a_i^r, $r = 0, 1, 2$, točke iz K, a ξ_{ik}^r, $r = 1, 2$, vektori konstruirani iz geometrije skupa K.

Točke a_i^r nazivamo nodalnim točkama elementa K i skup svih nodalnih točaka elementa označavamo s $\mathcal{N}_K$.

Pored vrijednosti funkcija i usmjerenih derivacija u pojedinim točkama, kao stupnjevi slobode mogu se javiti i srednje vrijednosti funkcija (i derivacija).

Definicija 4.3 Konačan element je Lagrangeov ako su svi stupnjevi slobode oblika $p \mapsto p(a_i)$. Ako se bar jedna usmjerena derivacija javlja kao stupanj slobode, onda kažemo da je element Hermiteov.

Od sada ćemo uzimati da su svi stupnjevi slobode definirani na svojoj "prirodnoj domeni". Na primjer, ako stupnjevi slobode nekog elementa sadrže u sebi derivacije do drugog reda uključivo, onda ćemo uzimati da je njihova domena $C^2(K)$. To je nužno zbog definicije interpolacijskog operatora, a i stoga što funkcional nad P može imati beskonačno mnogo različitih proširenja na $C^s(K)$. Na primjer, ako je K trokut, $a \in K$ njegov baricentar i $P = \mathbb{P}_1$. Tada se funkcional $p \mapsto p(a)$ može proširiti s $\mathbb{P}_1$ na $C(K)$ kao $p \mapsto \int_K p(x)\, dx/|K|$.

Definicija 4.4 Neka je zadan konačni element (K, P, Σ). Pretpostavimo da je s najviši stupanj derivacije koja se javlja u stupnjevima slobode elementa i da su svi stupnjevi slobode dobro definirani na $C^s(K)$. Tada preslikavanje $\Pi\colon C^s(K) \to P$ definirano formulom

$$\Pi v = \sum_{i=1}^{N} \phi_i(v) p_i \tag{4.9}$$

nazivamo P-interpolacijski operator.

Zbog unisolventnosti, P-interpolant Πv, je jedinstvena funkcija iz P sa svojstvom

$$\phi_i(\Pi v) = \phi_i(v), \quad 1 \leq i \leq N.$$

Prirodno je zahtijevati, i u svim dosadašnjim primjerima smo imali, da je

$$P \subset \mathrm{dom}(\Pi) = C^s(K), \tag{4.10}$$

tj. da ako stupnjevi slobode sadrže derivacije do stupnja $s \geq 0$, onda su funkcije iz P barem klase C^s. Uz taj zahtijev imamo

$$\forall p \in P, \quad \Pi p = p. \tag{4.11}$$

Lagrangeovi konačni elementi su nedvosmisleno definirani, no kod Hermiteovih elementa mogući su različiti izbori stupnjeva slobode. Stoga uvodimo sljedeću definiciju.

Definicija 4.5 Dva konačna elementa (K, P, Σ) i $(\tilde{K}, \tilde{P}, \tilde{\Sigma})$ su jednaki ako vrijedi

$$K = \tilde{K}, \quad P = \tilde{P}, \quad \Pi = \tilde{\Pi},$$

gdje su Π i $\tilde{\Pi}$ pripadni interpolacijski operatori.

Uzmimo radi ilustracije Zienkiewiczov trokut. Imamo sljedeće stupnjeve slobode:

$$\Sigma = \{p(a_i),\ \ i = 1,2,3,\ \ Dp(a_i)\cdot(a_j - a_i),\ \ 1 \leq i,j \leq 3,\ i \neq j\}$$
$$\tilde{\Sigma} = \{p(a_i),\ \ i = 1,2,3,\ \ \partial_k p(a_i),\ \ i = 1,2,3,\ k = 1,2\}.$$

Interpolacijski operatori su dani formulama

$$\Pi v = \sum_{i=1}^{3} v(a_i)p_i + \sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{3} Dp(a_i)\cdot(a_j - a_i)p_{ij}$$
$$\tilde{\Pi} v = \sum_{i=1}^{3} v(a_i)\tilde{p}_i + \sum_{i=1}^{3}\sum_{k=1}^{2} \partial_k p(a_i)\tilde{p}_{ik},$$

gdje su p_i, p_{ij} te $\tilde{p}_i$ i $\tilde{p}_{ik}$ pripadne bazne funkcije.
Zadatak. Dokažite da je $\Pi = \tilde{\Pi}$ ($\mathrm{dom}(\Pi) = \mathrm{dom}(\tilde{\Pi}) = C^1(K)$). $\square$

4.6 Afina familija elemenata

Pogledajmo prvo jedan jednostavan primjer. Neka je (K, P_K, Σ_K) trokut tipa 2. Želimo opisati familiju takvih trokuta na što jednostavniji način.

Fiksirajmo jedan trokut tipa 2, $\hat{K}$, s vrhovima $\hat{a}_i$ te polovištima stranica $\hat{a}_{ij} = (\hat{a}_i + \hat{a}_j)/2$, $1 \leq i, j \leq 3$. Stupnjevi slobode su

$$\hat{\Sigma} = \{p(\hat{a}_i),\ i = 1, 2, 3,\ \ p(\hat{a}_{ij}),\ \ 1 \leq i < j \leq 3\},$$

a prostor funkcija je $\hat{P} = \mathbb{P}_2(\hat{K})$. Za svaki element K iz familije postoji jedinstveno afino preslikavanje

$$F_K(\hat{x}) = B_k\hat{x} + b_K$$

koje je invertibilno i za koje je $F_K(\hat{a}_i) = a_i$, $i = 1, 2, 3$, gdje su a_i vrhovi trokuta K. Tada je očito

$$F_K(\hat{a}_{ij}) = a_{ij}, \quad 1 \leq i < j \leq 3.$$

Sada je prirodno na K definirati prostor P_K na sljedeći način:

$$P_K^* = \{p\colon K \to \mathbb{R}\colon p = \hat{p} \circ F_K^{-1},\ \ \hat{p} \in \hat{P}\}.$$

Budući da je preslikavanje afino, evidentno imamo

$$P_K^* = \mathbb{P}_2(K) = P_K.$$

Zaključak je da element (K, P_K, Σ_K) možemo u potpunosti opisati pomoću elementa $(\hat{K}, \hat{P}, \hat{\Sigma})$ i preslikavanja F_K na sljedeći način:

$$\begin{aligned}
K &= F_K(\hat{K}),\\
P_K &= \{p\colon K \to \mathbb{R}\colon p = \hat{p} \circ F_K^{-1},\ \ \hat{p} \in \hat{P}\}\\
\Sigma_K &= \{p(F_K(\hat{a}_i)),\ i = 1, 2, 3,\ \ p(F_K(\hat{a}_{ij})),\ \ 1 \leq i < j \leq 3\}.
\end{aligned}$$

Time dolazimo do sljedeće definicije.

Definicija 4.6 Dva konačna elementa (K, P, Σ) i $(\hat{K}, \hat{P}, \hat{\Sigma})$, sa stupnjevima slobode oblika (4.8), su afino-ekvivalentna ako postoji invertibilno afino preslikavanje

$$F_K(\hat{x}) = B_K\hat{x} + b_K, \tag{4.12}$$

za koje vrijedi

$$K = F_K(\hat{K}), \tag{4.13}$$

$$P_K = \{p\colon K \to \mathbb{R}\colon p = \hat{p} \circ F_K^{-1},\ \ \hat{p} \in \hat{P}\} \tag{4.14}$$

$$a_i^r = F_K(\hat{a}_i^r),\ r = 0, 1, 2, \tag{4.15}$$

$$\xi_{ik}^1 = B_K\hat{\xi}_{ik}^1,\ \ \xi_{ik}^2 = B_K\hat{\xi}_{ik}^2,\ \ \xi_{il}^2 = B_K\hat{\xi}_{il}^2, \tag{4.16}$$

gdje se nodalne točke a_i^r i $\hat{a}_i^r$ te vektori ξ_{ik}^1, ξ_{ik}^2, ξ_{il}^2 te $\hat{\xi}_{ik}^1$, $\hat{\xi}_{ik}^2$, $\hat{\xi}_{il}^2$ pojavljuju u definiciji Σ, odnosno $\hat{\Sigma}$.

Kao u gornjem primjeru, lako je provjeriti da su svaka dva n-simpleksa tipa (k), $k \geq 1$, afino ekvivalentana. Isto vrijedi i za n-simplekse tipa $(3')$. Svaka dva n-pravokutnika tipa (k), $k \geq 1$, afinu su ekvivalentna s dijagonalnim preslikavanjem. Isto se može provjeriti za pravokutnike tipa $(2')$ i $(3')$.

Kod Hermiteovih elemenata situacija je složenija. Hermiteovi n-simpleksi tipa (3), s usmjerenim derivacijama kao stupnjevima slobode, afino su ekvivalentni, što slijedi iz

$$a_j - a_i = F_K(\hat{a}_j) - F_K(\hat{a}_i) = B_K(\hat{a}_j - \hat{a}_i).$$

Ako za stupnjeve slobode uzmemo parcijalne derivacije, onda dva Hermiteova n-simpleksa tipa (3) više ne moraju biti afino ekvivalentna. [3]

Zadatak. Pokažite da su svaka dva Bogner-Fox-Schmidtova pravokutnika afino ekvivalentna. □

Budući da afino preslikavanje ne čuva prave kuteve, elementi koji imaju normalne derivacije kao stupnjeve slobode općenito nisu afino ekvivalentni. To vrijedi, na primjer, za Argyrisove trokute.

S druge strane, pretpostavimo da imamo definiran referentni konačni element $(\hat{K}, \hat{P}, \hat{\Sigma})$. Tada konačni element (K, P, Σ) možemo definirati formulama (4.13) – (4.16), gdje je F_K bijektivno afino preslikavanje (4.12). Unisolventnost tako definiranog elementa se lako dokazuje. Jedan primjer takve definicije elemenata su elementi na paralelogramima odnosno paralelopipedima. Svaki paralelogram moguće je dobiti afinim preslikavanjem jediničnog pravokutnika (kocke). Ako je referentni element na jediničnom pravokutniku pravokutnik tipa (k), onda na parlelogamima dobivamo konačni element čije funkcije poćenito nisu iz $\mathbb{Q}_k$ (osima ako se ne radi o dijagonalnom afinom preslikavanju, odnosno pravokutniku).

Teorem 4.7 Neka su (K, P, Σ) i $(\hat{K}, \hat{P}, \hat{\Sigma})$, dva afino-ekvivalentna konačna elementa sa stupnjevima slobode oblika (4.8) i neka je F pripadno afino preslikavanje. Tada je

$$\forall v \in \mathsf{dom}(\Pi), \quad (\Pi v) \circ F = \hat{\Pi}(v \circ F).$$

Dokaz. Zbog pretpostavke o stupnjevima slobode, interpolacijski operator Π ima oblik

$$\Pi v = \sum_i v(a_i^0) p_i^0 + \sum_{i,k} \{Dv(a_i^1) \cdot \xi_{ik}^1\} p_{ik}^1 + \sum_{i,k,l} \{D^2 v(a_i^2) \xi_{il}^2 \cdot \xi_{ik}^2\} p_{ikl}^2,$$

gdje su p_i^0, p_{ik}^1 i p_{ikl}^2 odgovarajuće bazne funkcije. Koristeći definiciju afine ekvivalentnosti i formulu za derivaciju kompozicije funkcija dobivamo

$$\begin{aligned} Dv(a_i^1) \cdot \xi_{ik}^1 &= Dv(F(\hat{a}_i^1)) \cdot B\hat{\xi}_{ik}^1 = Dv(F(\hat{a}_i^1)) \cdot DF(\hat{a}_i^1)\hat{\xi}_{ik}^1 \\ &= D(v \circ F)(\hat{a}_i^1) \cdot \hat{\xi}_{ik}^1 \end{aligned}$$

[3] Iako se ovdje radi o istom elementu.

Derivirajući još jednom izlazi

$$\begin{aligned} D^2v(a_i^2)\xi_{il}^2 \cdot \xi_{ik}^2 &= D^2v(F(\hat{a}_i^2))B\hat{\xi}_{il}^2 \cdot B\hat{\xi}_{ik}^2 \\ &= D^2v(F(\hat{a}_i^2))DF(\hat{a}_i^2)\hat{\xi}_{il}^2 \cdot DF(\hat{a}_i^2)\hat{\xi}_{ik}^2 \\ &= D^2(v \circ F)(\hat{a}_i^2)\hat{\xi}_{il}^2 \cdot \hat{\xi}_{ik}^2, \end{aligned}$$

gdje smo uzeli u obzir $D^2F = 0$. Time dobivamo

$$\begin{aligned} (\Pi v) \circ F = &\sum_i (v \circ F)(\hat{a}_i^0)p_i^0 \circ F + \sum_{i,k} \{D(v \circ F)(\hat{a}_i^1) \cdot \hat{\xi}_{ik}^1\}p_{ik}^1 \circ F \\ &+ \sum_{i,k,l} \{D^2(v \circ F)(\hat{a}_i^2)\hat{\xi}_{il}^2 \cdot \hat{\xi}_{ik}^2\}p_{ikl}^2 \circ F. \end{aligned}$$

Budući da za svako $p \in P$ vrijedi $\Pi p = p$, iz gornje jednakosti vidimo da funkcije $p_i^0 \circ F$, $p_{ik}^1 \circ F$ i $p_{ikl}^2 \circ F$ prestavljaju bazu u $\hat{P}$ (linearna nezavisnost slijedi iz regularnosti preslikavanja F). Štoviše, jednakost pokazuje da je to dualna baza u odnosu na stupnjeve slobode, pa je prema tome desna strana jednaka $\hat{\Pi}(v \circ F)$ i imamo

$$(\Pi v) \circ F = \hat{\Pi}(v \circ F). \ \square$$

Napomena. Da bismo dokazali prethodni teorem za proizvoljne stupnjeve slobode $\hat{\Sigma} = \{\hat{\phi}_i \colon 1 \leq i \leq N\}$ i $\Sigma = \{\phi_i \colon 1 \leq i \leq N\}$, nužno je i dovoljno da stupnjevi slobode zadovoljavaju

$$\forall v \in \mathrm{dom}(\Pi), \quad \phi_i(v) = \hat{\phi}_i(v \circ F), \ \ 1 \leq i \leq N.$$

Dokaz te jednakosti je centralni dio dokaza prethodonog teorema. $\square$

4.7 Konstrukcija prostora konačnih elemenata

Pretpostavimo, radi jednostavnosti, da je domena Ω poligonalna tako da se može prikazati kao unija poligonalnih skupova. Od triangulacije $\mathcal{T}_h$ zahtijevamo da zadovoljava:

- $\overline{\Omega} = \cup_{K \in \mathcal{T}_h} K$;
- Svi elementi $K \in \mathcal{T}_h$ su zatvoreni poliedarski skupovi s nepraznim interiorom;
- Svaka dva elementa imaju disjunktne interiore;
- Svaka stranica nekog elementa K_1 je ili dio granice $\partial\Omega$, ili stranica nekog drugog elementa K_2. U drugom slučaju govorimo da su elementi K_1 i K_2 susjedni.

Vidjeli smo u primjerima da posljednji uvjet moramo dodati ako želimo postići neprekidnost na granici susjednih elemenata.

Pogledajmo sada pobliže Lagrangeove konačne elemente. Da bismo postigli neprekidnost na granici elemenata uvodimo sljedeći zahtijev: kad god su (K_1, P_1, Σ_1) i (K_2, P_2, Σ_2) dva susjedna konačna elementa, te ako je

$$\Sigma_k = \{p(a_i^k) \colon 1 \le i \le N\}, \quad k = 1, 2,$$

onda mora vrijediti

$$\left(\cup_{i=1}^N \{a_i^1\}\right) \cap K_2 = \left(\cup_{i=1}^N \{a_i^2\}\right) \cap K_1.$$

Drugim riječima, nodalne točke na granici susjednih elemenata se poklapaju. Ako kao i do sad s $\mathcal{N}_K$ označimo skup nodalnih točaka elementa K, onda je

$$\mathcal{N}_h = \cup_{K \in \mathcal{T}_h} \mathcal{N}_K$$

skup svih nodalnih točaka triangulacije. Nadalje, za proizvoljno $b \in \mathcal{N}_h$ s $\Lambda(b)$ označavamo skup svih indeksa $\lambda \in \Lambda(b)$, za koje je b nodalna točka elementa K_λ. Prostor konačnih elemenata V_h možemo sada formalno definirati na ovaj način:

$$V_h = \{v = (v_K)_{K \in \mathcal{T}_h} \in \prod_{K \in \mathcal{T}_h} P_K \colon \forall b \in \mathcal{N}_h, \quad \forall \lambda, \mu \in \Lambda(b), \quad v_{K_\lambda}(b) = v_{K_\mu}(b)\}.$$

Skup svih stupnjeva slobode je

$$\Sigma_h = \{v(b) \colon b \in \mathcal{N}_h\}.$$

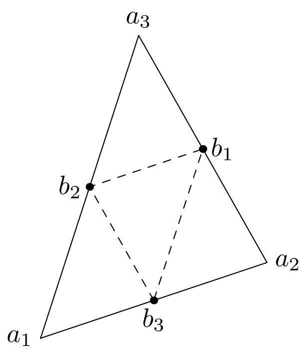
Uočimo da elementi prostora V_h nisu funkcije ukoliko nemamo neprekidnosti restrikcija na pojedine elemente na granici susjednih elemenata. Vidjeli smo da uz navedene uvjete svi do sada konstruirani Lagrangeovi elementi zadovoljavaju taj uvjet neprekidnosti. Ipak, to ne mora nužno biti istina, kao što pokazuje sljedeći primjer.

Primjer (CROUZEIX & RAVIART, 1973). Promatramo sljedeći element (slika 4.16) (K, P, Σ): K je jedan n-simpleks s vrhovima a_i, $i = 1, \dots, n+1$, $P = \mathbb{P}_1$, a skup stupnjeva slobode je $\Sigma = \{p(b_i) \colon 1 \le i \le n+1\}$, gdje je b_i baricentar stranice simpleksa koja ne sadrži vrh a_i:

$$b_i = \frac{1}{n} \sum_{\substack{j=1 \\ j \ne i}}^{n+1} a_j, \quad 1 \le i \le n+1,$$

Da bismo se uvjerili da je Σ $\mathbb{P}_1$-unisolventan dovoljno je uočiti da točke b_i čine vrhove jednog n-simpleksa. Nadalje, pridružene bazne funkcije su

$$p_i = 1 - n\lambda_i, \quad 1 \le i \le n+1.$$



Slika 4.16: Crouzeix-Raviartov trokut

Sada se lako uočava da funkcije iz pripadnog prostora konačnih elemenata nisu nužno neprekidne na granici susjednih elemenata. □

Napomena. Analogno se definira prostor konačnih elemenata kada su stupnjevi slobode oblika (4.8). Zahtijeva se poklapanje nodalnih točaka a_i^0, a_i^1 i a_i^2 na granici susjednih elemenata, te da je vrijednost funkcije u svim nodalnim točkama jednoznačno određena, a vrijednosti usmjerenih derivacija moraju zadovoljavati odgovarajuće uvjete. □

Ako je skup globalnih stupnjeva slobode oblika

$$\Sigma_h = \{\phi_{i,h} \colon 1 \le i \le M\}, \tag{4.17}$$

onda se pripadne bazne funkcije w_i, $1 \le i \le M$, definiraju relacijom

$$w_i \in V_h, \quad \phi_{j,h}(w_i) = \delta_{ij}, \quad 1 \le j \le M.$$

U svim dosadašnjim primjerima lako se provjerava da se globalne bazne funkcije konstriraju iz baznih funkcija elementa (lokalnih baznih funkcija) na sljedeći način: Neka je w dualna bazna funkcija pridružena funkcionalu ϕ_h, koji je pak pridružen nodalnoj točki b. Za svako $\lambda \in \Lambda(b)$ označimo s p_λ baznu funkciju elementa K_λ, pridruženu funkcionalu $\phi_h\big|_{K_\lambda}$. Tada je

$$w = \begin{cases} p_\lambda \text{ na } K_\lambda, & \lambda \in \Lambda(b) \\ 0 \text{ drugdje.} & \end{cases}$$

Tako uvijek dobivamo bazne funkcije s malim nosačem.

Neka je sada V_h prostor konačnih elemenata sa stupnjevima slobode oblika (4.17). Za svaku funkciju v koja je dovoljno glatka da su na njoj definirani svi stupnjevi slobode možemo definirati

$$\Pi_h v = \sum_{j=1}^{M} \phi_{j,h}(v) w_j, \tag{4.18}$$

gdje su w_j pripadne bazne funkcije. Funkcija $\Pi_h v$ karakterizirana je uvjetom:

$$\Pi_h v \in V_h, \quad \phi_{j,h}(v) = \phi_{j,h}(\Pi_h v), \quad 1 \leq j \leq M.$$

Ako je s najviši stupanj derivacije koja se pojavljuje u stupnjevima slobode, onda uzimamo

$$\mathrm{dom}(\Pi_h) = C^s(\overline{\Omega}).$$

Operator Π_h nazivamo globalnim interpolacijskim operatorom, ili preciznije, **V_h-interpolacijskim operatorom**.

Teorem 4.8 Neka je $v \in \mathrm{dom}(\Pi_h)$. Tada za svako $K \in \mathcal{T}_h$ imamo $v|_K \in \mathrm{dom}(\Pi_K)$ i vrijedi

$$\forall K \in \mathcal{T}_h, \quad (\Pi_h v)\big|_K = \Pi_K v|_K.$$

Dokaz. Slijedi iz načina na koji je Σ_h izveden iz Σ_K. $\square$

Definicija 4.7 Neka je prostor konačnih elemenata V_h sačinjen od istovrsnih elemenata (K, P_K, Σ_K), $K \in \mathcal{T}_h$. Ako je $V_h \subset C^k(\overline{\Omega})$, onda kažemo da je (K, P_K, Σ_K) element klase C^k.

Svi do sada konstruirani elementi su klase C^0 (neprekidni). Jedino su Argyrisov i Bellov trokut te Bogner-Fox-Schmidtov pravokutnik klase C^1.

Napomena. Moguće su i prostori konačnih elemenata građeni od više različitih tipova elemenata. Na primjer, moguće je kombinirati pravokutnike tipa $(2')$ s trokutima tipa (2) i slično. $\square$

O rubnim uvjetima

Pogledajmo sada kako se konstruira prostor $V_{0h} = V_h \cap H_0^1(\Omega)$. Kod Lagrangeovih elemenata klase C^0 to je posve jednostavno. Dovoljno je uzeti da funkcija $v_h \in V_h$ isčezava u svim nodalnim točkama na $\partial\Omega$. Tada će ona biti jednaka nuli na čitavom rubu $\partial\Omega$.

Kod Hermiteovih elemenata situacija može biti složenija. Na primjer, kod Hermiteovih elemenata tipa (3) ili $(3')$ funkcija $v_h \in V_h$ mora isčezavati u nodalnim točkama na rubu domene i parcijalne derivacije u tangencijalnim smjerovima na $\partial\Omega$ moraju biti jednake nuli. Normalne derivacije ne moraju nužno biti jednake nuli, no ako iz neke nodalne točke izlazi n različitih tangencijalnih vektora na $\partial\Omega$, gdje je n dimenzija prostora, onda će čitav gradijent u toj točki biti jednak nuli.

Slično se za prostor $V_h \subset C^1(\overline{\Omega}) \cap H^2(\Omega)$ konstruiraju potprostori[4]

$$V_{0h} = \{v_h \in V_h \colon v_h|_{\partial\Omega} = 0\} \subset H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega),$$
$$V_{00h} = \{v_h \in V_h \colon v_h|_{\partial\Omega} = \partial_\nu v_h|_{\partial\Omega} = 0\} \subset H_0^2(\Omega),$$

[4] $\partial_\nu v_h|_{\partial\Omega}$ je derivacija u smjeru vanjske normale ν na $\partial\Omega$.

dokidanjem pojedinih stupnjeva slobode. Na primjer, kod Argyrisovog trokuta, na stranici koja je pala na rub domene (u prostoru V_{00h}) moraju iščezavati vrijednosti funkcije i prvih derivacija u rubnim točkama, druge derivacije $\partial_{tt}v$ i $\partial_{t\nu}v$, te normalna derivacija u sredini segmenta. U rubnom vrhu iz kojeg izlaze dva rubna segmenta u različitim smjerovima moraju iščezavati sve druge derivacije.

Konačno, značajno je sljedeće svojstvo:

- Svi do sada uvedeni C^0 i C^1 elementi imaju svojstvo

$$v \in \mathrm{dom}(\Pi_h), \quad v|_{\partial\Omega} = 0 \;\Rightarrow\; \Pi_h v \in V_{0h};$$

- Svi do sada uvedeni C^1 elementi imaju svojstvo

$$v \in \mathrm{dom}(\Pi_h), \quad v|_{\partial\Omega} = \partial_\nu v|_{\partial\Omega} = 0 \;\Rightarrow\; \Pi_h v \in V_{00h}.$$

5

Greška interpolacije

U ovom poglavlju dokazujemo klasične ocjene greške interpolacije u prostorima Soboljeva.

5.1 Lokalne ocjene

Pretpostavljat ćemo da je Ω ograničena domena s Lipschitzovom granicom, tako da vrijede teoremi o kompaktnim ulaganjima. U primjenama ćemo uzimati da je $\Omega = \mathrm{Int}(K)$, gdje je K konačan element i u tom ćemo slučaju umjesto $W^{k,p}(\mathrm{Int}(K))$ pisati jednostavnije $W^{k,p}(K)$.

Svaki linearan prostor $E \subset W^{m,p}(\Omega)$ omogućava da se u $W^{m,p}(\Omega)$ uvede relacija ekvivalencije

$$\forall v_1, v_2 \in W^{m,p}(\Omega), \quad v_1 \,\mathcal{R}\, v_2 \quad \Leftrightarrow \quad v_1 - v_2 \in E.$$

Pomoću te relacije uvodi se kvocijentni skup $W^{m,p}(\Omega)/E$ čiji su elementi klase ekvivalencije, koje ćemo označavati s $\dot{v}$. Tako je

$$\dot{v} = \{w \in W^{m,p}(\Omega) \colon w - v \in E\},$$

klasa svih elemenata ekvivalentnih s $v \in W^{m,p}(\Omega)$. Ako je potprostor E zatvoren, onda je kvocijentni prostor $W^{m,p}(\Omega)/E$ Banachov s normom

$$\|\dot{v}\|_{W^{m,p}(\Omega)/E} = \inf_{w \in \dot{v}} \|w\|_{m,p;\Omega}$$

(vidi [9]).

Nas će zanimati kvocijentni prostor $W^{k+1,p}(\Omega)/\mathbb{P}_k$. Na svakom elementu tog prostora dobro je definirana polunorma

$$|\dot{v}|_{k+1,p} = |v|_{k+1,p}, \quad \forall v \in \dot{v},$$

budući da za svako $q \in \mathbb{P}_k$ vrijedi $|q|_{k+1,p} = 0$. Preslikavanje $\dot{v} \mapsto |\dot{v}|_{k+1,p}$ očito ima svojstva polunorme i vrijedi

$$|\dot{v}|_{k+1,p} \leq \|\dot{v}\|_{W^{k+1,p}(\Omega)/\mathbb{P}_k}.$$

Sljedeći teorem tvrdi da se radi o normi ekvivalentnoj kvocijentnoj normi na $W^{k+1,p}(\Omega)/\mathbb{P}_k$.

Teorem 5.1 Neka je Ω ograničena Lipschitzova domena. Postoji konstanta $C = C(\Omega)$ takva da je

$$\forall v \in W^{k+1,p}(\Omega), \quad \inf_{p \in \mathbb{P}_k} \|v + p\|_{k+1,p;\Omega} \leq C|v|_{k+1,p;\Omega}, \tag{5.1}$$

i stoga vrijedi

$$\forall \dot{v} \in W^{k+1,p}(\Omega)/\mathbb{P}_k, \quad \|\dot{v}\|_{W^{k+1,p}(\Omega)/\mathbb{P}_k} \leq C|\dot{v}|_{k+1,p;\Omega}, \tag{5.2}$$

Dokaz. Neka je $N = \dim \mathbb{P}_k$ i neka linearni funkcionali f_i, $i = 1, 2, \dots, N$ čine bazu u dualu prostora $\mathbb{P}_k$. Koristeći Hahn-Banachov teorem (vidi [9]) te funkcionale možemo proširiti do linearnih i neprekidnih funkcionala na $W^{k+1,p}(\Omega)$, i ta ćemo proširenja ponovo označavati s f_i, $i = 1, 2, \dots, N$. (Ukoliko se želi izbjeći upotreba Hahn-Banachovog teorema ovi se funkcionali mogu konstruirati eksplicitno, na primjer, uzimajući funkcionale $v \mapsto \int_\Omega \partial^\alpha v(x)\, dx$.)

Uočimo da za funkcije $q \in \mathbb{P}_k$ iz $f_i(q) = 0$, za $i = 1, 2, \dots, N$, slijedi $q \equiv 0$.

Pokazat ćemo da postoji konstanta $C = C(\Omega)$ za koju vrijedi

$$\forall v \in W^{k+1,p}(\Omega), \quad \|v\|_{k+1,p;\Omega} \leq C \left(|v|_{k+1,p;\Omega} + \sum_{i=1}^{N} |f_i(v)| \right). \tag{5.3}$$

Iz te nejednakosti slijedi (5.1); Da bismo se uvjerili odaberimo za zadano $v \in W^{k+1,p}(\Omega)$ funkciju $q \in \mathbb{P}_k$ takvu da je $f_i(v + q) = 0$, za $i = 1, 2, \dots, N$. Tada je

$$\inf_{p \in \mathbb{P}_k} \|v + p\|_{k+1,p;\Omega} \leq \|v + q\|_{k+1,p;\Omega} \leq C \left(|v + q|_{k+1,p;\Omega} + \sum_{i=1}^{N} |f_i(v + q)| \right)$$
$$= C|v|_{k+1,p;\Omega}.$$

Dokažimo (5.3) metodom kontradikcije. Pretpostavimo da tražena konstanta ne postoji. Tada bi postojao niz funkcija (v_l) iz $W^{k+1,p}(\Omega)$, sa svojstvom

$$\forall l \in \mathbb{N}, \quad \|v_l\|_{k+1,p;\Omega} = 1, \ \lim_{l \to \infty} \left(|v_l|_{k+1,p;\Omega} + \sum_{i=1}^{N} |f_i(v_l)| \right) = 0.$$

Prostor $W^{k+1,p}(\Omega)$ je kompaktno uložen u $W^{k,p}(\Omega)$, te stoga niz (v_l) ima podniz koji konvergira u $W^{k,p}(\Omega)$. Taj ćemo podniz ponovo označavati s (v_l), a njegov limes označavamo s v. Zbog

$$\lim_{l\to\infty} \|v_l - v\|_{k,p;\Omega} = 0, \quad \lim_{l\to\infty} |v_l|_{k+1,p;\Omega} = 0,$$

zaključujemo da niz (v_l) konvergira prema v u $W^{k+1,p}(\Omega)$ i da je $|v|_{k+1,p;\Omega} = 0$. Stoga je $v \in \mathbb{P}_k$, a zbog neprekidnosti linearnih formi slijedi $|f_i(v)| = 0$, za $i = 1, 2, \dots, N$. Time dobivamo $v \equiv 0$, što je kontradikcija s $\|v_l\|_{k+1,p;\Omega} = 1$, jer odatle izlazi $\|v\|_{k+1,p;\Omega} = 1$. □

Naš je cilj ocijeniti grešku interpolacije na konačnom elementu: $\|u - \Pi_K u\|_{m,q,K}$. Da bismo odredili ovisnost greške o geometriji elementa (veličini i obliku) koristit ćemo argument skaliranja. Afinim preslikavanjem ćemo preslikati element na jedan referentni element i na njemu dati ocjenu greške. Ocjena na elementu K slijedit će zamjenom varijabli.

Kažemo da su dva skupa Ω i $\hat{\Omega}$ afino ekvivalentni ako postoji invertibilno afino preslikavanje

$$F(\hat{x}) = B\hat{x} + b, \quad B \in \mathbb{R}^{n\times n}, \quad b \in \mathbb{R}^n, \tag{5.4}$$

takvo da je

$$\Omega = F(\hat{\Omega}).$$

Pri tome ćemo koristiti oznake $x = F(\hat{x})$, $v = \hat{v} \circ F^{-1}$, $(\hat{v}(\hat{x}) = v(x))$.

Teorem 5.2 Neka su Ω i $\hat{\Omega}$ ograničeni afino ekvivalentni skupovi u $\mathbb{R}^n$. Ako je $v \in W^{m,p}(\Omega)$ za neki $m \geq 1$ i $p \in [1, \infty]$, onda je $\hat{v} = v \circ F \in W^{m,p}(\hat{\Omega})$ te postoji konstanta $C = C(m, n)$ takva da je

$$\forall v \in W^{m,p}(\Omega), \quad |\hat{v}|_{m,p;\hat{\Omega}} \leq C\|B\|^m |\mathrm{det}(B)|^{-1/p} |v|_{m,p;\Omega}, \tag{5.5}$$

gdje je B matrica afinog preslikavanja F iz (5.4).

Analogno, vrijedi

$$\forall \hat{v} \in W^{m,p}(\hat{\Omega}), \quad |v|_{m,p;\Omega} \leq C\|B^{-1}\|^m |\mathrm{det}(B)|^{1/p} |\hat{v}|_{m,p;\hat{\Omega}}. \tag{5.6}$$

Dokaz. Uočimo da je u slučaju $p < \infty$ teorem dovoljno dokazati za funkcije $v \in C^m(\overline{\Omega})$, odnosno $\hat{v} \in C^m(\overline{\hat{\Omega}})$. Opći slučaj se dobiva po argumentu gustoće, kao što ćemo pokazati.

Za multiindeks α, $|\alpha| = m$ imamo

$$\partial^\alpha \hat{v}(\hat{x}) = D^m \hat{v}(\hat{x})(e_{\alpha_1}, e_{\alpha_2}, \dots, e_{\alpha_m})$$

gdje su e_i vektori kanonske baze u $\mathbb{R}^n$. Odavde lako slijedi

$$|\partial^\alpha \hat{v}(\hat{x})| \leq \|D^m \hat{v}(\hat{x})\| = \sup_{\substack{\|\xi_i\|\leq 1\\ 1\leq i\leq m}} |D^m \hat{v}(\hat{x})(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m)|.$$

Stoga je

$$|\hat{v}|_{m,p;\hat{\Omega}} = \left(\int_{\hat{\Omega}} \sum_{|\alpha|=m} |\partial^\alpha \hat{v}(\hat{x})|^p \, d\hat{x} \right)^{1/p} \leq C_1 \left(\int_{\hat{\Omega}} \|D^m \hat{v}(\hat{x})\|^p \, d\hat{x} \right)^{1/p}, \tag{5.7}$$

gdje je $C_1 = C_1(m,n) = \sup_{p \geq 1} \alpha(n,m)^{1/p} = \alpha(n,m)$, a $\alpha(n,m)$ je broj parcijalnih derivacija reda m.

Koristeći paravilo za derivaciju kompozicije funkcija dolazimo do formule

$$D^m \hat{v}(\hat{x})(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m) = D^m v(x)(B\xi_1, B\xi_2, \ldots, B\xi_m),$$

što daje

$$\|D^m \hat{v}(\hat{x})\| \leq \|D^m v(x)\| \|B\|^m,$$

i stoga

$$\int_{\hat{\Omega}} \|D^m \hat{v}(\hat{x})\|^p \, d\hat{x} \leq \|B\|^{mp} \int_{\hat{\Omega}} \|D^m v(F(\hat{x}))\|^p \, d\hat{x}. \tag{5.8}$$

Po formuli zamjene varijabli je

$$\int_{\hat{\Omega}} \|D^m v(F(\hat{x}))\|^p \, d\hat{x} = |\det(B^{-1})| \int_{\Omega} \|D^m v(x)\|^p \, dx.$$

Nadalje, postoji konstanta $C_2 = C_2(m,n)$ takva da je

$$\|D^m v(x)\| \leq C_2 \max_{|\alpha|=m} |\partial^\alpha v(x)|,$$

pa dobivamo

$$\left(\int_{\Omega} \|D^m v(x)\|^p \, dx \right)^{1/p} \leq C_2 |v|_{m,p;\Omega}. \tag{5.9}$$

Kombinirajući (5.7), (5.8) i (5.9) dobivamo (5.5).

Da bismo zaključili da (5.5) vrijedi za sve funkcije iz $W^{m,p}(\Omega)$ uočimo preslikavanje $\mathcal{I}\colon C^m(\overline{\Omega}) \to W^{m,p}(\hat{\Omega})$ definirano s $\mathcal{I}(v) = \hat{v}$. To je linearan operator; zbog (5.5) je i neprekidan, a kako je $C^m(\overline{\Omega})$ gust u $W^{m,p}(\Omega)$ on ima jedinstveno proširenje po neprekidnosti do operatora $\mathcal{I}\colon W^{m,p}(\Omega) \to W^{m,p}(\hat{\Omega})$. Time je dokazano da je $\mathcal{I}(v) = \hat{v} \in W^{m,p}(\Omega)$ za sve $v \in W^{m,p}(\Omega)$, te da nejednakost (5.5) vrijedi za sve $v \in W^{m,p}(\Omega)$.

Nejednakost (5.6) dobiva se zamjenom uloga elemenata K i $\hat{K}$ i time je teorem dokazan u slučaju $p < \infty$.

Slučaj $p = \infty$. Funkcija $v \in W^{m,\infty}(\Omega)$ pripada prostoru $W^{m,p}(\Omega)$ za svako $p < \infty$ (domena je ograničena). Prema dokazanom, funkcija $\hat{v}$ pripada prostoru $W^{m,p}(\hat{\Omega})$ za svako $p < \infty$ i k tome postoji konstanta $C = C(m,n)$ takva da je

$$\forall |\alpha| = m, \quad |\partial^\alpha \hat{v}|_{p;\hat{\Omega}} \leq |\hat{v}|_{m,p;\hat{\Omega}} \leq C \|B\|^m |\det(B)|^{-1/p} |v|_{m,p;\Omega}.$$

Desna je strana uniformno ograničena po p, pa prema Lemi C.2 zaključujemo da se derivacije $\partial^\alpha \hat{v}$ nalaze u prostoru $L^\infty(\hat{\Omega})$ za sve $|\alpha| = m$. Time dolazimo do zaključka da je $\hat{v} \in W^{m,\infty}(\hat{\Omega})$. Prelaskom na limes kada $p \to \infty$ u nejednakosti (5.5), vidi Lemu C.1, zaključujemo da (5.5) vrijedi i za $p = \infty$. Ponovo, (5.6) se dobiva zamjenom uloga elemenata K i $\hat{K}$. $\square$

Normu matrice B možemo odrediti iz geometrije domena Ω i $\hat{\Omega}$ na sljedeći način: neka je

$$h = \mathrm{diam}(\Omega), \quad \hat{h} = \mathrm{diam}(\hat{\Omega}), \tag{5.10}$$

$$\rho = \sup\{\mathrm{diam}(S) \colon S \subset \Omega \text{ je kugla sadržana u } \Omega\}, \tag{5.11}$$

$$\hat{\rho} = \sup\{\mathrm{diam}(\hat{S}) \colon \hat{S} \subset \hat{\Omega} \text{ je kugla sadržana u } \hat{\Omega}\}. \tag{5.12}$$

Lema 5.1 Neka su $\hat{\Omega}$ i $\Omega = F(\hat{\Omega})$ dva ograničena afino-ekvivalentna otvorena skupa u $\mathbb{R}^n$, a $F(\hat{x}) = B\hat{x} + b$, pripadno invertibilno afino preslikavanje. Tada je

$$\|B\| \leq \frac{h}{\hat{\rho}}, \quad \|B^{-1}\| \leq \frac{\hat{h}}{\rho}. \tag{5.13}$$

Dokaz. Možemo pisati

$$\|B\| = \frac{1}{\hat{\rho}} \sup_{\|\xi\| = \hat{\rho}} \|B\xi\|.$$

Po definiciji broja $\hat{\rho}$ za dano ξ možemo naći dvije točke $\hat{y}, \hat{z} \in \overline{\hat{\Omega}}$ takve da je $\xi = \hat{z} - \hat{y}$. Kako je $B\xi = F(\hat{z}) - F(\hat{y})$, a $F(\hat{z}), F(\hat{y}) \in \overline{\Omega}$, zaključujemo da je $\|B\xi\| \leq h$. Time dobivamo prvu nejednakost. Druga se dobiva zamjenom uloga. $\square$

Osnovna ocjena greške interpolacije bazira se na svojstvu interpolacijskog operatora da se reducira na identitetu na prostoru $\mathbb{P}_k$. Stoga prvo dajemo apstraktnu ocjenu koja vrijedi za svaki operator koji ima to svojstvo.

Teorem 5.3 Za odabrane cijele brojeve $k \geq 0$ i $m \geq 0$ te $p, q \in [1, \infty]$, neka su $W^{k+1,p}(\hat{\Omega})$ i $W^{m,q}(\hat{\Omega})$ dva prostora Soboljeva koji zadovoljavaju

$$W^{k+1,p}(\hat{\Omega}) \subset W^{m,q}(\hat{\Omega}), \tag{5.14}$$

i neka je $\hat{\Pi} \in \mathcal{L}(W^{k+1,p}(\hat{\Omega}), W^{m,q}(\hat{\Omega}))$ linearno i neprekidno preslikavanje sa svojstvom

$$\forall \hat{p} \in \mathbb{P}_k, \quad \hat{\Pi}\hat{p} = \hat{p}. \tag{5.15}$$

Za ograničeni otvoreni skup Ω koji je afino-ekvivalentan s $\hat{\Omega}$ definiramo preslikavanje Π_Ω formulom

$$(\Pi_\Omega v) \circ F = \hat{\Pi}(v \circ F), \tag{5.16}$$

za sve $v \in W^{k+1,p}(\Omega)$, gdje je $F\colon \hat{\Omega} \to \Omega$ pripadno afino preslikavanje. Tada postoji konstanta $C = C(\hat{\Pi}, \hat{\Omega})$ takva da[1]

$$\forall v \in W^{k+1,p}(\Omega), \quad |v - \Pi_\Omega v|_{m,q;\Omega} \le C|\Omega|^{(1/q)-(1/p)} \frac{h^{k+1}}{\rho^m} |v|_{k+1,p;\Omega}. \tag{5.17}$$

Dokaz. Prema svojstvu (5.15) imamo

$$\forall \hat{v} \in W^{k+1,p}(\hat{\Omega}),\ \forall \hat{p} \in \mathbb{P}_k, \quad \hat{v} - \hat{\Pi}\hat{v} = (I - \hat{\Pi})(\hat{v} + \hat{p}),$$

gdje je I identiteta s $W^{k+1,p}(\hat{\Omega})$ u $W^{m,q}(\hat{\Omega})$. Prema (5.14) ta je identiteta neprekidno preslikavanje i vrijedi

$$\begin{aligned}
|\hat{v} - \hat{\Pi}\hat{v}|_{m,q;\hat{\Omega}} &\le \|I - \hat{\Pi}\|_{\mathcal{L}(W^{k+1,p}(\hat{\Omega}), W^{m,q}(\hat{\Omega}))} \inf_{\hat{p} \in \mathbb{P}_k} \|\hat{v} + \hat{p}\|_{k+1,p;\hat{\Omega}} \\
&\le \|I - \hat{\Pi}\|_{\mathcal{L}(W^{k+1,p}(\hat{\Omega}), W^{m,q}(\hat{\Omega}))} C(\hat{\Omega}) |\hat{v}|_{k+1,p;\hat{\Omega}} \\
&= C(\hat{\Pi}, \hat{\Omega}) |\hat{v}|_{k+1,p;\hat{\Omega}},
\end{aligned}$$

gdje smo iskoristili Teorem 5.1. Ako uzmemo $\hat{v} = v \circ F$ ($v \in W^{k+1,p}(\Omega)$ povlači $\hat{v} \in W^{k+1,p}(\hat{\Omega})$ prema Teoremu 5.2) onda imamo (prema (5.16))

$$\hat{v} - \hat{\Pi}\hat{v} = (v - \Pi_\Omega v) \circ F$$

i stoga primjenom Teorema 5.2, formula (5.6), dobivamo

$$|v - \Pi_\Omega v|_{m,q;\Omega} \le C(m,n) \|B^{-1}\|^m |\det(B)|^{1/q} |\hat{v} - \hat{\Pi}\hat{v}|_{m,q;\hat{\Omega}}.$$

Po istom teoremu imamo

$$|\hat{v}|_{k+1,p;\hat{\Omega}} \le C(k,n) \|B\|^{k+1} |\det(B)|^{-1/p} |v|_{k+1,p;\Omega},$$

pa slijedi

$$|v - \Pi_\Omega v|_{m,q;\Omega} \le C \|B^{-1}\|^m \|B\|^{k+1} |\det(B)|^{1/q - 1/p} |v|_{k+1,p;\Omega},$$

gdje konstanta C ovisi o n, k, m, $\hat{\Pi}$ i $\hat{\Omega}$. Primjenom Leme 5.1 dobivamo

$$\begin{aligned}
|v - \Pi_\Omega v|_{m,q;\Omega} &\le C \frac{\hat{h}^m}{\hat{\rho}^{k+1}} \frac{h^{k+1}}{\rho^m} |\det(B)|^{1/q-1/p} |v|_{k+1,p;\Omega} \\
&= C_1 \frac{h^{k+1}}{\rho^m} |\det(B)|^{1/q-1/p} |v|_{k+1,p;\Omega},
\end{aligned}$$

[1] S $|\Omega|$ označavamo Lebesgueovu mjeru skupa Ω.

pri čemo je konstanta C_1 ostala ovisna o istim veličinama. Konačna ocjena slijedi iz primjedbe da je

$$|\det(B)| = \frac{|\Omega|}{|\hat{\Omega}|}. \tag{5.18}$$

□

Dokazani rezultat želimo primijeniti na afino ekvivalentne konačne elemente. Za element (K, P, Σ), pripadni interpolacijski operator označavamo Π_K, a s h_K i ρ_K označavamo dijametar elementa te dijametar naveće upisane kugle.

Teorem 5.4 Neka je $(\hat{K}, \hat{P}, \hat{\Sigma})$ konačan element. Označimo sa s najviši stupanj parcijalne derivacije koja se javlja u $\hat{\Sigma}$. Pretpostavimo da sljedeća ulaganja vrijede za odabrane cijele brojeve $k \geq 0$ i $m \geq 0$ te $p, q \in [1, \infty]$:

$$W^{k+1,p}(\hat{K}) \subset C^s(\hat{K}), \tag{5.19}$$

$$W^{k+1,p}(\hat{K}) \subset W^{m,q}(\hat{K}), \tag{5.20}$$

$$\mathbb{P}_k \subset \hat{P} \subset W^{k+1,p}(\hat{K}). \tag{5.21}$$

Tada postoji konstanta $C = C(\hat{K}, \hat{P}, \hat{\Sigma})$ takva da za sve afino-ekvivalentne elemente (K, P, Σ) i sve funkcije $v \in W^{k+1,p}(K)$ vrijedi

$$|v - \Pi_K v|_{m,q;K} \leq C|K|^{(1/q)-(1/p)} \frac{h_K^{k+1}}{\rho_K^m} |v|_{k+1,p;K}. \tag{5.22}$$

Dokaz. Treba samo provjeriti pretpostavke Teorema 5.3. Uočimo da je $\mathrm{dom}(\hat{\Pi}) = C^s(\hat{K})$, gdje je $\hat{\Pi}$ $\hat{P}$-interpolacijski operator elementa $(\hat{K}, \hat{P}, \hat{\Sigma})$. Kako je prema uvjetima (5.21) i (5.19), $\mathbb{P}_k \subset \hat{P} \subset \mathrm{dom}(\hat{\Pi})$, a interpolacijski operator je identiteta na $\hat{P}$, imamo

$$\forall \hat{p} \in \mathbb{P}_k, \quad \hat{\Pi}\hat{p} = \hat{p}.$$

Sljedeće što treba provjeriti je $\hat{\Pi} \in \mathcal{L}(W^{k+1,p}(\hat{K}), W^{m,q}(\hat{K}))$. Radi jednostavnosti uzet ćemo da je $s = 2$ tako da interpolacijski operator ima oblik

$$\hat{\Pi}\hat{v} = \sum_i \hat{v}(\hat{a}_i^0)\hat{p}_i^0 + \sum_{i,k} \{D\hat{v}(\hat{a}_i^1) \cdot \hat{\xi}_{ik}^1\}\hat{p}_{ik}^1 + \sum_{i,k,l} \{D^2\hat{v}(a_i^2)\hat{\xi}_{il}^2 \cdot \hat{\xi}_{ik}^2\}\hat{p}_{ikl}^2.$$

Za $\hat{v} \in W^{k+1,p}(\hat{K})$ imamo sljedeću ocjenu

$$\begin{aligned}
\|\hat{\Pi}\hat{v}\|_{m,q,\hat{K}} &\leq \sum_i |\hat{v}(\hat{a}_i^0)| \, \|\hat{p}_i^0\|_{m,q;\hat{K}} + \sum_{i,k} |D\hat{v}(\hat{a}_i^1) \cdot \hat{\xi}_{ik}^1| \, \|\hat{p}_{ik}^1\|_{m,q;\hat{K}} \\
&\quad + \sum_{i,k,l} |D^2\hat{v}(a_i^2)\hat{\xi}_{il}^2 \cdot \hat{\xi}_{ik}^2| \, \|\hat{p}_{ikl}^2\|_{m,q,\hat{K}} \\
&\leq C\left(\sum_i \|\hat{p}_i^0\|_{m,q;\hat{K}} + \sum_{i,k} \|\hat{p}_{ik}^1\|_{m,q;\hat{K}} + \sum_{i,k,l} \|\hat{p}_{ikl}^2\|_{m,q;\hat{K}}\right) \|\hat{v}\|_{C^2(\hat{K})} \\
&\leq C(\hat{K}, \hat{P}, \hat{\Sigma})\|\hat{v}\|_{k+1,p;\hat{K}},
\end{aligned}$$

gdje smo iskoristili ulaganje (5.19). Time je neprekidnost operatora dokazana. Konačno, kod afino-ekvivalentnih elemenata postoji veza između interpolacijskih operatora

$$\forall v \in \mathrm{dom}\Pi_K, \quad (\Pi_K v) \circ F_K = \hat{\Pi}(v \circ F_K).$$

(vidi Teorem 4.7) te su stoga sve pretpostavke Teorema 5.3 ispunjene. Ocjena (5.22) je reformulacija ocjene (5.17). □

Napomena. Iz dokaza je vidljivo da smo pretpostavku $\hat{P} \subset W^{k+1,p}(\hat{K})$ mogli zamijeniti s $\hat{P} \subset C^s(\hat{K}) \cap W^{m,q}(\hat{K})$. □

Napomena. Ako je potrebno, moguće je ocijeniti član $|K|^{(1/p)-(1/q)}$ na osnovu ocjene

$$\omega_n \rho_K^n \leq |K| \leq \omega_n h_K^n,$$

gdje je ω_n mjera jedinične sfere u $\mathbb{R}^n$. □

Prethodni teorem pokazuje da ako na nizu sve finijih triangulacija domene želimo postići konvergenciju interpolacijskog procesa, trebamo postaviti dodatne zahtijeve. Pretpostavljamo uvijek da imamo niz triangulacija čija "finoća" teži u nulu i čiji elementi ne "degeneriraju".

Definicija 5.1 Familija triangulacija $(\mathcal{T}_h)_{h>0}$ je regularna ako postoji broj $\sigma > 0$ takav da

- $h = \max_{K \in \mathcal{T}_h} h_K \to 0$;
- $\forall h > 0, \ \forall K \in \mathcal{T}_h, \quad \dfrac{h_K}{\rho_K} \leq \sigma.$

Ako imamo regularnu familiju triangulacija, onda možemo ocijeniti

$$\frac{1}{\rho_K^m} \leq \sigma^m \frac{1}{h_K^m} \quad \Rightarrow \quad \frac{h_K^{k+1}}{\rho_K^m} \leq \sigma^m h_K^{k+1-m}.$$

K tome, uočimo da ako su uvjeti Teorema 5.4 ispunjeni za neko $m > 1$, onda su ispunjeni i za $m-1$, pa možemo dobiti ocjenu u "nižoj" normi. Tada na desnoj strani dobivamo kvocijent h_K^{k+1}/ρ_K^{m-1} koji se može ocijeniti s $\sigma^{m-1} h_K^{k+2-m}$. Kako je prema definiciji regularne familije triangulacija h_K ograničeno nekom konstantom A, koja je određena jedino cijelom familijom triangulacija, dobivamo uniformnu ocjenu $\sigma^{m-1} h_K^{k+2-m} \leq (A/\sigma)\sigma^m h_K^{k+1-m}$. Na taj način možemo uniformno ocijeniti čitavu normu, a ne samo pojedine polunorme.

Teorem 5.5 Neka je zadana regularna familija triangulacija $(\mathcal{T}_h)_{h>0}$, čiji su elementi (K, P_K, Σ_K) afino ekvivalentni referentnom konačnom elementu $(\hat{K}, \hat{P}, \hat{\Sigma})$, koji zadovoljava uvjete Teorema 5.4.

Tada postoji konstanta $C = C(\hat{K}, \hat{P}, \hat{\Sigma})$ takva da za sve elemente K familije i sve funkcije $v \in W^{k+1,p}(K)$ vrijedi

$$\|v - \Pi_K v\|_{m,q;K} \leq C|K|^{(1/q)-(1/p)} h_K^{k+1-m} |v|_{k+1,p;K}. \tag{5.23}$$

5.2 Globalne ocjene

U ovoj sekciji dajemo ocjenu greške za globalni interpolacijski operator. Pri tome je nužno specificirati prostoru u kojem konstruiramo prostor konačnih elemenata.

Uzet ćemo da je promatrana varijacijska jednadžba zadana na prostoru V, $H^1_0(\Omega) \subset V \subset H^1(\Omega)$. Pretpostavljamo da je domena Ω poliedarski skup i da je na njoj definirana familija triangulacije $(\mathcal{T}_h)_{h>0}$. Sve su triangulacije konstruirane pomoću istog tipa elementa i pripadni prostori konačnih elemenata V_h, $h > 0$, zadovoljavaju $V_h \subset V$.

Preciznije, pretpostavit ćemo da su zadovoljena sljedeća svojstva:

H1 Domena $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ je poliedarska i prostor V zadovoljava $H^1_0(\Omega) \subset V \subset H^1(\Omega)$;

H2 Familija triangulacija $(\mathcal{T}_h)_{h>0}$, konstruirana nad Ω, je regularna (Definicija 5.1);

H3 Svi konačni elementi (K, P_K, Σ_K), za $K \in \cup_{h>0}\mathcal{T}_h$, afino su ekvivalentni s referentnim elementom $(\hat{K}, \hat{P}, \hat{\Sigma})$. To vrijedi dakle za sve $h > 0$ i sve $K \in \mathcal{T}_h$;

H4 Svi elementi (K, P_K, Σ_K), za $K \in \cup_{h>0}\mathcal{T}_h$, su klase C^0 i $V_h \subset V$.

Da bi bila ispunjena inkluzija $V_h \subset V$ potrebno je da je Dirichletov rubni uvjet *dobro* diskretiziran. Na primjer, ako se funkcije iz V poništavaju na dijelu granice $\Gamma \subset \partial\Omega$, onda Γ mora u svakoj triangulaciji biti precizno unija stranica nekih elemenata triangulacije.

Napomena. U ovakvoj postavi promatraju se samo zadaće s homogenim Dirichletovim uvjetom, odnosno pretpostavlja se da je prethodno napravljena homogenizacija Dirichletovog rubnog uvjeta. To je teorijski uvijek moguće napraviti, ali se u praksi rijetko radi. $\square$

Teorem 5.6 Neka su ispunjene pretpostavke H1–H4 i pretpostavimo da postoji cijeli broj $0 \leq k$ takav da vrijedi

$$H^{k+1}(\hat{K}) \subset C^s(\hat{K}), \tag{5.24}$$

$$\mathbb{P}_k \subset \hat{P} \subset H^{k+1}(\hat{K}), \tag{5.25}$$

gdje je s najviši stupanj parcijalne derivacije koja se javlja u $\hat{\Sigma}$.

Tada postoji konstanta C, neovisna o h, takva da za svako $v \in H^{k+1}(\Omega) \cap V$ vrijedi

$$\|v - \Pi_h v\|_{m,2;\Omega} \leq Ch^{k+1-m}|v|_{k+1,2;\Omega}, \quad 0 \leq m \leq \min\{1, k\}, \tag{5.26}$$

$$\left(\sum_{K\in\mathcal{T}_h} \|v - \Pi_h v\|^2_{m,2;K}\right)^{1/2} \leq Ch^{k+1-m}|v|_{k+1,2;\Omega}, \quad 2 \leq m \leq k+1, \tag{5.27}$$

gdje je Π_h V_h-interpolacijski operator.

Dokaz. Primijenjujem Teorem 5.5, sa $p = q = 2$. Dobivamo

$$\|v - \Pi_h v\|_{m,2;K} \leq C h_K^{k+1-m} |v|_{k+1,2;K}, \quad 0 \leq m \leq k+1.$$

Koristeći $(\Pi_h v)|_K = \Pi_K v$, za svako $K \in \mathcal{T}_h$, te $h_K \leq h$, dobivamo

$$\begin{aligned}\left(\sum_{K\in\mathcal{T}_h} \|v - \Pi_h v\|_{m,2;K}^2\right)^{1/2} &\leq C h^{k+1-m} \left(\sum_{K\in\mathcal{T}_h} |v|_{k+1,2;K}^2\right)^{1/2} \\ &= C h^{k+1-m} |v|_{k+1,2;\Omega}\end{aligned}$$

što vrijedi za sve $0 \leq m \leq k+1$. Kako su $v, \Pi_h v \in H^1(\Omega)$, za $m = 0, 1$ imamo

$$\left(\sum_{K\in\mathcal{T}_h} \|v - \Pi_h v\|_{m,2;K}^2\right)^{1/2} = \|v - \Pi_h v\|_{m,2;\Omega}. \ \square$$

Primijenimo sada ovaj rezultat na ocjenu greške metode konačnih elemenata za eliptičku varijacijsku zadaću. Potrebno je samo iskoristiti Céa-inu lemu i na mjesto proizvoljne funkcije $v_h \in V_h$ supstituirati $v_h = \Pi_h u$, gdje je $u \in V$ egzaktno rješenje, te primijeniti ocjenu iz prethodnog teorema. U tom postupku moramo zahtijeva dodatnu glatkoću rješenja varijacijske zadaće – $u \in H^{k+1}(\Omega)$. Dakle,

$$\|u - u_h\|_{1,2;\Omega} \leq C \inf_{v_h\in V_h} \|u - v_h\|_{1,2;\Omega} \leq C\|u - \Pi_h u\|_{1,2;\Omega} \leq C h^k |v|_{k+1,2;\Omega}.$$

gdje je $u_h \in V_h$ rješenje diskretnog problema. Time smo dokazali

Teorem 5.7 Neka su ispunjene pretpostavke H1–H4 i pretpostavimo da postoji cijeli broj $k \geq 1$ takav da vrijedi

$$H^{k+1}(\hat{K}) \subset C^s(\hat{K}), \tag{5.28}$$

$$\mathbb{P}_k \subset \hat{P} \subset H^{k+1}(\hat{K}), \tag{5.29}$$

gdje je s najviši stupanj parcijalne derivacije koja se javlja u $\hat{\Sigma}$.

Tada ako je $u \in V \cap H^{k+1}(\Omega)$ rješenje eliptičke varijacijske zadaće, onda postoji konstanta C, neovisna o h, takva da je

$$\|u - u_h\|_{1,2;\Omega} \leq C h^k |u|_{k+1,2;\Omega}, \tag{5.30}$$

gdje je $u_h \in V_h$ diskretno rješenje.

Prethodni teorem daje ocjenu greške metode uz uvjet da je egzaktno rješenje dovoljno glatko. Na primjer, triangulacija sastavljena od simpleksa tipa (1) dat će linearno konvergentnu metodu ako je egzaktno rješenje klase $H^2(\Omega)$. Ukoliko imamo samo $H^1(\Omega)$ rješenje, onda još uvijek možemo dobiti konvergenciju metode primijenjujući Teorem 3.2 (strana 48). Ograničit ćemo se samo na slučaj $s \leq 1$.

Teorem 5.8 Neka su ispunjene pretpostavke H1–H4 i neka je

$$\mathbb{P}_1 \subset \hat{P} \subset C^1(\hat{K}), \tag{5.31}$$

Pretpostavimo da je najviši stupanj parcijalnih derivacija koje se javljaju u $\hat{\Sigma}$ jednak 0 ili 1. Tada ako je $u \in V \subset H^1(\Omega)$ rješenje eliptičke varijacijske zadaće, onda vrijedi

$$\lim_{h\to 0} \|u - u_h\|_{1,2;\Omega} = 0, \tag{5.32}$$

gdje je $u_h \in V_h$ diskretno rješenje.

Dokaz. Prema Teoremu 3.2 potrebno je konstruirati oprator r_h, definiran na gustom potprostoru sa svojstvom (3.2). Pokazat ćemo da za r_h možemo uzeti interpolacijski operator.

Neka je

$$\mathcal{V} = W^{2,\infty}(\Omega) \cap V.$$

Taj je prostor gust u V jer je to već $C^\infty(\overline{\Omega}) \cap V$. Iz teorema o ulaganjima lako se provjerava da je

$$W^{2,\infty}(\hat{K}) \subset C^1(\hat{K}), \quad W^{2,\infty}(\hat{K}) \subset H^1(\hat{K}).$$

Time su ispunjeni uvjeti Teorema 5.5 (vidi (5.19), (5.20) i (5.21)) sa $s = k = m = 1$, $p = \infty$, $q = 2$; Stoga postoji konstanta C takva da je

$$\forall v \in \mathcal{V}, \quad \|v - \Pi_K v\|_{1,2;K} \le C|K|^{1/2} h_K |v|_{2,\infty;K}.$$

Sumiranjem po svim elementima dobivamo

$$\|v - \Pi_h v\|_{1,2;\Omega} \le C|\Omega|^{1/2} h |v|_{2,\infty;\Omega},$$

što daje

$$\lim_{h\to 0} \|v - \Pi_h v\|_{1,2;\Omega} = 0.$$

Rezultat slijedi primjenom Teoremu 3.2. □

5.3 Aubin-Nitscheova lema

Teorem 5.7 daje red konvergencije metode u H^1-normi. Sada nam je cilj pokazati da uz dodatnu regularnost u L^2-normi imamo za jedan viši red konvergencije.

Neka su zadana dva Hilbertova prostora V i H sa svojstvima

1. $V \subset H$ je gust potprostor od H;
2. V je neprekidno uložen u H.

Tada kažemo da je V gusto i neprekidno uložen u H. Ako skalarni produkt i normu u H označimo s $(\cdot,\cdot)$ i $|\cdot|$, a skalarni produkt i normu u V s $((\cdot,\cdot))$ i $\|\cdot\|$, onda neprekidnost ulaganja znači da postoji konstanta C, takva da je za svako $v \in V$,

$$|v| \le C_{H,V}\|v\|.$$

(Ulaganje je preslikavanje koje elementu $v \in V$ pridružuje isti taj element u H.) Takve su pretpostavke ispunjene za parove prostora $H = L^2(\Omega)$, $V = H^1(\Omega)$ i slično.

Zbog neprekidnosti ulaganja, svaki neprekidni funkcional na H je ujedno neprekidni funkcional nad V. Zaista, ako je za svako $v \in H$, $|\langle f, v\rangle| \le \|f\|_{H'}|v|$, onda je za svako $v \in V \subset H$, $|\langle f, v\rangle| \le C_{H,V}\|f\|_{H'}\|v\|$. Simbolički, imamo $H' \subset V'$. Lako je vidjeti da je to ulaganje neprekidno; vrijedi $\|f\|_{V'} \le C_{H,V}\|f\|_{H'}$.

Svaki se Hilbertov prostor može na osnovu Rieszovog teorema o reprezentaciji poistovjetit sa svojim dualom. To se čini tako da se element $v \in H$ poistovjeti s preslikavanjem $w \mapsto (w, v)$. Ako H poistovjetimo sa svojim dualom, onda ga možemo neprekidno uložiti u dualni prostor V'. To znači da postoji neprekidna injekcija koja svakom elementu $v \in H$ pridružuje neprekidni funkcional na V. Pridruženi funkcional je naprosto restrikcija funkcionala na V, a njegova neprekidnost je pokazana više. Injektivnost tog pridruživanja se vidi na sljedeći način: ako dva elementa $u, v \in H$ definiraju isti funkcionala na V, onda je za svako $w \in V$, $(w, u) = (w, v)$, tj. $(w, u - v) = 0$. Element $u - v$ je stoga okomit na čitav V, ali kako je V gust podskup od H, slijedi $u - v = 0$.

Opisana situacija često se jednostavno zapisuje kao

$$V \subset H = H' \subset V'$$

pri čemu su sva ulaganja neprekidna.

Uzmimo sada da je (V, H) jedan par takvih prostora. Neka je zadana bilinearana forma $a(\cdot,\cdot)$, definirana na $V \times V$, i funkciona $f \in V'$, koji zadovoljavaju uvjete Lax-Milgramove leme. Tada su jedinstveno određeni $u \in V$ i $u_h \in V_h \subset V$, kao rješenja varijacijskih zadaća:

$$\forall v \in V, \quad a(u, v) = \langle f, v\rangle, \tag{5.33}$$

$$\forall v \in V_h, \quad a(u_h, v) = \langle f, v\rangle. \tag{5.34}$$

Označimo li još sa M normu forme $a(\cdot,\cdot)$, onda imamo sljedeću apstraktnu ocjenu:

Teorem 5.9 (Aubin-Nitscheova lema) Neka prostori V i H zadovoljavaju navedene pretpostavke. Tada je

$$|u - u_h| \le M\|u - u_h\| \left(\sup_{g\in H}\left\{\frac{1}{|g|}\inf_{\phi\in V_h}\|\phi_g - \phi\|\right\}\right), \tag{5.35}$$

gdje smo za $g \in H$ sa $\phi_g \in V$ označili jedinstveno rješenje varijacijske zadaće

$$\forall v \in V, \quad a(v, \phi_g) = (g, v). \tag{5.36}$$

Dokaz. Egzistencija i jedistvenost rješenja $\phi_g \in V$, zadaće (5.36), dobiva se primjenom Lax-Milgramove leme. Prema karakterizaciji norme u Hilbertovom prostoru možemo pisati

$$|u - u_h| = \sup_{g \in H} \frac{|(g, u - u_h)|}{|g|}. \tag{5.37}$$

Stvaljajući $u - u_h$ u (5.36) dobivamo

$$a(u - u_h, \phi_g) = (g, u - u_h),$$

pa zbog ortogonalnosti

$$\forall \phi \in V_h, \quad a(u - u_h, \phi) = 0,$$

dobivamo

$$\forall \phi \in V_h, \quad a(u - u_h, \phi_g - \phi) = (g, u - u_h),$$

i stoga

$$|(g, u - u_h)| \leq M \|u - u_h\| \inf_{\phi \in V_h} \|\phi_g - \phi\|.$$

Tvrdnja slijedi primjenom formule (5.37). □

Zadaća (5.36) je adjungirana zadaća u odnosu na (5.33). Razlika je u tome što su prva i druga varijabla u bilinearnoj formi zamijenile mjesta. Ukoliko je forma simetrična, onda se polazna i adjungirana zadaća podudaraju.

U primjenama varijacijske zadaće koje dolaze od eliptičkih parcijalnih diferencijalnih jednadžbi drugog reda prostor V je zatvoreni potprostor od $H^1(\Omega)$, a za H uzimamo $H = L^2(\Omega)$. U tim okolnostima kažemo da je zadaća (5.36) regularna, ako za svako $g \in L^2(\Omega)$ ima jedinstveno rješenje $\phi_g \in V \cap H^2(\Omega)$ te postoji konstanta C takva da je

$$\forall g \in L^2(\Omega), \quad \|\phi_g\|_{2,2;\Omega} \leq C|g|_{0;\Omega}. \tag{5.38}$$

Teorem 5.10 Neka su ispunjene pretpostavke H1–H4, neka je $s = 0$, $n \leq 3$ i neka postoji $k \geq 1$ takav da je $u \in H^{k+1}(\Omega)$ i vrijedi

$$\mathbb{P}_k \subset \hat{P} \subset H^{k+1}(\Omega), \tag{5.39}$$

Ako je adjungirani problem regularan, onda postoji konstanta C, neovisna o h, takva da je

$$\|u - u_h\|_{2;\Omega} \leq Ch^{k+1}|u|_{k+1,2;\Omega}. \tag{5.40}$$

Dokaz. Ograničili smo se na slučaj $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, za $n \leq 3$, kako bismo imali ulaganje $H^2(\Omega) \subset C(\overline{\Omega})$. Stoga promatramo samo Lagrangeove konačne elemente ($s = 0$). Primjenom Teorem 5.7 dobivamo

$$\|u - u_h\|_{1,2;\Omega} \leq Ch^k |u|_{k+1,2;\Omega}, \tag{5.41}$$

Nadalje, ako primijenimo Teorem 5.6 na $v = \phi_g$, uz $k = m = 1$ i $s = 0$, dobivamo

$$\|\phi_g - \Pi_h \phi_g\|_{1,2;\Omega} \leq Ch|\phi_g|_{2,2;\Omega}$$

i stoga

$$\inf_{\phi \in V_h} \|\phi_g - \phi\|_{1,2;\Omega} \leq \|\phi_g - \Pi_h \phi_g\|_{1,2;\Omega} \leq Ch|\phi_g|_{2,2;\Omega} \leq Ch|g|_{0;\Omega},$$

gdje smo u zadnjem koraku iskoristili (5.38). Aubin-Nitscheova lema i (5.41) daju

$$\|u - u_h\|_{2;\Omega} \leq Ch\|u - u_h\|_{1,2;\Omega} \leq Ch^{k+1}|u|_{k+1,2;\Omega}. \ \square$$

5.4 Inverzne ocjene

U definiciji regularne familije triangulacija (Definicija 5.1) uveli smo neka ograničenja na izbor triangulacije. Ta ćemo ograničenja dopuniti još jednim uvjetom.

Definicija 5.2 Familija triangulacija $(\mathcal{T}_h)_{h>0}$ je kvaziuniformna ako je regularna i ako postoji broj $\nu > 0$ takav da

$$\forall K \in \bigcup_h \mathcal{T}_h, \quad \frac{h}{h_K} \leq \nu.$$

Teorem 5.11 Neka su zadovoljeni uvjet H1–H3 i neka je familija triangulacija kvaziuniformna. Neka su zadani parovi brojeva (l, r) i (m, q), s $0 \leq l \leq m$ te $r, q \in [1, \infty]$, takvi da je

$$\hat{P} \subset W^{l,r}(\hat{K}) \cap W^{m,q}(\hat{K}).$$

Tada postoji konstanta $C = C(\sigma, \nu, l, r, m, q)$ takva da je

$$\forall v \in X_h, \quad \left(\sum_{K \in \mathcal{T}_h} |v|^q_{m,q;K} \right)^{1/q} \leq \frac{C}{h^{\max\{0,(n/r)-(n/q)\}} h^{m-l}} \left(\sum_{K \in \mathcal{T}_h} |v|^r_{l,r;K} \right)^{1/r},$$

ako je $p, q < \infty$, s time da

$$\left(\sum_{K \in \mathcal{T}_h} |v|^q_{m,q;K} \right)^{1/q} \quad \text{zamjenjujemo s} \quad \max_{K \in \mathcal{T}_h} |v|_{m,\infty;K} \quad \text{ako je } q = \infty$$

$$\left(\sum_{K \in \mathcal{T}_h} |v|^r_{l,r;K} \right)^{1/r} \quad \text{zamjenjujemo s} \quad \max_{K \in \mathcal{T}_h} |v|_{l,\infty;K} \quad \text{ako je } r = \infty.$$

Dokaz. Za svaku funkciju $v \in X_h$ i svaki element $K \in \mathcal{T}_h$ prema Teoremu 5.2 vrijedi

$$|\hat{v}_K|_{l,r;\hat{K}} \leq C_1 \|B_K\|^l |\det(B_K)|^{-1/r} |v|_{l,r;K}, \tag{5.42}$$

$$|v|_{m,q;K} \leq C_2 \|B_K^{-1}\|^m |\det(B_K)|^{1/q} |\hat{v}_K|_{m,q;\hat{K}}, \tag{5.43}$$

gdje je $\hat{v}_K = v \circ F_K$ i $F_K(\hat{x}) = B_K \hat{x} + b_K$ pripadno afino preslikavanje, a konstante C_1 i C_2 ovise o l, r, m i q.

Uvedimo prostor

$$\hat{N} = \{\hat{p} \in \hat{P} \colon |\hat{p}|_{l,r;\hat{K}} = 0\} = \begin{cases} \{0\} & \text{za } l = 0 \\ \hat{P} \cap \mathbb{P}_{l-1} & \text{za } l \geq 1. \end{cases}$$

Uočimo da je preslikavanje

$$\hat{p} \mapsto |\hat{p}|_{l,r;\hat{K}}$$

jedna norma na kvocijentnom prostoru $\hat{P}/\hat{N}$. S druge strane i

$$\hat{p} \mapsto \inf_{\hat{s} \in \hat{N}} \|\hat{p} + \hat{s}\|_{m,q;\hat{K}}$$

je norma na $\hat{P}/\hat{N}$ i budući da se radi o konačnodimenzionalnom prostoru te su norme ekvivalentne. Konstante ekvivalencije ovise o l, r, m, q i elementu $\hat{K}$; ovisnost o $\hat{K}$ nadalje zanemarujemo budući da je referentni element fiksiran.

Zbog uvjeta $m \geq l$ imamo da je $|\hat{p}|_{m,q;\hat{K}} = 0$ za sve $\hat{p} \in \hat{N}$, pa stoga vrijedi

$$|\hat{p}|_{m,q;\hat{K}} \leq \inf_{\hat{s} \in \hat{N}} \|\hat{p} + \hat{s}\|_{m,q;\hat{K}} \leq \hat{C} |\hat{p}|_{l,r;\hat{K}}, \tag{5.44}$$

gdje je $\hat{C}$ konstanta iz ekvivalencije normi. Sada koristeći (5.43), (5.42), (5.44), (5.18), Lemu 5.1

$$\begin{aligned}
|v|_{m,q;K} &\leq C_2 \|B_K^{-1}\|^m |\det(B_K)|^{1/q} |\hat{v}_K|_{m,q;\hat{K}} \\
&\leq \hat{C} C_2 \|B_K^{-1}\|^m |\det(B_K)|^{1/q} |\hat{v}_K|_{l,r;\hat{K}} \\
&\leq \hat{C} C_1 C_2 \|B_K^{-1}\|^m \|B_K\|^l |\det(B_K)|^{(1/q)-(1/r)} |v|_{l,r;K} \\
&\leq \hat{C} C_1 C_2 \left(\frac{\hat{h}}{\rho_K}\right)^m \left(\frac{h_K}{\hat{\rho}}\right)^l \left(\frac{|K|}{|\hat{K}|}\right)^{(1/q)-(1/r)} |v|_{l,r;K} \\
&= \hat{C} C_1 C_2 \frac{\hat{h}^m}{\hat{\rho}^l} |\hat{K}|^{(1/r)-(1/q)} \frac{h_K^l}{\rho_K^m} |K|^{(1/q)-(1/r)} |v|_{l,r;K}.
\end{aligned}$$

Nadalje, volumen elementa možemo ocijeniti kao $|K| \leq \omega_n h_K^n \leq \omega_n h^n$, gdje je ω_n površina jedinične sfere u $\mathbb{R}^n$, te koristeći regularnost i kvaziuniformnost triangulacije, dobivamo

$$\frac{h_K^l}{\rho_K^m} \leq \sigma^m \frac{h_K^l}{h_K^m} = \sigma^m \frac{1}{h_K^{m-l}} \leq \sigma^m \nu^{m-l} \frac{1}{h^{m-l}},$$

gdje smo uzeli u obzir da je $m - l \geq 0$. Time dobivamo ocjenu

$$|v|_{m,q;K} \leq C \frac{(h^n)^{(1/q)-(1/r)}}{h^{m-l}} |v|_{l,r;K}, \tag{5.45}$$

gdje je

$$C = \hat{C} C_1 C_2 \frac{\hat{h}^m}{\hat{\rho}^l} |\hat{K}|^{(1/r)-(1/q)} \sigma^m \nu^{m-l} \omega_n^{(1/q)-(1/r)}.$$

Da bismo polazeći od (5.45) dobili globalne nejednakosti, promatrat ćemo različite slučajeve u ovisnosti o p i q.
1. Slučaj $q = \infty$. Tada možemo naći element $K_0 \in \mathcal{T}_h$ takav da je

$$\max_{K \in \mathcal{T}_h} |v|_{m,\infty;K} = |v|_{m,\infty;K_0} \leq \frac{h^{-(n/r)}}{h^{m-l}} |v|_{l,r;K_0}.$$

Desnu stranu možemo ocijeniti, u ovisnosti o tome je li $r < \infty$ ili $r = \infty$, izrazima

$$\frac{1}{h^{n/r} h^{m-l}} \left(\sum_{K \in \mathcal{T}_h} |v|_{l,r;K}^r \right)^{1/r} \quad \text{ili} \quad \frac{1}{h^{m-l}} \max_{K \in \mathcal{T}_h} |v|_{l,\infty;K}.$$

2. Slučaj $q < \infty$. Sumiranjem (5.45) po svim elementima dobivamo

$$\left(\sum_{K \in \mathcal{T}_h} |v|_{m,q;K}^q \right)^{1/q} \leq \frac{(h^n)^{(1/q)-(1/r)}}{h^{m-l}} \left(\sum_{K \in \mathcal{T}_h} |v|_{l,r;K}^q \right)^{1/q}. \tag{5.46}$$

2.1 $r \leq q$. U ovom slučaju vrijedi (provjerite)

$$\left(\sum_{K \in \mathcal{T}_h} |v|_{l,r;K}^q \right)^{1/q} \leq \left(\sum_{K \in \mathcal{T}_h} |v|_{l,r;K}^r \right)^{1/r},$$

pa rezultat slijedi.
2.2 $q < r < \infty$. U ovom slučaju primijenjujemo Hölderovu nejednakost:

$$\begin{aligned} \sum_{K \in \mathcal{T}_h} |v|_{l,r;K}^q &\leq \left(\sum_{K \in \mathcal{T}_h} 1^{r/(r-q)} \right)^{1-q/r} \left(\sum_{K \in \mathcal{T}_h} |v|_{l,r;K}^r \right)^{q/r} \\ &= \operatorname{card}(\mathcal{T}_h)^{1-q/r} \left(\sum_{K \in \mathcal{T}_h} |v|_{l,r;K}^r \right)^{q/r} \end{aligned}$$

Broj elemenata u triangulaciji možemo ocijeniti na sljedeći način:

$$\operatorname{card}(\mathcal{T}_h) \leq \frac{1}{\omega_n} \frac{|\Omega|}{(\min_{K \in \mathcal{T}_h} \rho_K)^n} \leq \frac{\sigma^n}{\omega_n} \frac{|\Omega|}{(\min_{K \in \mathcal{T}_h} h_K)^n} \leq \frac{\sigma^n \nu^n}{\omega_n} \frac{|\Omega|}{h^n} = C \frac{1}{h^n}.$$

Time dobivamo ocjenu

$$\left(\sum_{K\in\mathcal{T}_h} |v|^q_{l,r;K}\right)^{1/q} \leq C\left(\frac{1}{h^n}\right)^{(1/q)-(1/r)}\left(\sum_{K\in\mathcal{T}_h} |v|^r_{l,r;K}\right)^{1/r},$$

što, primijenjeno na (5.46), konačno daje

$$\left(\sum_{K\in\mathcal{T}_h} |v|^q_{m,q;K}\right)^{1/q} \leq \frac{1}{h^{m-l}}\left(\sum_{K\in\mathcal{T}_h} |v|^r_{l,r;K}\right)^{1/r}.$$

2.3 $\underline{q < r = \infty}$ Imamo

$$\begin{aligned}\left(\sum_{K\in\mathcal{T}_h} |v|^q_{l,\infty;K}\right)^{1/q} &\leq \left(\sum_{K\in\mathcal{T}_h} 1\right)^{1/q} \max_{K\in\mathcal{T}_h} |v|_{l,\infty;K} = \mathrm{card}(\mathcal{T}_h)^{1/q} \max_{K\in\mathcal{T}_h} |v|_{l,\infty;K}\\ &\leq C\left(\frac{1}{h^n}\right)^{(1/q)} \max_{K\in\mathcal{T}_h} |v|_{l,\infty;K}.\end{aligned}$$

Zajedno s (5.46) to daje

$$\left(\sum_{K\in\mathcal{T}_h} |v|^q_{m,q;K}\right)^{1/q} \leq \frac{1}{h^{m-l}} \max_{K\in\mathcal{T}_h} |v|_{l,\infty;K}.$$

Time je nejednakost izvedena u svim slučajevima. □

Radi ilustracije specijalizirajmo Teorem 5.11 na dva slučaja koji se često koriste. Pretpostavimo da je $V_h \subset C(\overline{\Omega}) \cap H^1(\Omega)$ i da su ispunjene pretpostavke Teorema 5.11. Tada imamo (za $m = l = 0$ i $q = \infty$, $r = 2$)

$$\forall v \in V_h, \quad |v|_{\infty;\Omega} \leq \frac{C}{h^{n/2}}\|v\|_{2;\Omega},$$

te (za $m = 1, l = 0$ i $q = r = 2$)

$$\forall v \in V_h, \quad |v|_{1,2;\Omega} \leq \frac{C}{h}\|v\|_{2;\Omega}.$$

6

Numerička integracija

Integrale koji se pojavljuju u varijacijskoj formulaciji rubne zadaće općenito moramo računati približno, pomoću formula numeričke integracije. Pri tome se uvodi dodatna greška u numerički postupak koju je potrebno procijeniti. Cilj je koristiti dovoljno točne formule kako asimptotski red točnosti metode ne bi bio umanjen.

6.1 Primjena formula numeričke integracije

Da bismo prodiskutirali kako u teoriju uključiti efekte numeričke integracije specificirat ćemo u potpunosti promatranu varijacijsku zadaću.

Neka je $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ograničena poligonalna domena. Promatramo homogenu Dirichletovu zadaću za diferencijalnu jednadžbu

$$-\text{div}(\mathbf{A}\nabla u) = f \quad \text{u } \Omega, \tag{6.1}$$

pri čemu je $\mathbf{A}(x) = (a_{ij}(x))_{i,j=1}^n$, uniformno pozitivno definitna matrica, definirana na $\overline{\Omega}$. Preciznije, pretpostavljamo da su funkcije $f \in L^2(\Omega)$ i $a_{ij} \in L^\infty(\Omega)$, definirane na čitavom $\overline{\Omega}$, te da postoji konstanta $\beta > 0$ takva da je

$$\forall x \in \overline{\Omega},\ \forall \xi \in \mathbb{R}^n, \quad \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq \beta \sum_{i=1}^n \xi_i^2. \tag{6.2}$$

Prostor u kojem tražimo rješenje je $V = H_0^1(\Omega)$, a bilinearna forma i funkcional desne strane dani su formulama

$$a(u, v) = \int_\Omega \sum_{i,j=1}^n a_{ij}\partial_i u \partial_j v \, dx, \tag{6.3}$$

$$\langle F, v\rangle = \int_\Omega f v \, dx. \tag{6.4}$$

Na domeni Ω zadana je (familija) triangulacija $\mathcal{T}_h$ koja se sastoji od konačnih elemenata (K, P_K, Σ_K). Kao i u prethodnom poglavlju pretpostavljamo da su zadovoljeni uvjeti (H1), (H2), (H3) i (H4). Referentni element označavamo uobičajeno s $(\hat{K}, \hat{P}, \hat{\Sigma})$ i uzmimamo da je minimalno $\hat{P} \subset H^1(\hat{K})$.

Pripadni prostor konačnih elemenata V_h je potprostor od $H_0^1(\Omega)$. Označimo elemente baze prostora V_h sa w_k, $k = 1, 2, \ldots, M$. Tada je potrebno naći koeficijente u_k, $k = 1, 2, \ldots, M$, koji zadovoljavaju

$$\sum_{k=1}^{M} a(w_k, w_m) u_k = \langle F, w_m \rangle, \quad m = 1, 2, \ldots, M, \tag{6.5}$$

gdje je

$$a(w_k, w_m) = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \partial_i w_k \partial_j w_m \, dx \tag{6.6}$$

$$\langle F, w_m \rangle = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K f w_m \, dx. \tag{6.7}$$

U praksi se integrali u ovim izrazima rijetko izračunavaju egzaktno već se primijenjuju formule numeričke integracije.

Kod afine familije elemenata dovoljno je integracijsku formulu zadati na referentnom elementu. Ako je, naime,

$$F_K(\hat{x}) = B_K \hat{x} + b_K, \quad F_K(\hat{K}) = K,$$

invertibilno afino preslikavanje kojim je definiran element K, onda je

$$\int_K \phi(x) \, dx = |\det(B_K)| \int_{\hat{K}} \hat{\phi}(\hat{x}) \, d\hat{x}, \tag{6.8}$$

gdje je $\hat{\phi} = \phi \circ F_K$.

Formule numeričke integracije općenito imaju oblik

$$\int_{\hat{K}} \hat{\phi}(\hat{x}) \, d\hat{x} \approx \sum_{l=1}^{L} \hat{\omega}_l \hat{\phi}(\hat{b}_l), \tag{6.9}$$

gdje su $\hat{\omega}_l$ integracijske težine, a $\hat{b}_l$ integracijske točke. Mi ćemo promatrati samo one integracijske formule u kojima je $\hat{\omega}_l > 0$, a integracijske točke $\hat{b}_l$ pripadaju skupu $\hat{K}$.

Integracijska formula na referentnom elementu $\hat{K}$ generira integracijsku formulu na elementu K pravilom

$$\int_K \phi(x) \, dx \approx \sum_{l=1}^{L} \omega_{l,K} \phi(b_{l,K}), \tag{6.10}$$

gdje je

$$\omega_{l,K} = |\det(B_K)|\hat{\omega}_l, \quad b_{l,K} = F_K(\hat{b}_l).$$

Uvedimo funkcionale greške integracijskih formula

$$\hat{E}(\hat{\phi}) = \int_{\hat{K}} \hat{\phi}(\hat{x})\, d\hat{x} - \sum_{l=1}^{L} \hat{\omega}_l \hat{\phi}(\hat{b}_l), \tag{6.11}$$

$$E_K(\phi) = \int_{K} \phi(x)\, dx - \sum_{l=1}^{L} \omega_{l,K} \phi(b_{l,K}). \tag{6.12}$$

Evidentno je

$$E_K(\phi) = |\det(B_K)|\hat{E}(\hat{\phi}). \tag{6.13}$$

Točnost integracijskih formula može se mjeriti skupom polinoma na kojima je formula egzaktna. Tako kažemo da je formula (6.10) egzaktna na $\mathbb{P}_k$ ako je $\hat{E}(\hat{\phi}) = 0$ za svako $\hat{\phi} \in \mathbb{P}_k$.

Pogledajmo neke primjere integracijskih formula na simpleksima. Neka je $\hat{K}$ simpleks s vrhovima $\hat{a}_i$, $i = 1, 2, \ldots, n+1$. Tada je

$$\hat{a} = \frac{1}{n+1} \sum_{i=1}^{n+1} \hat{a}_i$$

baricentar simpleksa. Formula

$$\int_{\hat{K}} \hat{\phi}(\hat{x})\, d\hat{x} \approx |\hat{K}|\hat{\phi}(\hat{a}), \tag{6.14}$$

je točna na polinomima stupnja manjeg ili jednakog 1 ($\mathbb{P}_1$). To se lako vidi iz činjenice da za baricientričke koordinate vrijedi

$$\int_{\hat{K}} \hat{\lambda}_i(\hat{x})\, d\hat{x} = \frac{|\hat{K}|}{n+1}.$$

Neka je $n = 2$. Označimo s $\hat{a}_{ij}$ za $1 \leq i < j \leq 3$ polovišta stranica, a s $\hat{a}_{123}$ baricentar. Tada je formula

$$\int_{\hat{K}} \hat{\phi}(\hat{x})\, d\hat{x} \approx \frac{|\hat{K}|}{3} \sum_{1 \leq i < j \leq 3} \hat{\phi}(\hat{a}_{ij}), \tag{6.15}$$

točna na polinomima drugog stupnja, dok je formula

$$\int_{\hat{K}} \hat{\phi}(\hat{x})\, d\hat{x} \approx \frac{|\hat{K}|}{60} \left(3 \sum_{i=1}^{3} \hat{\phi}(\hat{a}_i) + 8 \sum_{1 \leq i < j \leq 3} \hat{\phi}(\hat{a}_{ij}) + 27\hat{\phi}(\hat{a}_{123}) \right), \tag{6.16}$$

točna na $\mathbb{P}_3$.

Uočimo da diskretan problem koji treba riješiti sada dobiva oblik

$$\sum_{k=1}^{M} a_h(w_k, w_m)u_k = f_h(w_m), \quad m = 1, 2, \ldots, M, \tag{6.17}$$

gdje je

$$a_h(w_k, w_m) = \sum_{K\in\mathcal{T}_h} \sum_{l=1}^{L} \omega_{l,K} \sum_{i,j=1}^{n} (a_{ij}\partial_i w_k \partial_j w_m)(b_{l,K}) \tag{6.18}$$

$$f_h(w_m) = \sum_{K\in\mathcal{T}_h} \sum_{l=1}^{L} \omega_{l,K}(f w_m)(b_{l,K}). \tag{6.19}$$

Stoga ga možemo formulirati na sljedeći način: Treba naći $u_h \in V_h$ koje zadovoljava

$$\forall v \in V_h, \quad a_h(u_h, v) = f_h(v), \tag{6.20}$$

gdje su bilinearna forma i funkcional desne strane dani formulama:

$$a_h(u, v) = \sum_{K\in\mathcal{T}_h} \sum_{l=1}^{L} \omega_{l,K} \sum_{i,j=1}^{n} (a_{ij}\partial_i u \partial_j v)(b_{l,K}) \tag{6.21}$$

$$f_h(v) = \sum_{K\in\mathcal{T}_h} \sum_{l=1}^{L} \omega_{l,K}(f v)(b_{l,K}). \tag{6.22}$$

Da bi ove formule imale smisla nužno je da su koeficijenti jednadžbe i desna strana dobro definirani u integracijskim točkama. To će biti ispunjeno u slučaju neprekidnih funkcija. Uočimo još da su kod Lagrangeovih elemenata derivacije diskontinuirane na granici elemenata, tako da će one poprimati različite vrijednosti u različitim elementima, u integracijskim točkama koje se nalaze na granici susjednih elemenata.

Promjena bilinearne forme generira dva problema: Prvo, potrebna nam je generalizacije Céa-ine leme, i drugo, otvoren je problem eliptičnosti diskretne bilinearne forme.

Uvest ćemo ovu definiciju: za bilinearnu formu $a_h\colon V_h \times V_h \to \mathbb{R}$ kažemo da je **uniformno V_h-eliptična** ako postoji konstanta $\tilde{\alpha}$, neovisna o potprostor V_h, takva da je

$$\forall v \in V_h, \quad \tilde{\alpha}\|v\|^2 \le a_h(v, v). \tag{6.23}$$

6.2 Prva Strangova lema

Sljedeći teorem generalizira Céa-inu lemu. Nova apstraktna ocjena greške sastoji se od sume greške interpolacije i grešaka aproksimacije biinearne forme i funkcionala desne strane. Te dodatne greške dane su s posljednja dva člana u (6.24).

Teorem 6.1 (prva Strangova lema) Promatramo familiju diskretnih problema čija je pridružena bilinearna forma uniformno V_h-eliptična. Tada postoji konstanta C, neovisna o potprostor V_h, takva da je

$$\begin{aligned}\|u - u_h\| \leq C \Bigg(\inf_{v \in V_h} \Bigg\{ \|u - v\| + \sup_{w \in V_h} \frac{|a(v,w) - a_h(v,w)|}{\|w\|} \Bigg\} \\ + \sup_{w \in V_h} \frac{|\langle F, w\rangle - f_h(w)|}{\|w\|} \Bigg).\end{aligned} \tag{6.24}$$

Dokaz. Neka je $v \in V_h$ proizvoljan element. Uniformna V_h-eliptičnost daje

$$\begin{aligned}\tilde{\alpha}\|u_h - v\|^2 &\leq a_h(u_h - v, u_h - v) \\ &= a(u - v, u_h - v) + \{a(v, u_h - v) - a_h(v, u_h - v)\} \\ &+ f_h(u_h - v) - \langle F, u_h - v\rangle.\end{aligned}$$

Koristeći neprekidnost bilinearne forme $a(\cdot,\cdot)$, dobivamo

$$\begin{aligned}\tilde{\alpha}\|u_h - v\| &\leq M\|u - v\| + \frac{|a(v, u_h - v) - a_h(v, u_h - v)|}{\|u_h - v\|} \\ &+ \frac{|f_h(u_h - v) - \langle F, u_h - v\rangle|}{\|u_h - v\|} \\ &\leq M\|u - v\| + \sup_{w \in V_h} \frac{|a(v,w) - a_h(v,w)|}{\|w\|} \\ &+ \sup_{w \in V_h} \frac{|f_h(w) - \langle F, w\rangle|}{\|w\|}.\end{aligned}$$

Uzimajući da je

$$\|u - u_h\| \leq \|u - v\| + \|u_h - v\|,$$

te zbog proizvoljnosti $v \in V_h$, izlazi tvrdnja. $\Box$

Uočimo da se u slučaju $a(\cdot,\cdot) = a_h(\cdot,\cdot)$, i $f_h(\cdot) = \langle F, \cdot\rangle$, Strangova lema svodi na Céa-inu lemu.

6.3 Dovoljan uvjet uniformne V_h-eliptičnosti

Da bismo dokazali uniformnu V_h-eliptičnost bilinearne forme iskoristiti ćemo regularnost familije triangulacija.

Teorem 6.2 Neka je zadana formula numeričke integracije

$$\int_{\hat{K}} \hat{\phi}(\hat{x})\, d\hat{x} \approx \sum_{l=1}^{L} \hat{\omega}_l \hat{\phi}(\hat{b}_l),$$

na referentnom elementu $(\hat{K}, \hat{P}, \hat{\Sigma})$, za koju postoji cijeli broj $k' \geq 1$, takav da je

- $\hat{P} \subset \mathbb{P}_{k'}$;
- Unija točaka $\cup_{l=1}^{L}\{\hat{b}_l\}$ sadrži $\mathbb{P}_{k'-1}$ unisolventan skup, ili, integracijska formula je točna na $\mathbb{P}_{2k'-2}$.

Tada postoji konstanta $\tilde{\alpha}$, neovisna o potprostor V_h, takva da je

$$\forall v \in V_h, \quad \tilde{\alpha}|v|_{1,2;\Omega}^2 \leq a_h(v,v).$$

Dokaz. (i) Pretpostavit ćemo najprije da skup $\cup_{l=1}^{L}\{\hat{b}_l\}$ sadrži $\mathbb{P}_{k'-1}$ unisolventan skup. Koristeći pozitivnost integracijskih težina dobivamo da za svako $\hat{p} \in \hat{P}$ vrijedi

$$\sum_{l=1}^{L} \hat{\omega}_l \sum_{i=1}^{n} (\partial_i \hat{p}(\hat{b}_l))^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \partial_i \hat{p}(\hat{b}_l) = 0, \;\; 1 \leq i \leq n, \;\; 1 \leq l \leq L.$$

Uočimo da je $\partial_i \hat{p} \in \mathbb{P}_{k'-1}$, pa zbog svojstva unisolventnosti zaključujemo da sve prve parcijalne derivacije iščezavaju na $\hat{K}$. Stoga je

$$\hat{p} \mapsto \left(\sum_{l=1}^{L} \hat{\omega}_l \sum_{i=1}^{n} (\partial_i \hat{p}(\hat{b}_l))^2 \right)^{1/2}$$

norma na kvocijentnom prostoru $\hat{P}/\mathbb{P}_0$. S druge strane i preslikavanje $\hat{p} \mapsto |\hat{p}|_{1,2;\hat{K}}$ je norma na istom prostoru, pa zbog ekvivalencije normi na konačnodimenzionalnom prostoru zaključujemo da postoji konstanta $\hat{C}$, takva da je

$$\forall \hat{p} \in \hat{P}, \quad \hat{C}|\hat{p}|_{1,2;\hat{K}}^2 \leq \sum_{l=1}^{L} \hat{\omega}_l \sum_{i=1}^{n} (\partial_i \hat{p}(\hat{b}_l))^2.$$

Ako je ispunjen uvjet da je integracijska formula točna na $\mathbb{P}_{2k'-2}$, onda dobvena nejednakost prelazi u jednakost s $\hat{C} = 1$, jer je $(\partial_i \hat{p})^2 \in \mathbb{P}_{2k'-2}$.

(ii) Za proizvoljan element triangulacije K ocijenit ćemo aproksimaciju izraza

$$\int_K \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \partial_i v \partial_j v \, dx.$$

Označimo $v|_K = p_K$; zbog pozitivne definitnosti matrice koeficijenata imamo

$$\begin{aligned} \sum_{l=1}^{L} \omega_{l,K} \sum_{i,j=1}^{n} (a_{ij} \partial_i v \partial_j v)(b_{l,K}) &= \sum_{l=1}^{L} \omega_{l,K} \sum_{i,j=1}^{n} (a_{ij} \partial_i p_K \partial_j p_K)(b_{l,K}) \\ &\geq \beta \sum_{l=1}^{L} \omega_{l,K} \sum_{i=1}^{n} (\partial_i p_K(b_{l,K}))^2. \end{aligned}$$

Neka je $F(\hat{x}) = B_K\hat{x}+b_K$ afino preslikavanje koje preslikava $\hat{K}$ na K. Definiramo $\hat{p}_K = p_K \circ F_K$, i kako je triangulacija afina imamo $\hat{p}_K \in \hat{P}$. Nadalje, iz

$$D\hat{p}_K(\hat{b}_l) \cdot \xi = Dp_K(b_{l,K}) \cdot B_K\xi,$$

izlazi $\|D\hat{p}_K(\hat{b}_l)\| \leq \|Dp_K(b_{l,K})\|\|B_K\|$. Koristeći $\omega_{l,K} = |\det(B_K)|\hat{\omega}_l$ i tvrdnju (i) dobivamo

$$\begin{aligned}
\sum_{l=1}^{L} \omega_{l,K} \sum_{i=1}^{n} (\partial_i p_K(b_{l,K}))^2 &\geq \|B_K\|^{-2} \sum_{l=1}^{L} \omega_{l,K} \sum_{i=1}^{n} (\partial_i \hat{p}_K(\hat{b}_l))^2 \\
&= |\det(B_K)|\|B_K\|^{-2} \sum_{l=1}^{L} \hat{\omega}_l \sum_{i=1}^{n} (\partial_i \hat{p}_K(\hat{b}_l))^2 \\
&\geq \hat{C}|\det(B_K)|\|B_K\|^{-2}|\hat{p}_K|^2_{1,2;\hat{K}}
\end{aligned}$$

Sada primjenom Teorema 5.2 dobivamo

$$|p_K|_{1,2;K} \leq C\|B_K^{-1}\||\det(B_K)|^{1/2}|\hat{p}_K|_{1,2;\hat{K}}$$

pa stoga izlazi

$$\sum_{l=1}^{L} \omega_{l,K} \sum_{i=1}^{n} (\partial_i p_K(b_{l,K}))^2 \geq \hat{C}(\|B_K^{-1}\|\|B_K\|)^{-2}|p_K|^2_{1,2;K}.$$

Prema Lemi 5.1 imamo

$$\|B_K^{-1}\|\|B_K\| \leq \frac{\hat{h}}{\rho}\frac{h}{\hat{\rho}} \leq C,$$

gdje je C neovisno o $K \in \mathcal{T}_h$. Time smo dobili

$$\forall v \in V_h, \quad \sum_{l=1}^{L} \omega_{l,K} \sum_{i,j=1}^{n} (a_{ij}\partial_i v \partial_j v)(b_{l,K}) \geq \tilde{\alpha}|v|^2_{1,2;K}.$$

(iii) Sumiranjem dobivamo

$$\begin{aligned}
\forall v \in V_h, \quad a_h(v,v) &= \sum_{K\in\mathcal{T}_h} \sum_{l=1}^{L} \omega_{l,K} \sum_{i,j=1}^{n} (a_{ij}\partial_i v \partial_j v)(b_{l,K}) \\
&\geq \tilde{\alpha} \sum_{K\in\mathcal{T}_h} |v|^2_{1,2;K} = \tilde{\alpha}|v|^2_{1,2;\Omega}. \ \Box
\end{aligned}$$

Primjeri. Ako je referentni element n-simpleks tipa (1), onda je dovoljno koristiti integracijsku formulu (6.14). Naime, $\{\hat{a}\}$ je $\mathbb{P}_0$ unisolventan skup. I drugi uvjet je zadovoljen jer je $k' = 1$, pa je $2k' - 2 = 0$, a formula je egzaktna na $\mathbb{P}_1$.

Ako je referentni element trokut tipa (2) ($n = 2$), onda je dovoljno upotrijebiti formulu (6.15). Naime, $k' = 2$, a skup polovišta stranica je $\mathbb{P}_1$ unisolventan skup. Isto tako vrijedi da je formula (6.15) egzaktna na $\mathbb{P}_{2k'-2} = \mathbb{P}_2$.

Ako je referentni element trokut tipa (3) ($n = 2$), onda je dovoljno upotrijebiti formulu (6.16). Tada je $k' = 3$, a skup $(\cup_i \hat{a}_i) \cup (\cup_{i<j} \hat{a}_{ij})$ je $\mathbb{P}_2$ unisolventan. S druge strane, u ovom slučaju drugi uvjet nije zadovoljen jer formula nije egzaktna na $\mathbb{P}_{2k'-2} = \mathbb{P}_4$.

6.4 Konzistentnost. Bramble-Hilbertova lema

Nadalje ćemo promatrati samo specijalan slučaj u kome je

$$\hat{P} = \mathbb{P}_k$$

za neki $k \geq 1$. Pretpostavimo li da rješenje varijacijske zadaće leži u prostoru $H^{k+1}(\Omega)$ i da je V_h-interpolacijski operator dobro definiran, onda imamo

$$\inf_{v \in V_h} \|u - v\|_{1,2;\Omega} \leq \|u - \Pi_h u\|_{1,2;\Omega} \leq Ch^k |u|_{k+1,2;\Omega}.$$

Dakle, uz egzaktnu integraciju metoda ima red konvergencije $O(h^k)$. Zanimaju nas uvjeti uz koje numerička integracija neće smanjiti red konvergencije metode.

Uz pretpostavku da je diskretna bilinearna forma uniformno V_h-eliptička, prema prvoj Strangovoj lemi trebmo dokazati sljedeće ocjene:

$$\sup_{w \in V_h} \frac{|a(\Pi_h u, w) - a_h(\Pi_h u, w)|}{\|w\|_{1,2;\Omega}} \leq C(a_{ij}, u) h^k, \tag{6.25}$$

$$\sup_{w \in V_h} \frac{|\langle F, w \rangle - f_h(w)|}{\|w\|_{1,2;\Omega}} \leq C(f) h^k. \tag{6.26}$$

Ove ocjene predstavljaju konzistentnost metode, dok uniformna eliptičnost daje njenu stabilnost.

Budući da vrijedi

$$a(\Pi_h u, w) - a_h(\Pi_h u, w) = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} E_K \left(\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \partial_i (\Pi_h u) \partial_j w \right) \tag{6.27}$$

$$\langle F, w \rangle - f_h(w) = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} E_K(fw), \tag{6.28}$$

dovoljno je dokazati sljedeće *lokalne* ocjene:

$$\forall p', p \in \mathbb{P}_k, \quad |E_K \left(\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \partial_i p' \partial_j p \right) | \leq C(a_{ij}|_K, \partial_i p') h_K^k \|\partial_j p\|_{2;K} \tag{6.29}$$

$$\forall p \in \mathbb{P}_k, \quad |E_K(fp)| \leq C(f|_K) h_K^k \|p\|_{1,2;K}, \tag{6.30}$$

Cilj je sada sljedeći. Treba dobiti cjene (6.29) i (6.30), s konstantama na desnoj strani u odgovarajućem obliku, tako da sumiranjem možemo dobiti tražene ocjene (6.25) i (6.26).

Prvo dokazujemo pomoćni rezultat.

Teorem 6.3 (Bramble-Hilbertova lema) Neka je Ω ograničena Lipschitzova domena u $\mathbb{R}^n$. Za dani cijeli broj $k \geq 0$ i $p \in [1, \infty]$, neka je F linearan i neprekidan funkcional na $W^{k+1,p}(\Omega)$, sa svojstvom

$$\forall p \in \mathbb{P}_k, \quad \langle F, p \rangle = 0. \tag{6.31}$$

Tada postoji konstanta $C = C(\Omega)$, takva da je

$$\forall v \in W^{k+1,p}(\Omega), \quad |\langle F, v \rangle| \leq C \|F\|^*_{k+1,p;\Omega} |v|_{k+1,p;\Omega}, \tag{6.32}$$

gdje je $\|\cdot\|^*_{k+1,p;\Omega}$ norma u dualu prostora $W^{k+1,p}(\Omega)$.

Dokaz. Neka je $v \in W^{k+1,p}(\Omega)$ proizvoljna funkcija. Tada za bilo koje $p \in \mathbb{P}_k$ vrijedi $\langle F, v + p \rangle = \langle F, v \rangle$, pa imamo

$$\forall p \in \mathbb{P}_k, \quad |\langle F, v \rangle| = |\langle F, v + p \rangle| \leq \|F\|^*_{k+1,p;\Omega} \|v + p\|_{k+1,p;\Omega},$$

i stoga

$$|\langle F, v \rangle| \leq \|F\|^*_{k+1,p;\Omega} \inf_{p \in \mathbb{P}_k} \|v + p\|_{k+1,p;\Omega}.$$

Tvrdnja sada slijedi primjenom Teorema 5.1. □

Sljedeća dva teorema daju nam tražene lokalne ocjene. Njihovi se dokazi baziraju na uporabi Bramble-Hilbertove leme, i kako su dosta tehnički složeni, nećemo ih ovdje iznositi. Detalji se mogu naći u Ciarletovoj knjizi [6].

Teorem 6.4 Neka postoji $k \geq 1$, takav da je

$$\hat{P} = \mathbb{P}_k, \tag{6.33}$$

$$\forall \hat{\phi} \in \mathbb{P}_{2k-2}, \quad \hat{E}(\hat{\phi}) = 0. \tag{6.34}$$

Tada postoji konstanta C, neovisna o $K \in \mathcal{T}_h$ i h, takva da vrijedi

$$\forall a \in W^{k,\infty}(K), \forall p, p' \in \mathbb{P}_k$$

$$|E_K(a\partial_i p' \partial_j p)| \leq C h_K^k \|a\|_{k,\infty;K} \|\partial_i p'\|_{k-1,2;K} |\partial_j p|_{0,2;K} \tag{6.35}$$

$$\leq C h_K^k \|a\|_{k,\infty;K} \|p'\|_{k,2;K} |p|_{1,2;K} \tag{6.36}$$

Dokaz. [6], str. 193.

Teorem 6.5 Neka postoji $k \geq 1$, takav da je

$$\hat{P} = \mathbb{P}_k, \tag{6.37}$$

$$\forall \hat{\phi} \in \mathbb{P}_{2k-2}, \quad \hat{E}(\hat{\phi}) = 0, \tag{6.38}$$

i neka je $q \in [1, \infty]$ broj koji zadovoljava nejednakost

$$k - \frac{n}{q} > 0. \tag{6.39}$$

Tada postoji konstanta C, neovisna o $K \in \mathcal{T}_h$ i h, takva da vrijedi

$$\begin{aligned} &\forall f \in W^{k,q}(K), \forall p \in \mathbb{P}_k \\ &\qquad |E_K(fp)| \leq Ch_K^k |K|^{(1/2)-(1/q)} \|f\|_{k,q;K} \|p\|_{1,2;K} \end{aligned} \tag{6.40}$$

Dokaz. [6], str. 195.

Naš osnovni rezultat je sljedeći teorem:

Teorem 6.6 Neka su ispunjeni uvjeti (H1)–(H4) te neka postoji cijeli broj $k \geq 1$, takav da je

$$\hat{P} = \mathbb{P}_k, \tag{6.41}$$

$$H^{k+1}(\hat{K}) \subset C^s(\hat{K}), \tag{6.42}$$

gdje je s najviši stupanj parcijalne derivacije koja se javlja u stupnjevima slobode $\hat{\Sigma}$. Neka je k tome

$$\forall \hat{\phi} \in \mathbb{P}_{2k-2}, \quad \hat{E}(\hat{\phi}) = 0. \tag{6.43}$$

Tada ako rješenje $u \in H_0^1(\Omega)$ varijacijske zadaće koja odgovara podacima (6.3), (6.4) pripada prostoru $H^{k+1}(\Omega)$, ako je $a_{i,j} \in W^{k,\infty}(\Omega)$ za $1 \leq i, j \leq n$, i ako je $f \in W^{k,q}(\Omega)$ za neki $q \geq 2$, $k > n/q$, onda postoji konstanta C, neovisna o h, takva da vrijedi

$$\|u - u_h\|_{1,2;\Omega} \leq Ch^k (|u|_{k+1,2;\Omega} + \sum_{i,j=1}^{n} \|a_{i,j}\|_{k,\infty;\Omega} \|u\|_{k+1,2;\Omega} + \|f\|_{k,q;\Omega}), \tag{6.44}$$

gdje je $u_h \in V_h$ rješenje diskretnog problema.

Dokaz. U uvjetima teorema možemo primijeniti Teorem 5.6 koji daje egzistenciju konstante C, neovisne o h, takve da je

$$\|u - \Pi_h u\|_{1,2;\Omega} \leq Ch^k |u|_{k+1,2;\Omega}.$$

Polazeći od (6.27) i koristeći Teorem 6.4, dobivamo

$$
\begin{aligned}
|a(\Pi_h u, w) - a_h(\Pi_h u, w)| &\leq \sum_{K\in\mathcal{T}_h} |E_K\left(\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\partial_i(\Pi_h u\big|_K)\partial_j w|_K\right)| \\
&\leq C \sum_{K\in\mathcal{T}_h} h_K^k \sum_{i,j=1}^{n} \|a_{i,j}\|_{k,\infty;K}\|\Pi_h u\|_{k,2;K}|w|_{1,2;K} \\
&\leq Ch^k \left(\sum_{i,j=1}^{n} \|a_{i,j}\|_{k,\infty;\Omega}\right)\left(\sum_{K\in\mathcal{T}_h} \|\Pi_h u\|_{k,2;K}^2\right)^{1/2} |w|_{1,2;\Omega}
\end{aligned}
$$

S druge strane, koristeći ponovo Teorem 5.6 dobivamo

$$
\begin{aligned}
\left(\sum_{K\in\mathcal{T}_h} \|\Pi_h u\|_{k,2;K}^2\right)^{1/2} &\leq \|u\|_{k,2;\Omega} + \left(\sum_{K\in\mathcal{T}_h} \|u - \Pi_h u\|_{k,2;K}^2\right)^{1/2} \\
&\leq \|u\|_{k,2;\Omega} + Ch|u|_{k+1,2;\Omega} \leq C\|u\|_{k+1,2;\Omega},
\end{aligned}
$$

i stoga

$$
\begin{aligned}
&\inf_{v\in V_h} \{\|u-v\|_{1,2;\Omega} + \sup_{w\in V_h} \frac{|a(v,w) - a_h(v,w)|}{\|w\|_{1,2;\Omega}}\} \\
&\qquad \leq \|u - \Pi_h u\|_{1,2;\Omega} + \sup_{w\in V_h} \frac{|a(\Pi_h u, w) - a_h(\Pi_h u, w)|}{\|w\|_{1,2;\Omega}} \\
&\qquad \leq Ch^k \left(|u|_{k+1,2;\Omega} + \sum_{i,j=1}^{n} \|a_{i,j}\|_{k,\infty;\Omega}\|u\|_{k+1,2;\Omega}\right).
\end{aligned}
$$

Slično, polazeći od (6.28) i koristeći Teorem 6.5, dobivamo

$$
\begin{aligned}
|\langle F, w\rangle - f_h(w)| &\leq \sum_{K\in\mathcal{T}_h} |E_K(fw)| \\
&\leq C \sum_{K\in\mathcal{T}_h} h_K^k |K|^{(1/2)-(1/q)} \|f\|_{k,q;K}\|w\|_{1,2;K} \\
&\leq Ch^k |\Omega|^{(1/2)-(1/q)} \|f\|_{k,q;\Omega}\|w\|_{1,2;\Omega},
\end{aligned}
$$

gdje smo iskoristili nejednakost

$$
\sum_K |a_K b_k c_K| \leq \left(\sum_K |a_K|^\alpha\right)^{1/\alpha} \left(\sum_K |b_K|^\beta\right)^{1/\beta} \left(\sum_K |c_K|^\gamma\right)^{1/\gamma}
$$

koja vrijedi za sve $\alpha \geq 1$, $\beta \geq 1$ i $\gamma \geq 1$ koji zadovoljavaju

$$
\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} = 1.
$$

U našem smo slučaju uzeli $\beta = q$, $\gamma = 2$ i $1/\alpha = 1/2 - 1/q$; To je razlog zbog kojeg trebamo $q \geq 2$. Time smo dobili

$$\sup_{w \in V_h} \frac{|\langle F, w\rangle - f_h(w)|}{\|w\|_{1,2;\Omega}} \leq Ch^k |\Omega|^{(1/2)-(1/q)} \|f\|_{k,q;\Omega}.$$

Tvrdnja teorema sada slijedi iz prve Strangove leme, budući da je naša bilinearna forma uniformno V_h-eliptička. □

Uvjet da formula numeričke integracije mora biti točna na $\mathbb{P}_{2k-2}$ može se interpretirati na sljedeći način: Ako su koeficijenti $a_{i,j}$ konstantni onda integrali

$$\int_K a_{i,j} \partial_i u \partial_i v \, dx$$

moraju biti izračunati egzaktno.

Ako tvrdnju torema specijaliziramo na n-simplekse, onda imamo sljedeće rezultate:

Za n-simplekse tipa (1) dobivamo $\|u - u_h\|_{1,2;\Omega} = O(h)$ ako je formula numeričke integracije točna na konstantama.

Za n-simplekse tipa (2) dobivamo $\|u - u_h\|_{1,2;\Omega} = O(h^2)$ ako je formula numeričke integracije točna na polinomima stupnja $n \leq 2$.

Za n-simplekse tipa (3) dobivamo $\|u - u_h\|_{1,2;\Omega} = O(h^3)$ ako je formula numeričke integracije točna na polinomima stupnja $n \leq 4$, itd.

7

O implementaciji

U ovom se poglavnju bavimo elementima implementacije metode konačnih elemeata na računalu. Promatrat ćemo skalarnu eliptičku jednadžbu u poliedarskoj domeni.

7.1 Triangulacija

Metoda konačnih elemenata najčešće se veže uz nestrukturirane mreže. U tim se slučajevima triangulacija domene generira nekim komercijalnim ili nekomecijalnim alatom namijenjnim za tu svrhu. Ako je domena dovoljno jednostavna, s lakoćom se može formirati program koji konstrira strukturiranu mrežu na domni.

Promatrat ćemo triangulaciju poliedarske domene u $\mathbb{R}^d$, $d = 1, 2$ ili 3, koja se sastoji od d-simpleksa ili d-pravokutnika. Svaki se takav element može dobiti afinim preslikavanjem jednog referentnog elementa. Elemente sa zakrivljenim stranicam za sada nećemo promatrati.

Triangulacija može biti zadana većom ili manjom količinom podataka. Osnovni parametri su broj vrhova `nv` i broj elemenata `ne` i broj vrhova po elementu `lnv`:

$$
\begin{aligned}
\texttt{ne} &= \text{broje elemenata;} \\
\texttt{nv} &= \text{broj vrhova;} \\
\texttt{lnv} &= \text{broj vrhova po elementu.}
\end{aligned}
$$

Koordinate vrhova su zadane u jednom polju

$$\texttt{coord}(\texttt{1} : \texttt{d}, \texttt{1} : \texttt{nv}).$$

Indeksi vrhova u tom polju su globalni indeksi vrhova. U svakom elementu vrhovi imaju svoje lokalne indekse. Vezu između globalnih i lokalnih indeksa daje tzv. matrica povezanosti

$$\texttt{conn}(\texttt{1} : \texttt{lnv}, \texttt{1} : \texttt{ne});$$

Pri tome je `ig=conn(il,elm)` globalni indeks vrha koji u elementu `elm` ima lokalni indeks `il`.

Nadalje je potrebno idenificirati one vrhove mreže koji se nalaze na granici domene. Pri tome uzimamo da svaka stranica referentnog elementa $\hat{K}$ ima jednak broj vrhova (što je slučaj u svim našim dosadašnjim primjerima osim prizmatičnih elemenata) i označimo taj broj s `fnv`. [1] Polje koje povezuje lokalne i globalne indekse vrhova na granici domene je oblika

$$\mathtt{fconn}(\mathtt{1}:\mathtt{fnv},\mathtt{1}:\mathtt{nf}),$$

gdje je `nf` broj stranica elemenata koje se nalaze na $\partial\Omega$. Pri tome je `ig=fconn(il,side)` globalni indeks vrha koji na stranici `side` ima lokalni indeks `il`.

Geometrijski opis triangulacije može sadržavati i razna druga polja. Na primjer, ako rješavamo mješovitu rubnu zadaću, onda je granica $\partial\Omega$ podijeljena niz disjunktnih podskupova na kojima primijenjujemo različite rubne uvjete. Tada će jedno polje služiti identifikaciji podskupa kojem pojedina rubna stranica pripada.

Većina programa za triangulaciju omogućava pridruživanje oznaka materijala svakom pojedinom elementu (eng. *material markers*). Pomoću polja takvih oznaka moguće je izvršiti particiju domene Ω na niz subdomena kojima su pridruženi različiti fizikalni parametri.[2]

Od koristi može biti i polje koje svakom elementu u triangulaciji pridružuje njegova tri susjedna elementa. Pri tome, kod simpleksa, lokalni indeksi susjednih elementa odgovaraju lokalnim indeksima nasuprotnih vrhova. Ukoliko se neka stranica elementa nalazi na granici domene, onda se za indeks *susjednog elementa* stavi -1 ili neka druga zgodna vrijednost. Većina generatora triangulacije generira takvu tabelu.

Kod pojedinih specijalnih metoda konačnih elementa, kao što su mješovito-hibridne, važno je imati tabelu koja svakom elementu pridružuje globalne indekse njegovih stranica te tabelu koja svakoj stranici u triangulaciji pridružuje globalne indekse njenih vrhova. Takve su tabele bitne za algoritme koji se izvršavaju u petlji po svim stranicama triangulacije.

7.2 Lokalno računanje integrala

Uzmimo, na primjer, da rješavamo rubni problem

$$-\operatorname{div}(\mathbf{A}(x)\nabla u) + \mathbf{b}(x)\cdot\nabla u + c(x)u = f(x), \quad \text{u } \Omega \tag{7.1}$$

$$u = 0 \quad \text{na } \Gamma_1, \quad \mathbf{A}(x)\nabla u\cdot\vec{n} = g \quad \text{na } \Gamma_2, \tag{7.2}$$

[1] Za simplekse je `fnv=d`.

[2] Najčešće su u subdomeni određenoj jednim oznakom materijala koeficijenti jednadžbe konstantni.

gdje je $\partial\Omega = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$, $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \phi$. Varijacijska zadaća je oblika: $u \in V$,

$$\forall v \in V, \quad a(u,v) = \langle F, v\rangle,$$

gdje je

$$a(u,v) = \int_\Omega (\mathbf{A}(x)\,\nabla u \cdot \nabla v + (\mathbf{b}(x)\cdot \nabla u)v + cuv)\,dx, \tag{7.3}$$

$$\langle F, v\rangle = \int_\Omega fv\,dx + \int_{\Gamma_2} gv\,d\sigma, \tag{7.4}$$

a prostor V se sastoji od svih funkcija iz $H^1(\Omega)$ koje se poništavaju na Γ_1.

Neka su

$$w_1, w_2, \ldots, w_N,$$

globalne bazne funkcije. Tada se rješenje diskretnog problema traži u obliku

$$u_h(x) = \sum_{j=1}^N w_j(x)u_j,$$

pri čemu koeficijenti u_j zadovoljavaju sustav algebarskih jednadžbi

$$\sum_{j=1}^N a(w_j, w_i)u_j = \langle F, w_i\rangle,$$

za sve $i = 1,\ldots,N$. Prema tome, trebamo računati matricu $(\alpha_{i,j})$, $\alpha_{i,j} = a(w_j, w_i)$ i vektor desne strane (F_i), $F_i = \langle F, w_i\rangle$. Svi integrali koji se pojavljuju u ovim formula bit će računati numerički.

Na referentnom element $\hat{K}$ neka je zadan Lagrangeov konačan element $(\hat{K}, \hat{P}, \hat{\Sigma})$. Broj stupnjeva slobode neka je `ndof`, a lokalne bazne funkcije iz $\hat{P}$ označimo s

$$\hat{p}_1, \hat{p}_2, \ldots, \hat{p}_{\texttt{ndof}}.$$

Svakom elementu $K \in \mathcal{T}_h$ pripadaju njegove lokalne bazne funkcije

$$p_1^K, p_2^K, \ldots, p_{\texttt{ndof}}^K,$$

koje su vezane s referentnim lokalnim baznim funkcija preko afinog prelikavanja $F_K \colon \hat{K} \to K$:

$$p_i^K(x) = \hat{p}_i \circ F_K^{-1}(x).$$

Restrikcija globalne bazne funkcije w_i na neki element K je jedna lokalna bazna funkcija tog elementa (ili nula), pa stoga moramo imati polje koje će za svaki element i svaku lokalnu baznu funkciju tog elementa dati indeks pripadne globalne bazne funkcije. To ćemo polje označiti

$$\texttt{dofs}(1:\texttt{ndof}, 1:\texttt{ne}),$$

tako da je

$$\forall x \in K_m, \quad w_{\texttt{dofs}(i,m)}(x) = p_i^{K_m}(x) = \hat{p}_i \circ F_{K_m}^{-1}(x).$$

Napomena (oznake). Da bismo skratili oznake označit ćemo afino preslikavanje $F_{K_m} \colon \hat{K} \to K_m$ jednostavno s F_m. Pripadni gradijent će biti označen s B_m umjesto B_{K_m}, a za lokalne bazne funkcije koristimo oznaku $p_{\mathtt{il}}^m$ umjesto $p_{\mathtt{il}}^{K_m}$. □

Prelikavanje F_m može se generirati pomoću lokalnih baznih funkcija na $\hat{K}$ i koordinata vrhova elementa K_m. Uzmimo na $\hat{K}$ Lagrangeov konačni element čiji su stupnjevi slobode vrhovi skupa $\hat{K}$; ako je $\hat{K}$ d-simpleks, onda će to biti simpleks tipa (1), a ako je d-pravokutnik, onda je to pravokutnik tipa (1). Označimo pripadne lokalne bazne funkcije s

$$\hat{p}_1^1, \hat{p}_2^1, \ldots, \hat{p}_{\mathtt{lnv}}^1.$$

Tada se lako provjerava da je

$$F_m(\hat{x})_k = \sum_{n=1}^{\mathtt{lnv}} \mathtt{coord}(\mathtt{k}, \mathtt{conn}(\mathtt{n}, \mathtt{m})) \hat{p}_n^1(\hat{x}), \quad \hat{x} \in \hat{K},\ k = 1, \ldots, d.$$

Ta je formula značajna za generalizaciju na elemente sa zakrivljenim stranicama.

Nadalje, trebamo formulu numeričke integracije na referentnom elementu. Takva formula ima oblik

$$\int_{\hat{K}} \hat{\phi}(\hat{x})\, d\hat{x} \approx \sum_{l=1}^{L} \hat{\omega}_l \hat{\phi}(\hat{b}_l),$$

Pripadna formula na elementu K_m glasi ($B_m = \nabla F_m$)

$$\int_{K_m} \phi(x)\, dx \approx \sum_{l=1}^{L} |\det(B_m)| \hat{\omega}_l \phi(F_m(\hat{b}_l)).$$

Da bismo izračunali sve potrebne integrale moramo računati parcijalne derivacije lokalnih baznih funkcija u integracijskim točkama. To možemo učiniti jednom i smjestiti rezultat u neka polja:

$$\mathtt{base}(n,l) = \hat{p}_n(\hat{b}_l), \quad 1 \le n \le \mathtt{ndof},\ 1 \le l \le L;$$
$$\mathtt{d\_base}(k,n,l) = \frac{\partial \hat{p}_n}{\partial \hat{x}_k}(\hat{b}_l), \quad 1 \le n \le \mathtt{ndof},\ 1 \le l \le L,\ 1 \le k \le d;$$

Za računanje matrice B_m potrebne su nam derivacije funkcija $\hat{p}_n^1$, pa stoga možemo uvesti dodatna polja

$$\mathtt{base\_1}(n,l) = \hat{p}_n^1(\hat{b}_l), \quad 1 \le n \le \mathtt{lnv},\ 1 \le l \le L;$$
$$\mathtt{d\_base\_1}(k,n) = \frac{\partial \hat{p}_n^1}{\partial \hat{x}_k}(\hat{b}_l), \quad 1 \le n \le \mathtt{lnv},\ 1 \le l \le L,\ 1 \le k \le d,$$

gdje treba uočiti da su parcijalne derivacije konstantene pa ne ovise o točki u kojoj se računaju. (To je istina za simplekse i pravokutnike sa stranicama paralelnim s koordinatnim osima). Tada imamo

$$(B_m)_{k_1,k_2} = \frac{\partial F_K(\hat{x})_{k_1}}{\partial \hat{x}_{k_2}} = \sum_{n=1}^{\texttt{lnv}} \texttt{coord}(k_1, \texttt{conn}(n,m))\texttt{d\_base\_1}(k_2, n).$$

Napomena. Budući da je matrica B_m konstantna za svako $1 \leq m \leq ne$, možemo pojednostaviti gornji račun tako da izbacimo eksplicitno računanje i spremanje tablice `d_base_1`. Ipak, gornji se postupak poopćuje i na elemente sa zakrivljenim granicama. □

Zgodno je raspolagati s tablicom

$$\texttt{Wdx}(l,m) = \hat{\omega}_l |\det(B_m)|.$$

Napomena. Pozitivnost determinante se obično osigurava pozitivnom orijentacijom svakog elementa. □

Konačno treba računati derivacije globalnih baznih funkcija u integracijskim točkama, po pojedinim elementima. Za $i = \texttt{dofs}(n,m)$ imamo

$$\begin{aligned}\frac{\partial w_i}{\partial x_{k_1}}(b_{l,m}) &= \frac{\partial p_n^m}{\partial x_{k_1}}(b_{l,m}) = \frac{\partial \hat{p}_n \circ F_m^{-1}}{\partial x_{k_1}}(b_{l,m}) = \sum_{k_2=1}^{d} \frac{\partial \hat{p}_n}{\partial \hat{x}_{k_2}}(\hat{b}_l)(B_m^{-1})_{k_2,k_1} \\ &= \sum_{k_2=1}^{d} \texttt{d\_base}(k_2,n,l)(B_m^{-1})_{k_2,k_1},\end{aligned}$$

gdje je $b_{l,m} = F_m(\hat{b}_l)$. Kako je tablica `d_base` unaprijed izračunata, za svaki element K_m trebamo samo računati inverz matrice B_m. Konačno, izračunate vrijednosti možemo spremiti u polje

$$\texttt{d\_baseK}(k,n,l,m) = \frac{\partial p_n^m}{\partial x_k}(b_{l,m})$$

za $1 \leq n \leq \texttt{ndof}$, $1 \leq l \leq L$, $1 \leq k \leq d$ te $1 \leq m \leq \texttt{ne}$.

Sada smo u mogućnosti dati cijelu proceduru asembliranja matrice i vektora desne strane. Pri tome još ostaje pokazati kako se računa integral po dijelu granice Γ_2, no taj je postupak posve analogan s ovim provedenim na volumnim integralima. Jedino treba odabrati odgovarajuću formulu numeričke integracije za stranice referentnog elementa $\hat{K}$.

7.3 Asembliranje matrice i vektora desne strane

Pogledajmo prvo matricu. Promatrat ćemo najjednostavniji slučaj, a to je homogeni Neumannov uvjet. Rubni uvjet tu ne intervenira niti u varijacijskoj formulaciji niti u prostoru V.

Trebamo izračunati elmente $\alpha_{i,j}$ definirane formulama

$$\begin{aligned}\alpha_{i,j} &= a(w_j, w_i)\\ &= \sum_{m=1}^{\mathtt{ne}} \sum_{l=1}^{L} \hat{\omega}_l |\det(B_m)| (\mathbf{A}\nabla w_j \cdot \nabla w_i + (\mathbf{b}\cdot\nabla w_j) w_i + c w_j w_i)(b_{l,m})\end{aligned}$$

Prijelazom na lokalne bazne funkcije imamo

$$\begin{aligned}\alpha_{i,j} &= a(w_j, w_i)\\ &= \sum_{m=1}^{\mathtt{ne}} \sum_{l=1}^{L} \hat{\omega}_l |\det(B_m)| (\mathbf{A}\nabla p^m_{n_j} \cdot \nabla p^m_{n_i} + (\mathbf{b}\cdot\nabla p^m_{n_j}) p^m_{n_i} + c p^m_{n_j} p^m_{n_i})(b_{l,m}),\end{aligned}$$

gdje je $j = \mathtt{dofs}(n_j, m)$ te $i = \mathtt{dofs}(n_i, m)$. Nadalje, u tim je formulama

$$\begin{aligned} p^m_n(b_{l,m}) &= \hat{p}_n(\hat{b}_l) = \mathtt{base}(n,l),\\ \nabla p^m_n(b_{l,m}) &= \mathtt{d\_baseK}(\cdot, n, l, m),\\ \hat{\omega}_l |\det(B_m)| &= \mathtt{Wdx}(l,m).\end{aligned}$$

Uzmimo da su koeficijenti jednadžbe dani analitički. Postupak asembliranja, uz homogeni Neumannov rubni uvjet, dan je u Algoritmu 7.3.

Koeficijenti jednadžbe mogu biti zadana *diskretno*, tj. samo u nodalnim točkama. U tom slučaju ih na svakom elementu treba interpolirati prije upotrebe integracijske formule. Na primjer, vrijednost funkcije $c(x)$ u l-toj integracijskoj točki na elementu K_m, računali bismo po formuli

$$c(b_{l,m}) = \sum_{n=1}^{\mathtt{ndof}} c_{\mathtt{dofs}(n,m)} p^m_n(b_{l,m}) = \sum_{n=1}^{\mathtt{ndof}} c_{\mathtt{dofs}(n,m)} \mathtt{base}(n,l).$$

Formiranje vektora desne strane posve je analogno. U Algoritmu 7.3 dajemo primjer s homogenim Neumannovim rubnim uvjetom.

Zadatak. Modificirajte algoritam za nehomogeni Neumannov problem. □

7.4 Spremanje matrice

Budući da je nosač svake bazne funkcije malen matrica krutosti ima relativno malo elemenata različitih od nule. Ako je N red matrice (broj stupnjeva slobode), onda je broj elemenata različitih od nule reda $O(N)$ i stoga nije razumno pamtiti svih N^2 elemenata.

Postoje različiti zapisi matrice koji omogućavaju pamćenje samo onog dijela matrice koji sadrži elemente različite od nule. Najrašireniji je tzv. CSR format (eng. Compressed Sparse Row).

U CSR formatu matrica se pamti u tri polja: $ia(1 : N+1)$, $ja(1 : nnz)$ i $aa(1 : nnz)$. Pamte se samo elementi matrice različiti od nule i njih ima nnz; N je red matrice. Značenje polja je sljedeće:

Algoritam 1: Asembliranje matrice kruosti. Homogeni Nemannov r.u.

for $m = 1, \ldots, \mathtt{ne}$ **do**
  for $l = 1, \ldots, L$ **do**
    // Računanje koordinata integracijskih točaka
    for $k = 1, \ldots, \mathtt{d}$ **do**
      $(b_{l,m})_k = \sum_{n=1}^{\mathtt{lnv}} \mathtt{coord}(\mathtt{k}, \mathtt{conn}(\mathtt{n}, \mathtt{m}))\mathtt{base\_1}(\mathtt{n}, \mathtt{l})$
    end for
    for $ni = 1, \ldots, \mathtt{ndof}$ **do**
      $i = \mathtt{dofs}(ni, m)$
      for $nj = 1, \ldots, \mathtt{ndof}$ **do**
        $j = \mathtt{dofs}(nj, m)$
        // Računanje $\mathbf{A}\,\nabla\, w_j \cdot \nabla\, w_i$
        $x_1 = \sum_{k_1,k_2=1}^{\mathtt{d}} \mathbf{A}_{k_1,k_2}(b_{l,m})\mathtt{d\_baseK}(k_1, nj, l, m)\mathtt{d\_baseK}(k_2, ni, l, m)$
        // Računanje $(\mathbf{b}\,\nabla\, w_j)w_i$
        $x_2 = \mathtt{base}(\mathtt{ni}, \mathtt{l}) \sum_{k_1=1}^{\mathtt{d}} \mathbf{b}_{k_1}(b_{l,m})\mathtt{d\_baseK}(k_1, nj, l, m)$
        // Računanje cw_jw_i
        $x_3 = c(b_{l,m})\mathtt{base}(ni, l)\mathtt{base}(nj, l)$
        // Akumuliranje
        $\alpha_{i,j} = \alpha_{i,j} + (x_1 + x_2 + x_3)\mathtt{Wdx}(l, m)$
      end for
    end for
  end for
end for

Algoritam 2: Asembliranje vertora desne strane. Homogeni Nemannov r.u.

for $m = 1, \ldots, \mathtt{ne}$ **do**
  for $l = 1, \ldots, L$ **do**
    // Računanje koordinata integracijskih točaka
    for $k = 1, \ldots, \mathtt{d}$ **do**
      $(b_l)_k = \sum_{n=1}^{\mathtt{lnv}} \mathtt{coord}(\mathtt{k}, \mathtt{conn}(\mathtt{n}, \mathtt{m}))\mathtt{base\_1}(\mathtt{n}, \mathtt{l})$
    end for
    for $ni = 1, \ldots, \mathtt{ndof}$ **do**
      $i = \mathtt{dofs}(ni, m)$
      $F_i = F_i + f(b_l)\mathtt{base}(\mathtt{ni}, \mathtt{l})\mathtt{Wdx}(\mathtt{l}, \mathtt{m})$
    end for
  end for
end for

1. Polje ia pamti broj elemenata različitih od nule u svakom retku. Preciznije, stavljamo $ia(1) = 1$ i $ia(i+1)$ se definira tako da je $ia(i+1) - ia(i)$ jednak broju elemenata različitih od nule u i-tom retku. Imamo $nnz = ia(N+1) - ia(1)$.

2. U polju ja nalaze se indeksi stupaca elemenata različitih od nule. Preciznije, za $1 \leq i \leq N$, lista $(ja(p))_{ia(i) \leq p < ia(i+1)}$ sadrži indekse stupaca elemenata različitih od nule u i-tom retku. Elementi mogu biti poredani bilo kako, no zgodno ih je poredati u smjeru rastućeg indeksa stupca.

3. Polje aa sadrži elemente matrice različite od nule. Za indeks $1 \leq i \leq N$, lista $(aa(p))_{ia(i) \leq p < ia(i+1)}$ sadrži sve elemente i-tog retka koji su različiti od nule. Element $aa(p)$ nalazi se u stupcu $ja(p)$.

Primjer. Zadana je matrica

$$A = \begin{bmatrix} 1. & 0. & 0. & 2. & 0. \\ 3. & 4. & 0. & 5. & 0. \\ 6. & 0. & 7. & 8. & 9. \\ 0. & 0. & 10. & 11. & 0. \\ 0. & 0. & 0. & 0. & 12. \end{bmatrix} \tag{7.5}$$

U CSR formatu imamo

$$\begin{aligned} aa &= 1.,\ 2.,\ 3.,\ 4.,\ 5.,\ 6.,\ 7.,\ 8.,\ 9.,\ 10.,\ 11.,\ 12. \\ ja &= 1,\ 4,\ 1,\ 2,\ 4,\ 1,\ 3,\ 4,\ 5,\ 3,\ 4,\ 5 \\ ia &= 1,\ 3,\ 6,\ 10,\ 12,\ 13 \end{aligned}$$

Uočimo da je indeks $ia(i)$ pokazivač na prvi element u i-tom retku matrice. Indeks $ia(N+1)$ pokazuje na prvo mjesto iz zadnjeg elementa.

CSR format je pogodan za iterativno rješavanje matričnog sustava stoga što je osnova operacija iterativnih metoda množenje matrice i vektora. Upravo ta operacija se lako izvodi u CSR formatu: Ako je $x(1:N)$ neki vektor, onda se $y = Ax$ izvodi na sljedeći način:

$y(1:N) = 0$
for $i = 1, \ldots, N$ **do**
  for $p = ia(i), \ldots, ia(i+1) - 1$ **do**
    $y(i) = y(i) + aa(p)x(ja(p))$
  end for
end for

Zadatak. Modificirajte algoritam asembliranja matrice tako da radi s matricom u CSR formatu. □

CSR format nije posve pogodan za paralelno računanje. Razlog je u tome što su reci matrice različite duljine, pa nije jedostavno distribuirati matricu po procesorima. Pored toga, početak svakog retka se dohvaća kroz polje ia što može degradirati vektorizaciju koda. Format Ellpack-Itpack djelomično zaobilazi te probleme. Kod njega se prvo treba izračunati maksimalan broj elemenata u svakom pojedinom retku. Zatim se za svaki redak odvoji jednako velika lista i polje ia više nije potrebno. Preciznije, ako je N red matrice, a nd maksimalni broj elemenata različitih od nule po recima matrice, onda matricu pamtimo u dvije tabele: $aa(1:N, 1:nd)$ i $ja(1:N, 1:nd)$.

1. Polje aa sadrži elemente različite od nule matrice. Za indeks $1 \leq i \leq N$, linija $aa(i, 1:nd)$ sadrži sve elemente i-tog retka koji su različiti od nule. Ako u i-tom retku ima elemenata različitih od nule manje od nd, preostala mjesta popunjavaju se nulama.

2. U polju ja nalaze se indeksi stupaca elemenata različitih od nule. Preciznije, za $1 \leq i \leq N$, linija $ja(i, 1:nd)$ sadrži indekse stupaca elemenata različitih od nule u i-tom retku. Poredak elemenata je isti kao u tabeli aa. Ako je broj elemenata u i-tom retku manji od nd, tada indekse stupaca nul-elemenata određujemo proizvoljno.

Primjer. Za matricu (7.5) iz prethodnog pimjera imamo $nd = 4$ te

$$aa = \begin{bmatrix} 1. & 2. & 0. & 0. \\ 3. & 4. & 5. & 0. \\ 6. & 7. & 8. & 9. \\ 10. & 11. & 0. & 0. \\ 12. & 0. & 0. & 0. \end{bmatrix}, \quad ja = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 4 & 4 \\ 5 & 5 & 5 & 5 \end{bmatrix}.$$

U ovom smo primjeru za indeks stupca elemenata jednakih nuli odabrali indeks retka. □

7.5 Dirichletov rubni uvjet

Pokažimo sada kako se uzimaju u obzir Dirichletovi rubni uvjeti. Pri tome ćemo promatrati nehomogeni rubni uvjet na čitavoj granici:

$$u = g, \quad \text{na } \partial\Omega.$$

Pretpostavimo li da funkcija g ima proširenje do funkcije $G \in H^1(\Omega)$, varijacijsku zadaću možemo pisati u obliku

$$\begin{aligned} \text{Naći } u \in H^1(\Omega) \\ a(u, v) = \langle F, v \rangle \quad \forall v \in V \\ \gamma_0(u) = g, \end{aligned}$$

gdje je $V = H_0^1(\Omega)$, a γ_0 je operator traga na $\partial\Omega$. O bilinearnoj formi a i funkcionalu F imamo standardne pretpostavke koje su nužne za primjenu Lax-Milgramove leme.

Da bismo formirali diskretan problem uvedimo regularnu familiju triangulacija $(\mathcal{T}_h)$ i pretpostavimo da su konačni elementi Lagrangeovog tipa. Pripadni prostor konačnih elemenata označimo s V_h, a globalni inerpolacijski operator sa

$$\Pi_h u = \sum_{i=1}^{N} u(a_i) w_i$$

gdje su a_i nodalne točke triangulacije, a w_i su pripadne nodalne funkcije. Pretpostavit ćemo da je rubni uvjet neprekidan tako da interpolacijski operator možemo primijeniti i na njega. Stoga uvodimo interpolacjski operator

$$\Pi_h^g g = \sum_{a_i \in \partial\Omega} g(a_i) w_i.$$

Pretpostavljamo da vrijedi

$$\gamma_0 \circ \Pi_h = \Pi_h^g \circ \gamma_0, \tag{7.6}$$

gdje je γ_0 operator traga na $\partial\Omega$.
Zadatak. Uz koje uvjete je (7.6) ispunjeno? □

Diskretan problem ima oblik

$$\begin{aligned} &\text{Naći } u_h \in V_h \\ a(u_h, v) = \langle F, v\rangle \quad &\forall v \in V_{h0} \\ \gamma_0(u_h) = \Pi_h^g g, & \end{aligned}$$

gdje je $V_{h0} = \{v \in V_h \colon \gamma_0(v) = 0\} \subset H_0^1(\Omega)$.
Zadatak. Pokažite da je uz navedene pretpostavke diskretan problem korektan. Zašto je potrebno pretpostaviti (7.6)? □
Zadatak. Uz gornje pretpostavke pokažite da ako je rješenje kontinuiranog problema u dovoljno glatko da možemo na njega primijeniti interpolacijski operator, onda vrijedi

$$\|u - u_h\|_{1,2;\Omega} \le (1 + \frac{\|a\|}{\alpha})\|u - \Pi_h u\|_{1,2;\Omega}.$$

□
Zadatak. U ovom zadatku treba primijeniti Aubin-Nitcheovu lemu na nehomogeni Dirichletov problem. Uz gornje pretpostavke treba još pretpostaviti regularnost adjungiranog problema, te:

(1) Stabilnost bilinearne forme: postoji konstanta $c > 0$,

$$\forall v \in H^1(\Omega),\ \forall w \in H^2(\Omega), \quad |a(v, w)| \le c(\|v\|_{0,2;\Omega} + \|\gamma_0(v)\|_{0,2;\partial\Omega})\|w\|_{2,2;\Omega}$$

(2) Minimalna interpolacijska ocjena: postoji konstanta $c > 0$,

$$\forall h > 0,\ \forall w \in H^2(\Omega), \quad \|w - \Pi_h w\|_{1,2;\Omega} \leq ch\|w\|_{2,2;\Omega}.$$

Dokažite da uz te uvjete vrijedi

$$\|u - u_h\|_{0,2;\Omega} \leq c(h\|u - \Pi_h u\|_{1,2;\Omega} + \|u - \Pi_h u\|_{0,2;\Omega} + \|g - \Pi_h^g g\|_{0,2;\partial\Omega}).$$

□

Pogledajmo sada kako izgleda pripadni linearni sustav. U tu svrhu stupnjeve slobode možemo indeksirati tako da prvih N_D nodalnih točaka leži na $\partial\Omega$. Tada dobivamo sljedeći sustav:

$$\sum_{i=1}^{N} a(w_j, w_i)u_j = \langle F, w_i\rangle, \quad N_D + 1 \leq i \leq N,$$
$$u_i = g_i, \quad 1 \leq i \leq N_D,$$

gdje je $g_i = g(a_i)$.

Uvedimo sljedeće matrice i vektore:

$$\begin{aligned}
\mathbf{A} &= (\alpha_{i,j}), \quad \text{za } i, j = N_D + 1, \dots N \\
\mathbf{B} &= (\alpha_{i,j}), \quad \text{za } i = N_D + 1, \dots N, \ \ j = 1, \dots N_D \\
\mathbf{u}_1 &= (u_1, \dots, u_{N_D}), \quad \mathbf{u}_2 = (u_{N_D+1}, \dots, u_N), \\
\mathbf{F}_1 &= (g_1, \dots, g_{N_D}), \quad \mathbf{F}_2 = (F_{N_D+1}, \dots, F_N),
\end{aligned}$$

gdje kao i ranije imamo oznake $\alpha_{i,j} = a(w_j, w_i)$ i $F_i = \langle F, w_i\rangle$. Sada sustav možemo zapisati u blok formi:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{B} & \mathbf{A} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{u}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_1 \\ \mathbf{F}_2 \end{bmatrix}. \tag{7.7}$$

Ovaj sustav možemo rješavati na razne načine. Prvo moguće je eliminirati Dirichletove stupnjeve slobode. Time se prelazi na sustav

$$\mathbf{A}\mathbf{u}_2 = \mathbf{F}_2 - \mathbf{B}\mathbf{F}_1.$$

Ako je bilinearna forma simetrična, onda je i matrica $\mathbf{A}$ simetrična, dok matrica iz susatva (7.7) to nije. To je prednost eliminacije. Da bi postupak eliminacije bio efikasan treba ga provesti za vrijeme asembliranja matrice i vektora desne strane, a ne naknadno, kad je već cijela matrica formirana.

Druga mogućnost je rješavati sustav (7.7). Taj je postupak privlačan stoga što pojednostavljuje proces asembliranja. Postupak je sljedeći: matrica i desna strana asembliraju bez obziranja na Dirichletove rubne uvjete. To znači da, ustvari, asembliramo matricu i desnu stranu za homogeni Neumannov problem.

Zatim u svakom retku matrice koji odgovara Dirichletovoj nodalnoj točki stavimo sve vandijagonalne elemente na nulu, a dijagonalni na jedan. Odgovarajuću komponentu vektora desne strane postavimo na vrijednost rubnog uvjeta.

Prednost ovakvog pristupa je jednostavnost (i fleksibilnost) implementacije, a nedostaci su (malo) veća dimenzija sustava i nesimetričnost matrice. Ipak, gubitak simetrije matrice nije katastrofalan ako koristimo metodu rješavanja sustava na bazi Krilovljevih prostora.

Zadatak. Neka je

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{B} & \mathbf{A} \end{bmatrix},$$

pri čemu je submatrica $\mathbf{A}$ simetrična. Neka je

$$\mathcal{K}(\mathcal{A}, \mathbf{r})_k = \mathcal{L}(\mathbf{r}, \mathcal{A}\mathbf{r}, \dots, \mathcal{A}^k \mathbf{r})$$

pripadni Krilovljev prostor. Kao i gore koristimo blok vektore

$$\mathbf{r}_1 = (r_1, \dots, r_{N_D}), \quad \mathbf{r}_2 = (r_{N_D+1}, \dots, r_N), \quad \mathbf{r} = \begin{bmatrix} \mathbf{r}_1 \\ \mathbf{r}_2 \end{bmatrix}.$$

Dokažite sljedeću tvrdnju: Ako je $\mathbf{r}_1 = 0$, onda je restrikcija matrice $\mathcal{A}$ na $\mathcal{K}(\mathcal{A}, \mathbf{r})_k$ simetrična. Taj rezultat znači da na matricu $\mathcal{A}$ možemo primijeniti algoritam konjugiranih gradijenata iako sama matrica nije simetrična. $\square$

Treća metoda koja se može koristiti je penalizacija (Ironova tehnika). Matrica i vektor desne strane se formiraju bez uzimanja u obzir rubnih uvjeta. Zatim se jednadžbi koja odgovara nodalnoj točki na Dirichletovoj granici doda jednadžba

$$\frac{1}{\varepsilon} u_i = \frac{1}{\varepsilon} g_i,$$

gdje ε mali parametar, reda veličine strojnog epsilona. Pri tome se, dakle, dodaje $1/\varepsilon$ na dijagonalu matrice i komponenti vektora desne strana dodaje se g_i/ε. Takvim se postupkom osigurava zadovoljenje Dirichletovog rubnog uvjeta s dovoljnom preciznošću, dok se svojstvo simetrije matrice ne narušava.

8

Izoparametrički elementi

U ovom poglavlju diskutiramo aproksimaciju eliptičke varijacijske zadaće u domeni koja nije poligonalna. Cilj nam je opisati tehniku izoparametričkih elemenata sa što manje tehničkih detalja, pa ćemo stoga promatrati modelnu rubnu zadaću

$$\begin{aligned} -\mathrm{div}(\mathbf{A}\nabla u) &= f \quad \text{u } \Omega, \\ u &= 0 \quad \text{na } \partial\Omega, \end{aligned}$$

na ograničenoj, nepoligonalnoj domeni $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Pri tome standardno pretpostavljamo da je $a_{i,j},\ f \in C(\overline{\Omega})$, za sve $i, j = 1, \ldots, n$. Diskutirat ćemo samo aproksimaciju Lagrangeovim konačnim elementima.

8.1 Triangulacija pomoću simpleksa

Pretpostavimo da smo na domeni Ω konstruirali jednu triangulaciju $\mathcal{T}_h$ izgrađenu od n-simpleksa. Kako domena Ω nije poligonalna skup Ω_h,

$$\overline{\Omega}_h = \cup_{K \in \mathcal{T}_h} K,$$

nije jednak Ω; dapače, nije nužno $\Omega_h \subset \Omega$. Iz toga odmah slijedi da pripadni prostor konačnih elemenata V_h općenito nije podskup prostora $H^1(\Omega)$, pa aproksimacija nije konformna. K tome je eventualno nužno definirati proširenje koeficijenata jednadžbe izvan Ω, kako bismo mogli definirati diskretnu varijacijsku jednadžbu.

Najjednostavnija situacija se pojavljuje kada je domena Ω konveksna. Tada je $\Omega_h \subset \Omega$ i možemo definirati diskretnu zadaću

$$\begin{aligned} &\text{naći } u_h \in V_h \\ &\forall v \in V_h, \quad \int_{\Omega_h} \mathbf{A}\nabla u_h \cdot \nabla v \, dx = \int_{\Omega_h} f v \, dx. \end{aligned} \tag{8.1}$$

Varijacijska jednadžba je dobro definirana, ali nije konformna. Rubni uvjet $u_h = 0$ nije postavljen na $\partial\Omega$, već na $\partial\Omega_h$.

U slučaju konveksne domene Ω tom je problemu lako doskočiti. Definira se $\tilde{V}_h$ kao prostor svih funkcija iz V_h, proširenih nulom na $\Omega \setminus \Omega_h$. Očito je $\tilde{V}_h \subset H_0^1(\Omega)$ i varijacijska zadaća (8.1) je ekvivalentna s

$$\begin{aligned} &\text{naći } u_h \in \tilde{V}_h \\ \forall v \in \tilde{V}_h, \quad &\int_\Omega \mathbf{A}\nabla u_h \cdot \nabla v \, dx = \int_\Omega f v \, dx. \end{aligned} \tag{8.2}$$

Zbog konformnosti aproksimacije vrijedi Céaina lema i ocjena greške se svodi na ocjenu greške interpolacije. U [12] se pokazuje, u slučaju $n = 2$, da pri aproksimaciji simpleksima tipa (k), za $k \geq 2$, dobivamo ocjenu

$$\inf_{v \in V_h} |u - v_h|_{1,2;\Omega_h} \leq C h^{3/2} \max_{K \in \mathcal{T}_h} \left(\frac{h_K}{\rho_K} \right) \|u\|_{3,2;\Omega},$$

za svaku funkciju $u \in H^3(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$. Već za $k = 2$ ova ocjena predstavlja gubitak preciznosti (optimalna ocjena je h^k) koji dolazi od loše aproksimacije granice domene. Naime, na svakom trokutu koji se nalazi na zakrivljenom dijelu granice $\partial\Omega$ lokalna grška je reda h_K^3/ρ_K, što sumiranjem daje gornju ocjenu (vidi Raviar-Thomas [12] za detalje).

Da bismo i u slučaju domene sa zakrivljenom granicom ponovo dobili optimalnu ocjenu greške metode konačnih elemenata, moramo preciznije aproksimirati zakrivljeni dio granice. To znači da moramo uvesti konačne elemente sa zakrivljenim stranicama.

8.2 Konačni elemeti sa zakrivljenim stranicama

Pretpostavimo da smo našli način preciznije aproksimirati domenu sa zakrivljenom granicom i da imamo triangulaciju koja sadrži i nepoliedarske skupove. Sada se postavlja pitanje kako na skupovima koji nisu poliedarski efektivno definirati Lagrangeov konačan element, klase C^0. Ti se elementi moraju slagati sa standardnim elementima na simpleksima i pravokutnicima ako im je međusobna granica ravna.

Efikasna konstrukcija se dobiva upotrebom referentnog elementa. Pretpostavimo da je $(\hat{K}, \hat{P}, \hat{\Sigma})$ Lagrangeov referentni element, da je K jedan *element* triangulacije, i $F\colon \hat{K} \to K$ glatko bijektivno preslikavanje sa $\hat{K}$ na K, $K = F(\hat{K})$. Tada možemo definirati

$$P = \{p\colon K \to \mathbb{R}\colon p \circ F \in \hat{P}\}, \quad \Sigma = F(\hat{\Sigma}).$$

(Kako je referentni element Lagrangeov, $\hat{\Sigma}$ se sastoji od nodalnih točaka.)

Lema 8.1 Trojka (K, P, Σ) je Lagrangeov konačan element.

Dokaz. Treba samo dokazati unisloventnost. Neka je $\hat{\Sigma} = \{\hat{a}_j : j = 1, \ldots, N\}$. Tada je $\Sigma = \{a_j = F(\hat{a}_j) : j = 1, \ldots, N\}$ i zbog bijektivnosti preslikavanja F je broj elemenata u $\hat{\Sigma}$ i Σ jednak. Nadalje, ako su $\hat{p}_i$ za $i = 1, \ldots, N$ bazne funkciju u $\hat{P}$, onda su i $p_i = \hat{p}_i \circ F^{-1}$ bazne funkcije u P; naime, zbog bijektivnosi preslikavanja one su linearno nezavisne, te vrijedi

$$p_i(a_j) = \hat{p}_i(F^{-1}(a_j)) = \hat{p}_i(\hat{a}_j) = \delta_{i,j}.$$

Time je dokazano da je Σ P-unisolventan. $\square$

Na osnovi ove leme možemo postaviti opću definiciju ekvivalencije konačnih elemenata. Za dva elementa $(\hat{K}, \hat{P}, \hat{\Sigma})$ i (K, P, Σ) kažemo da su ekvivalentni ako postoji glatka bijekcija $F \colon \hat{K} \to K$ sa svojstvima:

$$\begin{aligned} K &= F(\hat{K}) \\ P &= \{p \colon K \to \mathbb{R} \colon p \circ F \in \hat{P}\} \\ \Sigma &= F(\hat{\Sigma}). \end{aligned}$$

U slučaju da je F afino preslikavanje, dolazimo do definicije afino ekvivalentnih elemenata. U tom slučaju je to prava relacija ekvivalencije; općenito, ova *ekvivalencija* nije prava relacija ekvivalencije jer ne zadovoljava uvjet simetrije.

Kao i u slučaju afine ekvivalencije, vrijedi sljedeći značajan rezultat.

Lema 8.2 Neka su $(\hat{K}, \hat{P}, \hat{\Sigma})$ i (K, P, Σ) dva ekvivalentna Lagrangeova konačna elementa, $F \colon \hat{K} \to K$ pripadna bijekcija i $\hat{\Pi}$ $\hat{P}$-interpolacijski operator. Tada je P-interpolacijski operator Π dan formulom

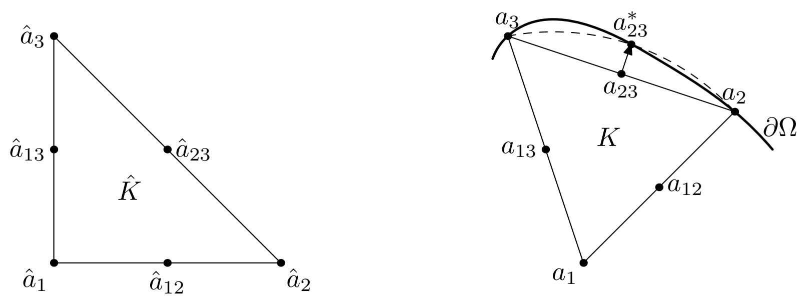
$$(\Pi v) \circ F = \hat{\Pi}(v \circ F).$$

Dokaz. Označimo kao i ranije $\hat{\Sigma} = \{\hat{a}_j : j = 1, \ldots, N\}$ i $\Sigma = \{a_j = F(\hat{a}_j) : j = 1, \ldots, N\}$. Bazne funkcije neka su p_j i $\hat{p}_j$, za $j = 1, \ldots, N$. Tada je

$$\Pi v = \sum_{j=1}^{N} v(a_j) p_j, \quad \hat{\Pi} \hat{v} = \sum_{j=1}^{N} \hat{v}(\hat{a}_j) \hat{p}_j.$$

Sada je evidentno

$$\begin{aligned} (\Pi v) \circ F &= \sum_{j=1}^{N} v(a_j) p_j \circ F = \sum_{j=1}^{N} v(F(\hat{a}_j)) \hat{p}_j \\ &= \sum_{j=1}^{N} (v \circ F)(\hat{a}_j) \hat{p}_j = \hat{\Pi}(v \circ F). \ \square \end{aligned}$$



Slika 8.1: Konstrukcija trokuta sa zakrivljenom stranicom

Sada kad znamo kako konstruirati konačan element, postavlja se pitanje kako konstruirati preslikavanje F. Pogledajmo, na primjer, triangulaciju nepoliedarske domene u $\mathbb{R}^2$ trokutima tipa (2). Prvo bismo mogli referentni trokut afino preslikati u trokut na granici domene, kao na slici 8.1.

Pri tome se vrhovi referentnog trokuta $\hat{K}$, $\hat{a}_1$, $\hat{a}_2$ i $\hat{a}_3$, preslikavaju u vrhove trokuta K, a_1, a_2 i a_3, a polovišta stranica, $\hat{a}_{12}$, $\hat{a}_{23}$ i $\hat{a}_{13}$ preslikavaju se u polovišta stranica trokuta K, a_{12}, a_{23} i a_{13}. Vidjeli smo da takvi elementi ne mogu dati optimalnu grešku aproksimacije, zbog loše aproksimacje granice domene. Aproksimaciju možemo popraviti ako polovište $\hat{a}_{23}$ preslikamo u točku a^*_{23} koja leži na presjecištu normale na stranicu $[a_2, a_3]$, kroz točku a_{23}, i granice $\partial\Omega$.

Dakle, potrebno nam je preslikavanje $F\colon \hat{K} \to \mathbb{R}^2$, koje zadovoljava,

$$F(\hat{a}_i) = a_i, \quad i = 1, 2, 3, \quad F(\hat{a}_{12}) = a_{12}, \; F(\hat{a}_{23}) = a^*_{23}, \; F(\hat{a}_{13}) = a_{13}. \tag{8.3}$$

Takvo preslikavanje je lako konsruirati pomoću baznih funkcija na referentnom elementu. Neka su $\hat{p}_i$, $i = 1, 2, 3$, te $\hat{p}_{12}$, $\hat{p}_{23}$ i $\hat{p}_{13}$ bazne funkcije na $\hat{K}$:

$$\hat{p}_i(\hat{a}_j) = \delta_{i,j}, \quad i, j = 1, 2, 3, \quad \hat{p}_i(\hat{a}_{k,l}) = 0, \quad k < l,$$

$$\hat{p}_{i,j}(\hat{a}_k) = 0, \quad k = 1, 2, 3, \quad \hat{p}_{i,j}(\hat{a}_{k,l}) = \delta_{i,k}\delta_{j,l}, \quad k < l.$$

Traženo preslikavanje je

$$F(\hat{x}) = a_1\hat{p}_1(\hat{x}) + a_2\hat{p}_2(\hat{x}) + a_3\hat{p}_3(\hat{x}) + a_{1,2}\hat{p}_{1,2}(\hat{x}) + a^*_{2,3}\hat{p}_{2,3}(\hat{x}) + a_{1,3}\hat{p}_{1,3}(\hat{x}).$$

Element triangulacije $K^* = F(\hat{K})$, koji dobivamo na ovaj način, zamjenjuje trokut K.

Napomena. Uočimo da je preslikavanje $F \in \mathbb{P}_2^2$ koje zadovoljava (8.3) jedinstveno. To slijedi iz svojstva unisolventnosti. □

Pitanje na koje treba odgovoriti je da li je preslikavanje F bijektivno. Tu će nam biti od pomoći element K koji se dobiva iz $\hat{K}$ afinim preslikavanjem $F^a(\hat{x}) = B\hat{x} + b$, koje je definirano svojstvom

$$F^a(\hat{a}_i) = a_i, \quad i = 1, 2, 3.$$

Za razliku $F - F^a \in \mathbb{P}_2^2$ vrijedi

$$(F - F^a)(\hat{a}_i) = 0, \quad i = 1, 2, 3,$$
$$(F - F^a)(\hat{a}_{12}) = 0, \; (F - F^a)(\hat{a}_{23}) = a_{23}^* - a_{23}, \; (F - F^a)(\hat{a}_{13}) = 0.$$

Zbog jedinstvenosti ovakvog preslikavanja zaključujemo da je

$$F(\hat{x}) = F^a(\hat{x}) + (a_{23}^* - a_{23})\hat{p}_{2,3}(\hat{x}).$$

Iz te formule vidimo da F preslikava stranice $[\hat{a}_1, \hat{a}_2]$ i $[\hat{a}_1, \hat{a}_3]$ u ravne stranice (jer je restrikcija preslikavanja F na te stranice afina), dok se $[\hat{a}_2, \hat{a}_3]$ preslikava u luk parabole.

Za očekivati je da je preslikavanje F bijektivo kad je udaljenost od a_{23}^* do a_{23} mala, jer se tada F malo razlikuje od F^a. To se može jednostavno pokazati. Imamo,

$$F(\hat{x}) - F(\hat{y}) = F^a(\hat{x}) - F^a(\hat{y}) + (a_{23}^* - a_{23})(\hat{p}_{2,3}(\hat{x}) - \hat{p}_{2,3}(\hat{y})).$$

odnosno,

$$\begin{aligned} F(\hat{x}) - F(\hat{y}) &= B(\hat{x} - \hat{y}) + (a_{23}^* - a_{23})(\hat{p}_{2,3}(\hat{x}) - \hat{p}_{2,3}(\hat{y})) \\ &= B\left(\hat{x} - \hat{y} + (\hat{p}_{2,3}(\hat{x}) - \hat{p}_{2,3}(\hat{y}))B^{-1}(a_{23}^* - a_{23})\right). \end{aligned}$$

Ako je granica $\partial\Omega$ glatka, onda je $|a_{23}^* - a_{23}| \le Ch_K^2$, dok je $\|B^{-1}\| \le C/\rho_K$, pa stoga imamo

$$\|B^{-1}(a_{23}^* - a_{23})\| \le C\frac{h_K^2}{\rho_K}.$$

S druge strane, postoji konstanta C, takva da je

$$|\hat{p}_{2,3}(\hat{x}) - \hat{p}_{2,3}(\hat{y})| \le C|\hat{x} - \hat{y}|,$$

pa dobivamo

$$|B^{-1}(F(\hat{x}) - F(\hat{y}))| \ge (1 - C\frac{h_K^2}{\rho_K})|\hat{x} - \hat{y}|.$$

Dakle, za h_K dovoljno malo preslikavanje F je injektivno.

Konstrukcija provedena na trokutima tipa (2) lako se generalizira na proizvoljan Lagrangeov konačni element.

Ako je $(\hat{K}, \hat{P}, \hat{\Sigma})$ Lagrangeov konačni element i $F\colon \hat{K} \to \mathbb{R}^n$ injektivno preslikavanje, onda za element (K, P, Σ), $K = F(\hat{K})$, $\Sigma = F(\hat{\Sigma})$, $P = \{p\colon K \to \mathbb{R}\colon p \circ F \in \hat{P}\}$ kažemo da je **konstruiran pomoću** F. (Prema Lemi 8.1 to je zaista konačni element.)

Definicija 8.1 Neka je $(\hat{K}, \hat{P}, \hat{\Sigma})$ Lagrangeov konačni element i $F \in (\hat{P})^n$ injekcija. Lagrangeov konačni element (K, P, Σ) konstruiran pomoću preslikavanja F naziva se izoparametrički konačni element; za elemente $(\hat{K}, \hat{P}, \hat{\Sigma})$ i (K, P, Σ) kažemo da su izoparametrički ekvivalentni. Izoparametrička familija konačnih elemenata je svaka familija $\{(K, P, \Sigma)\}$ konačnih elemenata sa svojstvom da je svaki element familije izoparametrički ekvivalentan istom referentnom elementu $(\hat{K}, \hat{P}, \hat{\Sigma})$.

Napomena.

1. Biti izoparametrički ekvivalentan nije relacija ekvivalencije.

2. Ako je $\hat{P} = \mathbb{P}_1$, onda se izoparametrička ekvivalencija svodi na afinu ekvivalenciju, što jeste relacija ekvivalencije.

3. Elementi prostora P_K nisu nužno polinomi. To nije bitno s praktične strane jer se sav račun radi na referentnom elementu. Isto tako, greška interpolacije se ocjenjuje na referentnom elemenu, a na proizvoljnom elementu se dobiva zamjenom varijabli.

Primjeri. Izoparametrički n-simpleksi tipa (k).

Za $k = 2$ preslikavanje F_K ima oblik

$$F_K(\hat{x}) = \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i(\hat{x})(2\lambda_i(\hat{x}) - 1)a_i + 4 \sum_{\substack{i,j=1 \\ i<j}}^{n+1} \lambda_i(\hat{x})\lambda_j(\hat{x})a_{ij},$$

gdje su λ_i baricentričke koordinate. Granica izoparametričkog simpleksa sastoji se od stranica koje su općenito zakrivljene. Svaka je stranica jedinstveno određena rasporedom vrhova na stranici. Da bi se to uočilo dovoljno je primijetiti da bazna funkcija koja odgovara vrhu koji nije na promatranoj stranici, identički iščezava na njoj. To svojstvo (koje vrijedi za sve izoparametričke simplekse) osigurava da se izoparametrički simpleksi dobro slažu u triangulaciju, bez praznina ili preklapanja na granicama elemenata.

Posve analogno, kao što smo pokazali u uvodnom primjeru, vidi se da ako je $a_{i,j} = (a_i + a_j)/2$, onda je pripadna stranica ravna. Nadalje, preslikavanje F_K je injektivno ako su udaljenosti $|a_{i,j} - (a_i + a_j)/2|$ dovoljno male.

Za $k = 3$ preslikavanje F_K ima oblik

$$\begin{aligned} F_K(\hat{x}) = {} & \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i(\hat{x})(3\lambda_i(\hat{x}) - 1)(3\lambda_i(\hat{x}) - 2)a_i \\ & + \frac{9}{2} \sum_{\substack{i,j=1 \\ i\neq j}}^{n+1} \lambda_i(\hat{x})\lambda_j(\hat{x})(3\lambda_i(\hat{x}) - 1)a_{iij} \\ & + 27 \sum_{i<j<k} \lambda_i(\hat{x})\lambda_j(\hat{x})\lambda_k(\hat{x})a_{ijk}. \end{aligned}$$

Uočimo da ovdje točka a_{ijk} nema utjecaja na granicu elementa. Posve analogo be se definirali izoparametrički n-simpleksi tipa $(3')$.

Zadatak. Konstruirajte jednostavan primjer izoparametričkog trokuta tipa (2) koji u svom prostoru funkcija sadrži pored polinoma i racionalne funkcije. □

Ako preslikavanje F kojim generiramo konačan element, polazeći od referentnog elementa $(\hat{K}, \hat{P}, \hat{\Sigma})$, biramo iz prostora koji je stroga sadržan u $\hat{P}$, onda govorimo o subparametričkim elementima.

Uzmimo, na primjer, pravokutnik tipa (2). Ako koristimo preslikavanje F koje je afino, s dijagonalnom matricom, onda dobivamo ponovo pravokutnik tipa (2). Ako koristimo proizvoljno afino preslikavanje, pripadni element će biti paralelogram. Koristimo li, pak, $F \in \mathbb{Q}_1^2$ dobivamo općenit četverokut. Sve su to primjeri subparametričkih elemenata. Tek ako uzmemo $F \in \mathbb{Q}_2^2$ dobivamo izoparametričke elemente sa zakrivljenim stranicama.

Napomena. Izoparametrički n-pravokutnik tipa (1) je primjer izoparametričkog elementa s ravnim stranicama. □

8.3 Prostor izoparametričkih konačnih elemenata

Promatrat ćemo radi jednostavnosti samo izoparametričke simplekse i n-pravokutnike. Izbor nodalnih točaka treba biti takav da svaki element koji ima vrhove na rubu domene, ima i sve ostale nodalne točke pripadne stranice na $\partial\Omega$. Time postižemo dobru aproksimaciju granice domene.

S druge strane, prirodno je uzeti da su sve unutarnje stranice elemenata ravne. To se postiže odgovarajućim izborom nodalnih točaka na stranicama. Na taj način prave izoparametričke elemente imamo samo na granici domene, dok su svi ostali elementi afini.

Budući da je svaka stranica elementa posve određena njenim nodalnim točkama, ne dolazi do preklapanja susjednih elemenata il nastanka praznina. Prostor konačnih elemenata je

$$V_h = \{v = (v_K)_{K\in\mathcal{T}_h} \in \prod_{K\in\mathcal{T}_h} P_K \colon v \text{ je jedinstveno definirana u nodalnim točkama}\}.$$

Budući da je svaki izoparametrički konačni element (K, P_K, Σ_K) pravi konačni element (Lema 8.1) to je funkcija iz P_K posve određena svojim vrijednostima u nodalnim točkama. Nadalje, lako slijedi iz svojstva referentnog elementa (n-simpleks ili n-pravokutnik), da ona je neprekidna na granici susjednih elemenata, pa stoga je

$$V_h \subset C(\overline{\Omega}_h), \quad \overline{\Omega}_h = \cup_{K\in\mathcal{T}_h} K.$$

Budući da $\Omega_h \neq \Omega$, rubni uvjet ne može strogo biti zadovoljen i metoda nije konformna, odnosno

$$V_{h0} = \{v \in V_h : v_h = 0 \ \text{ na } \ \partial\Omega_h\}$$

nije podskup od $H_0^1(\Omega)$. Ipak, ovim smo postupkom granicu dovoljno dobro aproksimirali tako da će globalna greška metode ostati asimptotski optimalna.
Napomena. Globalni interpolacijski operator Π_h definira se isto kao kod afinih elemenata:

$$\Pi_h v\big|_K = \Pi_K v. \ \square$$

Da bismo formirali diskretan problem moramo proširiti koeficijente jednadžbe na $\Omega_h \setminus \Omega$. U tu svrhu pretpostavljamo da postoji ograničen skup $\tilde{\Omega}$ takav da je

$$\Omega \subset \tilde{\Omega} \quad \text{i} \quad \Omega_h \subset \tilde{\Omega}$$

za svako h, i da su $\tilde{a}_{i,j}$ i $\tilde{f}$ neka proširenja funkcija $a_{i,j}$ i f na $\tilde{\Omega}$. Tada imamo diskretan problem

$$\text{naći } u_h \in V_{h0}$$
$$\forall v \in V_{h0}, \quad \int_{\Omega_h} \tilde{\mathbf{A}} \nabla u_h \cdot \nabla v \, dx = \int_{\Omega_h} \tilde{f} v \, dx. \tag{8.4}$$

S praktične strane, potreba za proširenjim koeficijenata je problematična jer je moguće konstruirati beskonačno mnogo različitih proširenja. Taj problem rješava numerička integracija. Uzmimo da imamo zadanu formulu numeričke integracije na referentnom elementu

$$\int_{\hat{K}} \hat{\phi}(\hat{x}) \, d\hat{x} \approx \sum_{l=1}^{L} \hat{\omega}_l \hat{\phi}(\hat{b}_l).$$

Ona generira izoparametričku formulu numeričke integracije na elementu K:

$$\begin{aligned} \int_K \phi(x) \, dx &= \int_{\hat{K}} \hat{\phi}(\hat{x}) |\det(\nabla F_K)(\hat{x})| \, d\hat{x} \\ &\approx \sum_{l=1}^{L} \hat{\omega}_l \hat{\phi}(\hat{b}_l) |\det(\nabla F_K)(\hat{b}_l)| = \sum_{l=1}^{L} \omega_{l,K} \phi(b_{l,K}), \end{aligned}$$

gdje je

$$\omega_{l,K} = |\det(\nabla F_K)(\hat{b}_l)| \hat{\omega}_l, \quad b_{l,K} = F_K(\hat{b}_l).$$

Greška metode na elementu $\hat{K}$ i elementu K stoje u odnosu

$$E_K(\phi) = \hat{E}(\hat{\phi} |\det(\nabla F_K)|).$$

Diskretan problem sada glasi: naći $u_h \in V_{h0}$, takvo da je

$$\forall v \in V_{h0}, \quad \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \sum_{l=1}^{L} \omega_{l,K} \sum_{i,j=1}^{n} (a_{ij} \partial_i u_h \partial_j v)(b_{l,K}) = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \sum_{l=1}^{L} \omega_{l,K} (fv)(b_{l,K}).$$

U ovoj se formulaciji izbjegava upotreba proširenja ako su integracijske točke $b_{l,K}$ iz $\overline{\Omega}$. To se može postići tako da se biraju integracijske formule koja imaju integracijske točke u nodalnim točkama elementa i u unutrašnjosti elementa. Za dovoljno male vrijednosti parametra h unutrašnje integracijske točke će biti preslikane u Ω i time je diskretan problem dobro definiran bez ikakvih proširenja.

Napomena. Implementacija izoparametričke metode se komplicira, u odnosu na afine elemente, utoliko što determinanta gradijenta izoparametričkog preslikavanja nije konstantna, što usložnjuje formule za parcijalne derivacije baznih funkcija. $\square$

Teorija za izoprametričke elemente posve je analogna teoriji razvijenoj za afine elemente. Najprije je potrebno ocijeniti grešku interpolacijskog operatora. Pri tome se polazi od greške interpolacijskog operatora na referentnom elementu, te se zamjenom varijabli dobiva ocjena greške na proizvoljnom elementu. Budući da preslikavanje s referentnog elementa više nije afino, tu imamo dva nova elementa: prvo, treba formirati novu lemu o zamjeni varijabli u Soboljevljevim polunormama. Tu će se pojaviti različite norme izoparametričkog preslikavanja F_K. Te je norme, zatim, potrebno ocijeniti kroz geometrijske parametre. Tu će se pojaviti novi geometrijski parametar koji mjeri deformaciju izoparametričkog elementa u odnosu na pripadni afini element. Znamo da ta razlika ne smije biti suviše velika da bismo sačuvali bijektivnost preslikavanja. Pokazuje se (vidi npr. Ciarlet [6]), da se dobiva asimptotski optimalna greška interpolacije. Na primjer, za izoprametričke simplekse tipa (2) imamo

$$\forall v \in H^3(K), \quad \|v - \Pi_K v\|_{m,2;K} \le Ch^{3-m}(|v|_{2,2;K} + |v|_{3,2;K}).$$

(Ciarlet [6], str. 241).

Ocjena greške metode se dalje bazira na apstraktnoj ocjeni tipa prve Strangove leme. Greška se sastoji od greške interpolacije te greške diskretizacije, koja dolazi od numeričke integracije i aproksimacije domene. Pokazuje se da treba odabrati dovoljno točnu fomulu numeričke integracije, kako bi se dobila optimalna greška metode. Točnost numeričke integracije osigurava i uniformnu eliptičnost diskretne bilinearne forme i time rješivost diskretnog problema. U Ciarletovoj knjizi [6] (str. 224-270) kompletna analiza je provedena na simpleksima tipa (2). Pokazuje se da se asimptotski optimalan red metode dobiva bez dodatnih uvjeta na točnost numeričke integracije: formula numeričke integracije mora biti egzaktna na $\mathbb{P}_2$.

9

Jednadžba konvekcije-difuzije

Posebno zanimljiv slučaj jedndžbi eliptičkog ili paraboličkog tipa predstavljaju jednadžbe tipa konvekcije-difuzije. U eliptičkom slučaju jednadžba ima oblik

$$-\operatorname{div}(\mathbf{A}(x)\nabla u) + \mathbf{b}(x)\cdot\nabla u + c(x)u = f(x), \tag{9.1}$$

gdje član $-\operatorname{div}(\mathbf{A}(x)\nabla u)$ modelira difuziju, a član $\mathbf{b}(x)\cdot\nabla u$ konvekciju. Na primjer, varijabla u bi mogla biti koncentracija neke kemikalije u fluidu koji se giba s brzinom $\mathbf{b}$, dok je $\mathbf{A}$ tenzor molekularne difuzije, obično oblika $\mathbf{A}(x) = a(x)\mathbf{I}$, gdje je a zadana skalarna funkcija ili konstanta.[1] U gotovo svim fizikalnim modelima difuzijski član je značajno manji u odnosu na konvekcijski. To dovodi do situacije u kojoj je kontinuirani problem dobro postavljen, i ima jedinstveno rješenje na osnovu Lax-Milgramove leme, ali numerički problem, dobiven standardnom metodom konačnih elemenata, nije stabilan. Gubitak stabilnosti je posljedica toga što je konstanta α, koja se javlja u eliptičnosti bilinearne forme, suviše mala.

Omjer konvekcijsko i difuzijskog člana je bitan za ponašanje rješenja jednažbe, pa se stoga mjeri jednim bezdimenzionalnim brojem, koji se obično naziva Pécletov broj. Uzmimo, na primjer, situaciju u kojoj je molekularna difuzija skalarna konstanta, brzina fluida također konstantna, i nema člana bez derivacije. Dobivamo

$$-a\,\triangle u + \mathbf{b}\cdot\nabla u = f(x).$$

U ovom slučaju Pécletov broj Pe može se definirati na sljedeći način:

$$\mathsf{Pe} = \frac{|\mathbf{b}|L}{a},$$

gdje je L karakteristična duljina domene u kojoj se problem promatra. To je bezdimenzionalna veličina jer molekularna difuzija ima dimenziju m^2/s.

[1] Član bez derivacije $c(x)u$ obično modelira neku kemijsku reakciju. Sva tri člana mogu biti linearni kao u jednadžbi (9.1), ili nelinearni.

U slučaju *malog* Pécletovog broja problem konvekcije-difuzije je obična eliptička (ili parabolička) zadaća na koju se može primijeniti standardna metoda konačnih elemenata. Kada Pécletov broj postane dovoljno velik potrebno je modificirati metodu.

Opća slika problema konvekcije-difuzije u slučaju velikog Pécletovog broja je sljedeća: Kako je a puno maje od $\mathbf{b}$, jednadžba je bliska jednadžbi prvog reda

$$\mathbf{b} \cdot \nabla u = f(x).$$

Ova se jednadžba značajno razlikuje od jednadžbe drugog reda: dok kod jednadžbe drugog reda možemo Dirichletov rubni uvjet zadati na cijeloj granici $\partial\Omega$, kod jednadžbe prvog reda rubni se uvjet zadaje samo na ulaznoj granici, tj. na dijelu granice na kojem je $\mathbf{b} \cdot \mathbf{n} < 0$, $\mathbf{n}$ je vanjska normala na $\partial\Omega$. U cijeloj domeni će rješenje jednadžbe biti *preneseno po karakteristikama*. Rezultat toga je da su rješenja jednadžbe konvekcije-difuzije i jednadžbe konvekcije bliska u unutrašnjosti domene, dok se značajno razlikuju na pojedinim dijelovima granice $\partial\Omega$. Na tim dijelovima kažemo da imamo rubni sloj. Čitav je problem singularno perturbiran.

U ovom ćemo poglavlju pokušati ilustrirati pojavu rubnih slojeva i načine modificiranja metode konačnih elemenata na jednostavnom jednodimenzionalnom primjeru. Na kraju ćemo opisati neke generalizacije na višedimenzionalne zadaće.

9.1 Metoda konačnih diferencija

Zadane su funkcije $f, b\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ te mali parametar $\varepsilon > 0$. Promatramo problem

$$-\varepsilon u''(x) + b(x)u'(x) = f(x), \quad \forall x \in (0,1) \tag{9.2}$$
$$u(0) = u(1) = 0. \tag{9.3}$$

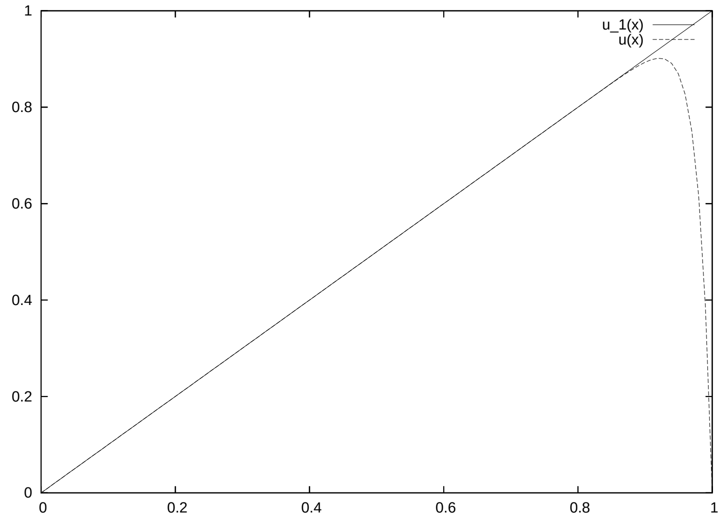
To je najjednostavniji primjer stacionarne jednadžbe tipa konvekcije-difuzije. Član $-\varepsilon u''(x)$ modelira difuziju, a $b(x)u'(x)$ konvekciju.

U slučaju konstantnih funkcija b i f, $b(x) = b_0 \neq 0$, $f(x) = f_0$, lako je pokazati da je egzaktno rješenje problema dano formulom

$$u(x) = \frac{f_0}{b_0}\left(x - \frac{1 - e^{b_0 x/\varepsilon}}{1 - e^{b_0/\varepsilon}}\right). \tag{9.4}$$

Ako u (9.2) stavimo $\varepsilon = 0$, dobivamo jednadžbu prvog reda

$$b(x)u'(x) = f(x), \quad \forall x \in (0,1) \tag{9.5}$$
$$u(0) = 0 \tag{9.6}$$



Slika 9.1: Rješenja za $f_0 = b_0 = 1$ i $\varepsilon = 0.02$.

čije je rješenje, u slučju $b(x) = b_0 \neq 0$, $f(x) = f_0$,

$$u_1(x) = \frac{f_0}{b_0} x. \tag{9.7}$$

Jedan smo rubni uvjet morali ispustiti jer smo dobili jednadžbu prvog reda. Rješenje problema (9.2)–(9.3) je stoga suma rješenja (9.7) i eksponencijalne korekcije koja je potrebna da bi se zadovoljio i drugi rubni uvjet. Ukoliko je omjer b_0/ε velik, onda se promjena dešava na vrlo malom intervalu. U takvoj situaciji kažemo da rješenje ima **rubni sloj**: malo područje na rubu domene u kojem se dešava značajna promjena rješenja. Primjer rješenja $u(x)$ i $u_1(x)$ dan je na Slici 9.1.

Pokušajmo riješiti problem (9.2)–(9.3) numerički, metodom konačnih diferencija. Uzet ćemo ekvidistantnu mrežu na $[0, 1]$,

$$x_j = jh, \quad j = 0, 1, \ldots, N + 1, \quad h = \frac{1}{N + 1},$$

i $u(x_j)$ aproksimiramo vrijednostima u_j koje se dobivaju iz diferencijske sheme

$$\varepsilon \frac{2u_j - u_{j-1} - u_{j+1}}{h^2} + b(x_j) \frac{u_{j+1} - u_{j-1}}{2h} = f(x_j), \quad j = 1, \ldots, N \tag{9.8}$$

$$u_0 = u_{N+1} = 0. \tag{9.9}$$

Shemu smo dobili tako što smo derivacije zamijenili **centralnim diferencijama**.

Pogledajmo diferencijsku jednadžbu u slučaju $b(x) = b_0 \neq 0$, $f(x) = f_0$. Dobivamo

$$\frac{2\varepsilon}{h^2} u_j - (\frac{\varepsilon}{h^2} + \frac{b_0}{2h}) u_{j-1} - (\frac{\varepsilon}{h^2} - \frac{b_0}{2h}) u_{j+1} = f_0. \tag{9.10}$$

U specijalnom slučaju

$$\frac{\varepsilon}{h^2} - \frac{|b_0|}{2h} = 0 \quad \Rightarrow \quad h = \frac{2\varepsilon}{|b_0|},$$

direktnim računom se lako pokazuje da (9.10) ima rješenje

$$u_j = \frac{f_0}{b_0} x_j, \quad j = 1, \dots, N.$$

To je upravo rješenje granične jednadžbe u kojoj je $\varepsilon = 0$.

I u slučaju $h \neq 2\varepsilon/|b_0|$ nije teško naći točno rješenje diferencijske jednadžbe. U tu svrhu pomnožimo jednadžbu s h^2/ε i uvedimo tzv. mrežni Pécletov broj

$$\mathsf{Pe} = \frac{|b_0| h}{2\varepsilon}.$$

Diferencijska jednadžba (9.10), u slučaju $b_0 > 0$, može se zapisati u obliku[2]

$$2u_j - (1 + \mathsf{Pe}) u_{j-1} - (1 - \mathsf{Pe}) u_{j+1} = \frac{f_0 h^2}{\varepsilon},$$

a uvjet $h \neq 2\varepsilon/b_0$ je ekvivalentan s $\mathsf{Pe} \neq 1$. Karakteristična jednadžba pridružena diferencijskoj jednadžbi je

$$(1 - \mathsf{Pe})\lambda^2 - 2\lambda + (1 + \mathsf{Pe}) = 0,$$

a njeni korijeni su 1 i $(1+\mathsf{Pe})/(1-\mathsf{Pe})$. Jedno partikularno rješenje možemo naći u obliku $u_j = Cj$, tako da opće rješenje ima oblik

$$u_j = \alpha + \beta \left(\frac{1 + \mathsf{Pe}}{1 - \mathsf{Pe}} \right)^j + \frac{f_0}{b_0} x_j.$$

Uvažavajući rubne uvjete dobivamo rješenje

$$u_j = \frac{f_0}{b_0} \left[x_j - \frac{\left(\frac{1+\mathsf{Pe}}{1-\mathsf{Pe}}\right)^j - 1}{\left(\frac{1+\mathsf{Pe}}{1-\mathsf{Pe}}\right)^{N+1} - 1} \right],$$

za $j = 0, 1, \dots, N, N+1$.

Iz ove formule možemo zaključiti da će rješenje postati oscilatorno ako je $\mathsf{Pe} > 1$, dok u slučaju $\mathsf{Pe} < 1$ oscilacija nema. Taj je zaključak očekivan jer ako je $\mathsf{Pe} > 1$, onda je $h > 2\varepsilon/|b_0|$ i korak nije dovoljno velik za aproksimaciju rješenja u rubnom sloju (širina rubnog sloja je reda veličine $\varepsilon/|b_0|$). Kao posljedicu dobivamo nestabilnost sheme. Smanjim li dovoljno korak, shema će ponovno postati stabilna. Dakle uvjet stabilnosti je taj koji generira ograničenje na korak h. U

[2] U slučaju $b_0 < 0$ treba uzeti $-\mathsf{Pe}$ umjesto Pe. Svi zaključci ostaju vrijediti.

višedimenzionalnim problemima to ograničenje je suviše restriktivno i stoga se nameće pitanje konstrukcije stabilnijih shema.

Jedan način da se poboljša shema je da se promijeni diskretizacija konvektivnog člana. Tako ćemo umjesto centralne diferencije upotrijebiti neku srednju vrijednost između diferencije unaprijed i diferencije unatrag. Nova shema je oblika

$$\begin{aligned} \varepsilon\frac{2u_j - u_{j-1} - u_{j+1}}{h^2} &+ \frac{b(x_j)}{h}\left(\alpha_j(u_j - u_{j-1}) + (1-\alpha_j)(u_{j+1} - u_j)\right) \\ &= f(x_j), \quad j = 1, \dots, N \\ u_0 = u_{N+1} &= 0. \end{aligned} \tag{9.11}$$

Ostaje nam odrediti koeficijente $\alpha_j \in [0,1]$ tako da postignemo najbolju moguću aproksimaciju. Slučaj $\alpha_j = 1/2$ daje centralnu diferenciju i vidjeli smo da vodi na oscilacije.

Analizirajmo ponovo slučaj $b(x) = b_0 \neq 0$, $f(x) = f_0$. Uzet ćemo da je $\alpha_j = \alpha$ za sve indekse j; problem dobiva oblik

$$\begin{aligned} 2u_j - u_{j-1} - u_{j+1} &+ \gamma\left(\alpha(u_j - u_{j-1}) + (1-\alpha)(u_{j+1} - u_j)\right) \\ &= \frac{h^2 f_0}{\varepsilon}, \quad j = 1, \dots, N, \end{aligned}$$

gdje je

$$\gamma = \frac{b_0}{\varepsilon}h.$$

S druge strane, točno rješenje, koje je zadano formulom (9.4) može u točkama mreže biti zapisano u obliku $w_j = u(x_j)$,

$$w_j = \frac{f_0}{b_0}\left(jh - \frac{1 - e^{j\gamma}}{1 - e^{b_0/\varepsilon}}\right), \quad j = 0, 1, \dots, N+1.$$

Uvrštavanjem točnog rješenja u lijevu stranu diferencijske jednadžbe dobivamo

$$\begin{aligned} 2w_j - w_{j-1} - w_{j+1} &+ \gamma\left(\alpha(w_j - w_{j-1}) + (1-\alpha)(w_{j+1} - w_j)\right) \\ &= \frac{f_0}{b_0}\left(\gamma h + \frac{\left((1+\gamma\alpha)(2 - e^{-\gamma} - e^{\gamma}) + \gamma(e^{\gamma} - 1)\right)e^{j\gamma}}{1 - e^{b_0/\varepsilon}}\right) \end{aligned}$$

Dakle, ukoliko izaberemo α takav da je

$$(1+\gamma\alpha)(2 - e^{-\gamma} - e^{\gamma}) + \gamma(e^{\gamma} - 1) = 0$$

dobit ćemo

$$\begin{aligned} 2w_j - w_{j-1} - w_{j+1} &+ \gamma\left(\alpha(w_j - w_{j-1}) + (1-\alpha)(w_{j+1} - w_j)\right) \\ &= \frac{f_0}{b_0}\gamma h = \frac{f_0 h^2}{\varepsilon}. \end{aligned}$$

U tom slučaju vrijednosti $w_1, \ldots, w_N$ zadovoljavaju diferencijsku shemu i time dobivamo

$$u_j = w_j = u(x_j), \quad j = 0, 1, \ldots, N+1.$$

Dakle, približno i egzaktno rješenje podudaraju se u točkama mreže. Za α dobivamo

$$\begin{aligned}
\alpha &= \frac{1 - e^{\gamma}}{(2 - e^{-\gamma} - e^{\gamma})} - \frac{1}{\gamma} \\
&= \frac{1 - \frac{1}{2}e^{\gamma} - \frac{1}{2}e^{-\gamma} + \frac{1}{2}(e^{-\gamma} - e^{\gamma})}{(2 - e^{-\gamma} - e^{\gamma})} - \frac{1}{\gamma} \\
&= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\frac{e^{-\gamma} - e^{\gamma}}{(2 - e^{-\gamma} - e^{\gamma})} - \frac{1}{\gamma} \\
&= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\frac{(e^{-\gamma/2} + e^{\gamma/2})(e^{\gamma/2} - e^{-\gamma/2})}{(e^{\gamma/2} - e^{-\gamma/2})^2} - \frac{1}{\gamma}.
\end{aligned}$$

Time dobivamo

$$\alpha = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\mathrm{cth}\frac{\gamma}{2} - \frac{1}{\gamma}. \tag{9.12}$$

Uočimo da je $|\gamma| = 2\mathsf{Pe}$

Zadatak. Pokažite da je

$$\frac{1}{2}\mathrm{cth}\frac{\gamma}{2} - \frac{1}{\gamma} = \frac{\gamma}{12} + O(\gamma^3),$$

kada $\gamma \to 0$. $\square$

Funkcija (9.12) prikazana je na Slici 9.2. Uočimo da za $\gamma = 0$ ima vrijednost $1/2$, da teži prema jedan kada $\gamma \to +\infty$, te da teži k nuli kada $\gamma \to -\infty$.

Ako b i f nisu konstantne funkcije, onda se uzima

$$\alpha_j = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\mathrm{cth}\frac{\gamma_j}{2} - \frac{1}{\gamma_j}, \quad \gamma_j = \frac{b(x_j)}{\varepsilon}h. \tag{9.13}$$

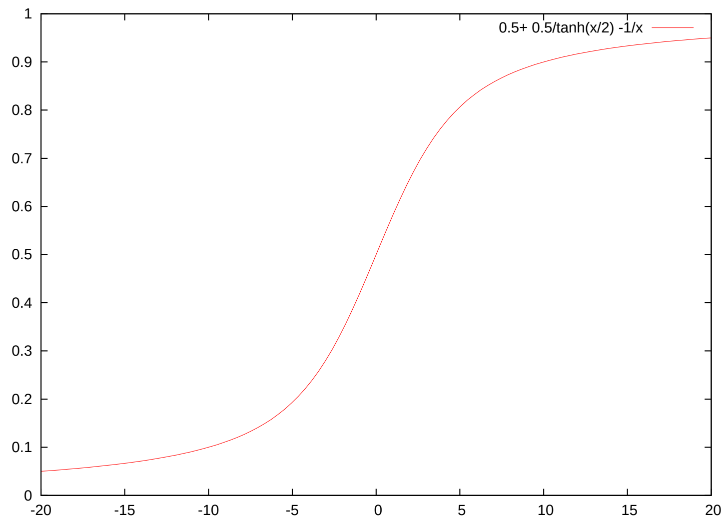
Shema (9.11) s koeficijentom α_j iz (9.13) naziva se upwind shema.

Napomena. Upwind shema dobivena na ovaj način ponekad se zove eksponencijalna upwind shema. Potpuna upwind shema dobiva se tako da se za funkciju $\alpha(\gamma)$ uzmu samo dvije granične vrijednosti, 0 i 1:

$$\alpha_j = \begin{cases} 1 & \text{za } b(x_j) > 0 \\ 0 & \text{za } b(x_j) < 0 \end{cases}$$

Time za $b(x_j) > 0$ dobivamo shemu

$$\varepsilon\frac{2u_j - u_{j-1} - u_{j+1}}{h^2} + b(x_j)\frac{u_j - u_{j-1}}{h} = f(x_j), \quad j = 1, \ldots, N$$



Slika 9.2: Funkcija $\alpha = \alpha(\gamma)$.

a za $b(x_j) < 0$,

$$\varepsilon \frac{2u_j - u_{j-1} - u_{j+1}}{h^2} + b(x_j)\frac{u_{j+1} - u_j}{h} = f(x_j), \quad j = 1, \ldots, N.$$

Obje se ove sheme mogu zapisati u obliku

$$\varepsilon \frac{2u_j - u_{j-1} - u_{j+1}}{h^2} + b(x_j)^+ \frac{u_j - u_{j-1}}{h} + b(x_j)^- \frac{u_{j+1} - u_j}{h} = f(x_j),$$

gdje je $b(x_j)^+ = \max\{b(x_j), 0\}$, $b(x_j)^- = \min\{b(x_j), 0\}$. $\square$

Nadalje, lako je pokazati da se upwind shema može zapisati u obliku

$$\varepsilon_j^* \frac{2u_j - u_{j-1} - u_{j+1}}{h^2} + b(x_j)\frac{u_{j+1} - u_{j-1}}{2h} = f(x_j), \quad j = 1, \ldots, N$$

gdje je

$$\varepsilon_j^* = \varepsilon + hb(x_j)(\alpha_j - \frac{1}{2}). \tag{9.14}$$

Odavdje vidimo da je veća stabilnost upwind sheme postignuta povećanjem konstante ε. Član koji smo dodali, $hb(x_j)(\alpha_j - \frac{1}{2})$, naziva se numerička difuzija.
Napomena. Uočite da je član $b(x_j)(\alpha_j - \frac{1}{2})$, koji se dodaje difuzijskom članu ε, uvijek pozitivan. U slučaju potpune upwind metode on iznosi $h|b(x_j)|/2$, odnosno uvijek ima maksimalnu vrijednost. $\square$

9.2 Modifikacija metode konačnih elemenata

Vidjeli smo u jednoj dimenziji kako je moguće modificirati standardnu metodu konačnih diferencija kako bismo dobili metodu stabilnu za sve Pécletove brojeve. Sada bismo tu analizu željeli prenijeti i na metodu konačnih elemenata.

Metodu konačnih diferencija moguće je u nekim slučajevima interpretirati, uz odgovarajući izbor baznih funkcija i integracijske formule, kao metodu konačnih elemenata. To je vrlo jednostavni u jednoj dimenziji.

Neka su w_j po dijelovima afine globalne bazne funkcije na uniformnoj mreži

$$x_j = jh, \quad j = 0, 1, \ldots, N+1, \quad h = \frac{1}{N+1}.$$

Aproksimacija zadaće (9.2), (9.3) metodom konačnih elemenata ima oblik

$$u_h(x) = \sum_{j=1}^{N} w_j(x) u_j,$$

$$\sum_{j=1}^{N} u_j \int_0^1 (\varepsilon w_j'(x) w_i'(x) + b(x) w_j'(x) w_i(x))\, dx = \int_0^1 f(x) w_i(x)\, dx,$$

za $i = 1, 2, \ldots, N$. Jednostavni računo dobivamo

$$\int_0^1 w_j'(x) w_i'(x)\, dx = \begin{cases} 2/h & \text{za } j = i \\ -1/h & \text{za } j = i-1 \\ -1/h & \text{za } j = i+1 \\ 0 & \text{inače,} \end{cases}$$

$$\int_0^1 w_j'(x) w_i(x)\, dx = \begin{cases} 0 & \text{za } j = i \\ -1/2 & \text{za } j = i-1 \\ 1/2 & \text{za } j = i+1 \\ 0 & \text{inače.} \end{cases}$$

Aproksimirajući integral

$$\begin{aligned} \int_0^1 b(x) w_j'(x) w_i(x)\, dx = \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} b(x) w_j'(x) w_i(x)\, dx &\approx b(x_i) \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} w_j'(x) w_i(x)\, dx \\ &= b(x_i) \int_0^1 w_j'(x) w_i(x)\, dx \end{aligned}$$

dobivamo (za $i = 1, 2, \ldots, N$ uzimajući $u_0 = u_{N+1} = 0$)

$$\varepsilon \left(\frac{2}{h} u_i - \frac{1}{h} u_{i+1} - \frac{1}{h} u_{i-1} \right) + b(x_i) (\frac{1}{2} u_{i+1} - \frac{1}{2} u_{i-1}) = h f(x_i),$$

gdje smo uzeli

$$\int_0^1 f(x) w_i(x)\, dx \approx f(x_i) \int_0^1 w_i(x)\, dx = h f(x_i).$$

Vidimo dakle, da Lagrangeovi konačni elementi tipa $\mathbb{P}_1$ odgovaraju centralnim diferencijama, i stoga imaju iste nedostatke kao centralne diferencije.

Željeli bismo modificirati metodu konačnih elemenata tako da modificirana metoda daje shemu koja odgovara upwind metodi konačnih diferencija. Ideja je promijeniti test funkcije. Umjesto funkcije w_i uzet ćemo test funkciju oblika $w_i + \beta_i \phi_i$, gdje je β_i neka konstanta, a ϕ_i funkcija, koja ima isti nosač kao i w_i, a koju trebamo odrediti. Nova metoda bi glasila:

$$u_h(x) = \sum_{j=1}^{N} w_j(x) u_j,$$

$$\sum_{j=1}^{N} u_j \int_0^1 (\varepsilon w_j'(x)(w_i'(x) + \beta_i \phi_i'(x)) + b(x) w_j'(x)(w_i(x) + \beta_i \phi_i(x)))\, dx \tag{9.15}$$
$$= \int_0^1 f(x)(w_i(x) + \beta_i \phi_i(x))\, dx,$$

za $i = 1, 2, \ldots, N$. Uvođenjem novih test funkcija ne želimo mijenjati difuzijski dio sheme koji dolazi od člana

$$\int_0^1 \varepsilon w_j'(x) w_i'(x)\, dx$$

pa stoga zahtijevamo da bude

$$\int_0^1 w_j'(x) \phi_i'(x)\, dx = 0. \tag{9.16}$$

Nadalje, tražimo od funkcije ϕ_i da zadovoljava

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} \phi_i(x)\, dx = \frac{1}{2}h, \quad \int_{x_i}^{x_{i+1}} \phi_i(x)\, dx = -\frac{1}{2}h, \tag{9.17}$$

što onda daje,

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^{N} u_j \int_0^1 b(x) w_j'(x)(w_i(x) + \beta_i \phi_i(x)))\, dx \\
&\quad = \sum_{j=i-1}^{i+1} u_j b(x_i) \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} w_j'(x)(w_i(x) + \beta_i \phi_i(x)))\, dx \\
&\quad = b(x_i)(\frac{1}{2}u_{i+1} - \frac{1}{2}u_{i-1}) + \beta_i b(x_i) \sum_{j=i-1}^{i+1} u_j \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} w_j'(x)\phi_i(x)\, dx \\
&\quad = b(x_i)(\frac{1}{2}u_{i+1} - \frac{1}{2}u_{i-1}) + \beta_i b(x_i)(-\frac{1}{2}u_{i-1} + u_i - \frac{1}{2}u_{i+1}).
\end{aligned}$$

Sada zajedno s (9.16), uvrštavanjem u (9.15), dobivamo

$$\varepsilon\left(\frac{2}{h}u_i - \frac{1}{h}u_{i+1} - \frac{1}{h}u_{i-1}\right) + \frac{b(x_i)}{2}((1-\beta_i)(u_{i+1}-u_i)+(1+\beta_i)(u_i-u_{i-1}) = hf(x_i).$$

Pri tome smo uzeli

$$\int_0^1 f(x)\phi_i(x)\,dx \approx f(x_i)\int_0^1 \phi_i(x)\,dx = 0,$$

jer imamo

$$\int_0^1 \phi_i(x)\,dx = \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \phi_i(x)\,dx = \frac{1}{2}h - \frac{1}{2}h = 0.$$

Uspoređujući s rezultatom dobivenim s konačnim diferencijama vidimo da je optimalan izbor koeficijenta β_i,

$$\beta_i = 2\alpha_i - 1 = \mathrm{cth}\frac{\gamma_i}{2} - \frac{2}{\gamma_i}, \quad \gamma_i = \frac{b(x_i)}{\varepsilon}h.$$

Time smo ponovo došli do eksponencijalne upwind sheme. Potpuna upwind shema se dobije tako da se uzme

$$\beta_i = 2\alpha_i - 1 = \begin{cases} 1 & \text{za } b(x_i) > 0 \\ -1 & \text{za } b(x_i) < 0 \end{cases}.$$

Preostaje vidjeti kako konstruirati funkciju ϕ_i koja zadovoljava (9.16) i (9.17). Ona k tome mora imati nosač $[x_{i-1}, x_{i+1}]$ i sa stanovišta interpolacijske teorije povoljno je da se poništava u svim nodalnim točkama x_j, $j = 0, 1, \ldots, N+1$.

Jedna mogućnost je uzeti funkciju

$$\phi_i(x) = \begin{cases} 3(x - x_{i-1})(x_i - x)/h^2 & \text{za } x \in [x_{i-1}, x_i] \\ -3(x - x_i)(x_{i+1} - x)/h^2 & \text{za } x \in [x_i, x_{i+1}] \end{cases}.$$

Uočimo da se radi o po dijelovima polinomu drugog stupnja koji se poništava i svim nodalnim točkama. Nadalje,

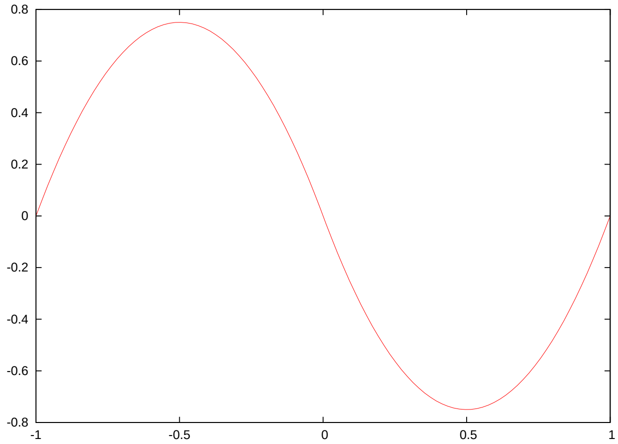
$$\phi_i'(x) = \begin{cases} 3(x_{i-1} + x_i - 2x)/h^2 & \text{za } x \in [x_{i-1}, x_i] \\ -3(x_i + x_{i+1} - 2x)/h^2 & \text{za } x \in [x_i, x_{i+1}] \end{cases},$$

što pokazuje da je

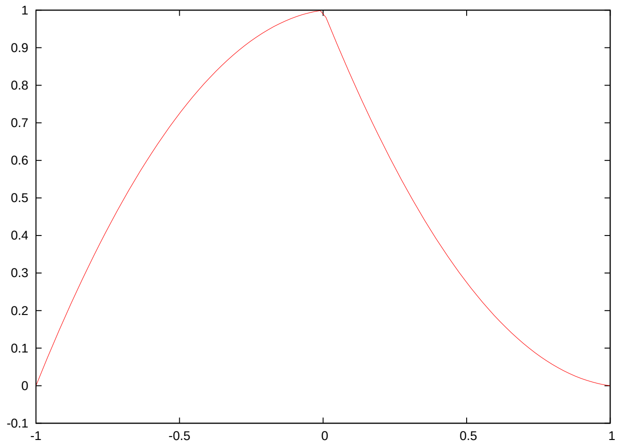
$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} \phi_i'(x)\,dx = \int_{x_i}^{x_{i+1}} \phi_i'(x)\,dx = 0,$$

pa je stoga (9.16) ispunjen. Uvjet (9.17) se neposredno provjerava integracijom. Izgled funkcije $\phi_i(x)$ je dan na Slici 9.3, u specijalnom slučaju $h = 1$ i $x_i = 0$.

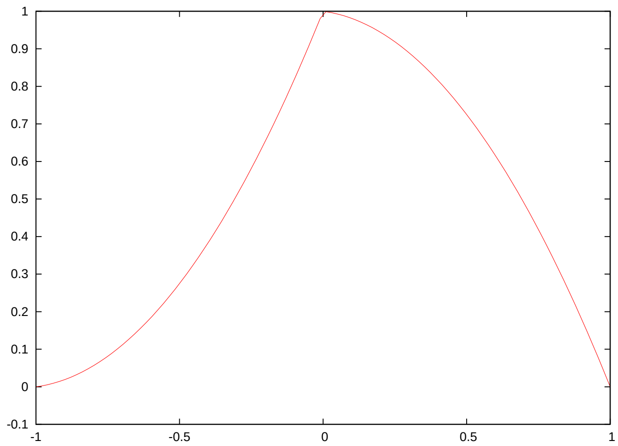
Primjeri test funkcija $w_i(x) + \beta_i\phi_i(x)$ dani su na slikama 9.4 i 9.5. U oba slučaja je uzeto $h = 1$ i $x_i = 0$, te u prvom imamo $\beta_i = 0.3$, a u drugom $\beta_i = -0.3$.



Slika 9.3: Funkcija $\phi_i(x)$ za $h = 1$ i $x_i = 0$.



Slika 9.4: Funkcija $w_i(x) + 0.3\phi_i(x)$ za $h = 1$ i $x_i = 0$.



Slika 9.5: Funkcija $w_i(x) - 0.3\phi_i(x)$ za $h = 1$ i $x_i = 0$.

9.3 Petrov-Galerkinove metode

Modificirana metoda konačnih elemenata, koju smo izveli u prethodnoj sekciji, ne ulazi u okvire varijacijske aproksimacije. Naime, prostor iz kojega uzimamo test funkcije razlikuje se od prostora u kome tražimo rješenje (u slučaju homogenih rubnih uvjeta). Varijacijsku zadaću koju smo dobili možemo apstraktno zapisati u sljedećem obliku:

$$\begin{aligned} &\text{naći } u \in V \\ &\forall v \in W, \quad a(u,v) = \langle F, v\rangle, \end{aligned} \tag{9.18}$$

gdje su V i W dva Hilbertova prostora, $a\colon V \times W \to \mathbb{R}$, bilinearna forma i $F \in W'$, linearan i neprekidan funkcional.

Numeričke metode koje vode na diskretnu zadaću oblika (9.18), gdje su W i V međusobno različiti, konačnodimenzionalni prostori iste dimenzije, nazivaju se Petrov-Galerkinove metode. Kod takvih metoda, evidentno, Lax-Milgramova lema nije dovoljna da se pokaže njihova korektnost. Stoga se koristi sljedeća generalizacija.

Teorem 9.1 (Nečas) Neka su V i W dva Hilbertova prostora, $a\colon V \times W \to \mathbb{R}$, bilinearna forma i $F \in W'$, linearan i neprekidan funkcional. Problem (9.18) je korektan ako i samo ako su ispunjena sljedeća dva uvjeta:

(i) Postoji konstanta $\alpha > 0$, takva da je

$$\inf_{v\in V} \sup_{w\in W} \frac{a(v,w)}{\|v\|_V \|w\|_W} \geq \alpha,$$

(ii) Vrijedi,

$$\forall w \in W, \quad (\forall v \in V, \quad a(v,w) = 0) \quad \Rightarrow \quad (w = 0).$$

Pod tim uvjetima vrijedi

$$\forall F \in W', \quad \|u\|_V \leq \frac{1}{\alpha} \|F\|_{W'}.$$

Dokaz teorema može se naći u [7].

Napomena. Nečasov teorem u slučaju $W = V$ predstavlja profinjenje Lax-Milgramove leme, budući da daje nužne i dovoljne uvjete korektnosti. □

Neke zadaće prirodno vode na varijacijsku formulaciju Petrov-Galerkinovog tipa. Pogledajmo sljedeći problem stacionarne konvekcije.

$$\begin{aligned} \mathbf{b}\cdot\nabla u + a_0 u = f, &\quad \text{u } \Omega \\ u = \phi &\quad \text{na } \partial\Omega^{in}. \end{aligned}$$

Ovdje su $\mathbf{b}$, a_0, f i ϕ zadane funkcije, a

$$\partial\Omega^{in} = \{x \in \partial\Omega \colon \mathbf{b}\cdot\mathbf{n} < 0\},$$

gdje je $\mathbf{n}$ vanjska normala na $\partial\Omega$.

Odaberimo test funkciju $v \in H^1(\Omega)$ i napravimo parcijalnu integraciju:

$$\int_\Omega \mathbf{b}\cdot\nabla\, u\, v\, dx = -\int_\Omega u \operatorname{div}(\mathbf{b}v)\, dx + \int_{\partial\Omega} \mathbf{b}\cdot\mathbf{n} uv\, d\sigma.$$

Uvažavajući rubni uvjet dolazimo do sljedeće varijacijske formulacije: naći $u \in L^2(\Omega)$, takvo da za svako $v \in H^1(\Omega)$ vrijedi

$$-\int_\Omega u \operatorname{div}(\mathbf{b}v)\, dx + \int_\Omega a_0 uv\, dx + \int_{\partial\Omega\setminus\partial\Omega^{in}} \mathbf{b}\cdot\mathbf{n} uv\, d\sigma = \int_\Omega fv\, dx - \int_{\partial\Omega^{in}} \mathbf{b}\cdot\mathbf{n}\phi v\, d\sigma.$$

Rješenje tražimo u $L^2(\Omega)$ jer smo derivaciju prebacili na test funkciju, koja stoga mora biti iz $H^1(\Omega)$. U ovom primjeru imamo $V = L^2(\Omega)$, $W = H^1(\Omega)$,

$$a(u,v) = \int_\Omega u \operatorname{div}(\mathbf{b}v)\, dx + \int_\Omega a_0 uv\, dx + \int_{\partial\Omega\setminus\partial\Omega^{in}} \mathbf{b}\cdot\mathbf{n} uv\, d\sigma$$

$$\langle F, v\rangle = \int_\Omega fv\, dx - \int_{\partial\Omega^{in}} \mathbf{b}\cdot\mathbf{n}\phi v\, d\sigma.$$

Napomena. Moguća je druga varijacijska formulacija u kojoj bi derivaciju ostavili na funkciji u. I ona vodi na formulaciju Petrov-Galerkinovog tipa, jedino što prostori zamijenjuju uloge. □

Ostalo je otvoreno pitanje kako geneirati prostor test funkcija u slučaju višedimenzionalne zadaće. Jedna ideja je sljedeća: Neka je zadaća tipa konvekcije-difuzije dana u varijacijskoj formi

$$\begin{aligned} u &\in V = H_0^1(\Omega)\\ \forall v &\in V, \quad a(u,v) = \langle F, v\rangle. \end{aligned}$$

Bilinearna forma $a\colon V\times V \to \mathbb{R}$ je koercitivna ali, zbog konvektivnog člana, nije simetrična. Neka je $a_S\colon V\times V\to\mathbb{R}$ neka (pridružena) simetrična, koercitivna bilinearna forma. Kako takva forma prestavlja skalaran produkt, po Rieszovom teoremu reprezentacije za svako $w \in V$ možemo naći element $w^* = R_S w \in V$ takav da je

$$\forall v, w \in V, \quad a(v,w) = a_S(v, R_S w).$$

Rieszov teorem nam k tome daje da je preslikavanje $R_S\colon V \to V$ neprekidna bijekcija. Ako je $V_h \subset V$ standardni prostor konačnih elemenata, onda za *optimalan* potprostor $W_h \subset V$ možemo uzeti potprostor određen s

$$R_S W_h = V_h.$$

Varijacijska aproksimacija Petrov-Galerkinovog tipa bi bila

$$
\begin{aligned}
&\text{naći } u_h \in V_h \\
&\forall w \in W_h, \quad a(u_h, w) = \langle F, w \rangle.
\end{aligned} \tag{9.19}
$$

Uočimo da je po definiciji prostora W_h ova varijacijska jednadžba ekvivalentna s jednadžbom

$$\forall v \in V_h, \quad a_S(u_h, v) = \langle F, R_S^{-1} v \rangle,$$

pa je ovim izborom postora zadaća simetrizirana.

Razlika točnog i aproksimativnog rješenja zadovoljava

$$0 = a(u - u_h, v) = a_S(u - u_h, R_S v), \quad \forall v \in W_h.$$

Po konstrukciji prostora W_h dobivamo

$$a_S(u - u_h, v) = 0 \quad \forall v \in V_h. \tag{9.20}$$

Primjenom Céaine leme dobivamo optimalnu ocjenu greške u normi $\| \cdot \|_S = \sqrt{a_S(\cdot, \cdot)}$:

$$\|u - u_h\|_S = \inf_{v \in V_h} \|u - v\|_S.$$

Optimalan prostor W_h je teško konstruirati, no kada ga i ne možemo eksplicitno konstruirati, on može posužiti kao mjera kvalitete aproksimativnog prostora W_h. U oznakama koje smo uveli imamo sljedeći rezultat.

Teorem 9.2 Neka je $W_h \subset V$ konačnodimenzionalan potprostor, iste dimenzije kao i V_h. Uvedimo broj $\Delta = \Delta(h)$,

$$\inf_{w \in W_h} \|v - R_S w\|_S \leq \Delta \|v\|_S, \quad \forall v \in V_h, \tag{9.21}$$

koji mjeri kako dobro $R_S W_h$ aproksimira V_h. Ako je $\Delta \in [0, 1)$, onda problem (9.19) ima jedinstveno rješenje $u_h \in V_h$ i vrijedi ocjena

$$\|u - u_h\|_S \leq (1 - \Delta^2)^{-1} \inf_{v \in V_h} \|u - v\|_S.$$

Dokaz. Egzistencija rješenja problema (9.19), u slučaju kad su dimenzije prostora V_h i W_h jednake, svodi se na njegovu jedinstvenost, jer se izborom nekih baza u ovim prostorima problem svodi na linearan sustav jednadžbi s kvadratnom matricom.

Pretpostavimo da problem (9.19) ima dva rješenja i da je $U_h \in V_h$ njihova razlika. Tada je

$$\forall w \in W_h, \quad 0 = a(U_h, w) = a_S(U_h, R_S w).$$

Stoga je za svako $w \in W_h$

$$\|U_h\|_S^2 = a_S(U_h, U_h) = a_S(U_h, U_h - R_S w) \leq \|U_h\|_S \|U_h - R_S w\|_S$$

što daje, prema definiciji broja Δ,

$$\|U_h\|_S \leq \inf_{w \in W_h} \|U_h - R_S w\|_S \leq \Delta \|U_h\|_S.$$

Kako je $\Delta < 1$, slijedi $U_h = 0$ i jedinstvenost je dokazana.

Da bismo dokazali ocjenu greške uvedimo oznaku u_h^* za rješenje problema (9.19) u kome je prostor W_h optimalan. Drugim riječima, ako je $R_S W_h^* = V_h$, onda definiramo $u_h^* \in V_h$ kao rješenje zadaće

$$\forall v \in W_h^*, \quad a(u_h^*, v) = \langle F, v \rangle.$$

Po Pitagorinom teoremu imamo

$$\|u - u_h\|_S^2 = \|u - u_h^*\|_S^2 + \|u_h^* - u_h\|_S^2. \tag{9.22}$$

Za prvi član na desnoj strani imamo

$$\|u - u_h^*\|_S = \inf_{v \in V_h} \|u - v\|_S.$$

Posljednji član možemo ocijeniti na ovaj način:

$$\|u_h^* - u_h\|_S^2 = a_S(u_h^* - u_h, u_h^* - u_h) = a_S(u - u_h, u_h^* - u_h)$$

jer je $a_S(u, v) = a_S(u_h^*, v)$ za svako $v \in V_h$. (Ista tvrdnja, naravno, ne vrijedi za u_h.) Sada koristeći (9.20) imamo za svako $w \in W_h$

$$\|u_h^* - u_h\|_S^2 = a_S(u - u_h, u_h^* - u_h - R_S w) \leq \|u - u_h\|_S \|u_h^* - u_h - R_S w\|_S.$$

Uzimajući infimum po svim $w \in W_h$ i primijenjujući (9.21) izlazi

$$\|u_h^* - u_h\|_S^2 \leq \Delta \|u - u_h\|_S \|u_h^* - u_h\|_S,$$

što konačno daje

$$\|u_h^* - u_h\|_S \leq \Delta \|u - u_h\|_S.$$

Koriteći tu ocjenu u (9.22) dobivamo traženu ocjenu. □

Konstrukcije raznih *upwind* test funkcija na bazi simetrizacije dane su u Mortonovoj knjizi [10] (vidi i [13]). Nedostatak ovih metoda je u složenosti test funkcija.

9.4 SUPG metoda

Vratimo se ponovo na problem modifikacije standardne metode konačnih elemenata i jednodimenzionalan primjer. U prethodnoj sekciji smo baznim funkcijama dodavali korekciju koja je bila kvadratni polinom i na taj način dobili konformnu Petrov-Galerkinovu aproksimaciju, koja se u jednoj dimenziji svodila na upwind shemu.

U ovoj sekciji korigiramo bazne funkcije s istom namjerom, ali će korekcija biti jednostavnija. Kao posljedicu nećemo više dobiti konformnu metodu konačnih elemenata.

Kao i ranije, neka su w_j po dijelovima afine globalne bazne funkcije na uniformnoj mreži $x_j = jh$, $j = 0, 1, \dots, N + 1$, $h = 1/(N + 1)$. Test funkcije ćemo uzimati u obliku

$$\phi_i(x) = w_i(x) + \beta_k b(x_{k+1/2}) w_i'(x), \quad \text{za } \ x \in [x_k, x_{k+1}].$$

Nosač nove test funkcije je ostao nepromijenjen. Kako funkcija ϕ_i nije neprekidna, ona ne pripada prostoru $H^1(0, 1)$. Stoga ćemo integral u bilinearnoj formi promatrati kao sumu integrala po pojedinim elementima. Uočimo da pri tome difuzijski dio sheme neće biti korigiran, budući da na svakom elementu (x_i, x_{i+1}) vrijedi $w_i'' = 0$. Jedan primjer test-funkcije je dan na Slici 9.6.

Aproksimacija zadaće (9.3) metodom konačnih elemenata sada dobiva oblik

$$u_h(x) = \sum_{j=1}^{N} w_j(x) u_j,$$

$$\sum_{j=1}^{N} u_j \sum_{k=0}^{N} \int_{x_k}^{x_{k+1}} (\varepsilon w_j'(x) w_i'(x) + b(x) w_j'(x)(w_i(x) + \beta_k b(x_{k+1/2}) w_i'(x)))\, dx \tag{9.23}$$
$$= \sum_{k=0}^{N} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)(w_i(x) + \beta_k b(x_{k+1/2}) w_i'(x))\, dx,$$

za $i = 1, 2, \dots, N$. Novi integral koje treba izračunati na lijevoj strani je

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^{N} u_j \sum_{k=0}^{N} \int_{x_k}^{x_{k+1}} b(x) w_j'(x) \beta_k b(x_{k+1/2}) w_i'(x)\, dx \\
&= \sum_{j=1}^{N} u_j \left(\int_{x_{i-1}}^{x_i} b(x) w_j'(x) \beta_{i-1} b(x_{i-1/2}) w_i'(x)\, dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}} b(x) w_j'(x) \beta_i b(x_{i+1/2}) w_i'(x)\, dx \right) \\
&\approx \sum_{j=1}^{N} u_j \left(\beta_{i-1} b(x_{i-1/2})^2 \int_{x_{i-1}}^{x_i} w_j'(x) w_i'(x)\, dx + \beta_i b(x_{i+1/2})^2 \int_{x_i}^{x_{i+1}} w_j'(x) w_i'(x)\, dx \right) \\
&= \beta_{i-1} b(x_{i-1/2})^2 (-u_{i-1} + u_i) \frac{1}{h} + \beta_i b(x_{i+1/2})^2 (u_i - u_{i+1}) \frac{1}{h}
\end{aligned}$$

Pogledajmo sada shemu koju dobivamo u slučaju konstantnih koeficijenata $b(x) = b_0$ i $f(x) = f_0$. U tom ćemo slučaju uzimati da je β konstanta (neovisna o k). Novi integral na desnoj strani jednak je nuli:

$$\sum_{k=0}^{N} \beta b_0 \int_{x_k}^{x_{k+1}} f_0 w_i'(x)\, dx = \beta b_0 f_0 \sum_{k=0}^{N} \int_{x_k}^{x_{k+1}} w_i'(x)\, dx = 0.$$

Novi član na lijevoj strani sada se može zapisati u obliku

$$\sum_{j=1}^{N} u_j \sum_{k=0}^{N} \int_{x_k}^{x_{k+1}} b(x) w_j'(x) \beta_k b(x_{k+1/2}) w_i'(x)\, dx = \beta b_0^2 \frac{-u_{i-1} + 2u_i - u_{i+1}}{h}.$$

Dakle, korekcija koju daje modifikacija test funkcija svodi se na dodavanje numeričke difuzije shemi. Pripadna shema konačnih diferencija ima oblik

$$(\varepsilon + \beta b_0^2) \frac{2u_j - u_{j-1} - u_{j+1}}{h^2} + b_0 \frac{u_{j+1} - u_{j-1}}{2h} = f_0, \quad j = 1, \ldots, N.$$

Stoga treba uzeti (vidi (9.14) i (9.12))

$$\beta b_0^2 = h b_0 (\alpha - \frac{1}{2}) = h b_0 (\frac{1}{2} \mathrm{cth} \frac{\gamma}{2} - \frac{1}{\gamma}) \quad \text{gdje je} \quad \gamma = \frac{b_0}{\varepsilon} h.$$

U slučaju nekonstantnih koeficijenata uzimamo neposrednu generalzaciju

$$\beta_k = \frac{h}{b(x_{k+1/2})} (\frac{1}{2} \mathrm{cth} \frac{\gamma_k}{2} - \frac{1}{\gamma_k}), \quad \gamma_k = \frac{b(x_{k+1/2})}{\varepsilon} h.$$

Pokažimo sada kako se ove ideje mogu generalizirati na višedimenzionalan slučaj. Radi određenosti promatrat ćemo jednadžbu

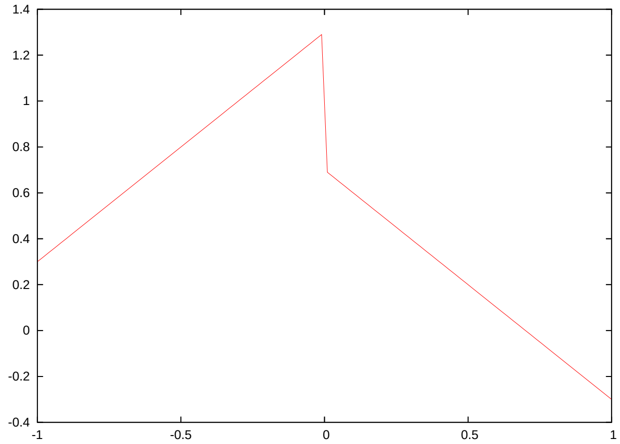
$$-\varepsilon \,\mathrm{div}(\mathbf{A}(x) \nabla u) + \mathbf{b}(x) \cdot \nabla u = f(x),$$

s homogenim Dirichletovim rubnim uvjetom. Ispred difuzijskog člana smo stavili mali parametar ε kako bismo naglasili da se radi o jednažbi s dominantnom konvekcijom. O polju brzine $\mathbf{b}$ pretpostavljamo, radi jednostavnosti, da vrijedi $\mathrm{div}\, \mathbf{b} = 0$; Tada se konvektivni član može pisati i u obliku $\mathrm{div}(\mathbf{b}(x) u)$.

Pretpostavit ćemo da je na nekoj triangulaciji $\mathcal{T}_h$, domene Ω, izgrađen konforman prostor konačnih elemenata $V_h \subset H_0^1(\Omega)$. Elemeti kanonske baze u tom prostoru neka su označeni, kao i obično, s w_i, $i = 1, 2, \ldots, N$.

Vidjeli smo u jednodimenzionalnom slučaju da je izmjena test funkcije imala za posljedicu povećanje numeričke difuzije, što stabilizira metodu. I u višedimenzionalnom slučaju želimo postići isti efekt dodajući bilinearnoj formi iz varijacijske formulacije član oblika

$$(\mathbf{b} \cdot \nabla u_h, \mathbf{b} \cdot \nabla w_i),$$



Slika 9.6: Test funkcija $w_i(x) + 0.3w_i'(x)$ za $h = 1$ i $x_i = 0$.

što je ekvivalentno dodavanju člana $\mathbf{b} \cdot \nabla w_i$ test-funkciji w_i pri računu konvektivnog člana.

Sličan efekt možemo postići izmjenom test funkcija. Umjesto da za test funkciju uzimamo element kanonske baze w_i, uzimat ćemo

$$\phi_i(x) = Mw_i(x) = w_i(x) + \rho\mathbf{b}(x) \cdot \nabla w_i(x), \tag{9.24}$$

gdje smo s M označili preslikavanje $w_i \mapsto \phi_i$. Parametar ρ često se bira po pravilu

$$\rho|\mathbf{b}|^2 = \max(|\mathbf{b}|h - \varepsilon, 0),$$

Budući da test funkcije ne pripadaju prostoru $H_0^1(\Omega)$, nećemo vršiti parcjalnu integaciju u onim članovma u kojim to nije moguće. Te dijelove bilinearne forme promatramo kao sume po svim elementima. Precizno, imamo za $u_h \in V_h$

$$\begin{aligned} a(u_h, \psi_i) = \varepsilon \int_\Omega \mathbf{A}(x) \nabla u_h \cdot \nabla w_i \, dx - \varepsilon \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K \operatorname{div}(\mathbf{A}(x) \nabla u_h)(\rho\mathbf{b} \cdot \nabla w_i) \, dx \\ + \int_\Omega (\mathbf{b} \cdot \nabla u_h)\psi_i \, dx. \end{aligned} \tag{9.25}$$

Metoda sad glasi: naći $u_h \in V_h$, takav da je

$$a(u_h, \psi_i) = \int_\Omega f\psi_i \, dx$$

za $i = 1, 2, \ldots, N$. Ta se metoda naziva SUPG metoda, što je kratica od *streamline upwind Petrov-Galerkin.*[3]

[3]Metoda se ponekad naziva *streamline diffusion method.*

Napomena. Modifikacija test funkcije članom $\mathbf{b}(x) \cdot \nabla w_i(x)$ može se motivirati i na sljedeći način. Pogledajmo problem stacionarne konvekcije

$$\mathbf{b}(x) \cdot \nabla u = f(x).$$

Tu jednadžbu možemo rješavati u V_h usmislu najmanjih kvadrata, tj. tražimo funkciju $u_h \in V_h$, takvu da je ($\|\cdot\|$ je L^2-norma)

$$\|\mathbf{b} \cdot \nabla u_h - f\| = \min_{v \in V_h} \|\mathbf{b} \cdot \nabla v - f\|.$$

Time dolazimo do varijacijske jednadžbe

$$\int_\Omega (\mathbf{b} \cdot \nabla u_h - f)(\mathbf{b} \cdot \nabla w_i)\, dx = 0,$$

za $i = 1, 2, \ldots, N$, gdje se kao test funkcija javlja naša korekcija $\mathbf{b} \cdot \nabla w_i$. □

Svojstvo SUPG metode ključno za analizu konvergencije dano je u sljedećoj lemi. Ona pokazuje kako modifikacija test funkcija povećava konstanu α iz ocjene koercitivnosti bilinearne forme. To dodavanje *artificijelne difuzije* je ključno za stabilnost metode.

Lema 9.1 Neka je preslikavanje $M\colon H^1(\Omega) \to L^2(\Omega)$ uvedeno formulom (9.24) i neka je bilinearna forma $a\colon V_h \times MV_h \to \mathbb{R}$ dana formulom (9.25). Pretpostavimo da prostor konačnih elemenata zadovoljava sljedeću inverznu ocjenu:

$$\int_K |\operatorname{div}(\mathbf{A}(x) \nabla v)|^2\, dx \leq C_{inv} h_K^{-2} \int_K \mathbf{A}(x) \nabla v \cdot \nabla v\, dx, \tag{9.26}$$

s nekom konstantom C_{inv}, na svakom elementu $K \in \mathcal{T}_h$, te neka je konstanta ρ izabrana tako da vrijedi

$$C_{inv}\rho|\mathbf{b}| \leq h_K \quad \text{kada je} \quad |\mathbf{b}|h_K > \varepsilon, \tag{9.27}$$

a nula je inače. Tada vrijedi ocjena

$$\forall v \in V_h, \quad a(v, Mv) \geq \frac{1}{2}\varepsilon \int_\Omega \mathbf{A} \nabla v \cdot \nabla v\, dx + \frac{1}{2} \int_\Omega \rho(\mathbf{b} \cdot \nabla v)^2\, dx.$$

Dokaz. Budući da je $\operatorname{div} \mathbf{b} = 0$, a rubni uvjet je homogeni Dirichletov, imamo

$$\begin{aligned}
\int_\Omega (\mathbf{b} \cdot \nabla v) Mv\, dx &= \frac{1}{2} \int_\Omega \mathbf{b} \cdot \nabla v^2\, dx + \int_\Omega \rho(\mathbf{b} \cdot \nabla v)^2\, dx \\
&= \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} \mathbf{b} \cdot \mathbf{n} v^2\, dx + \int_\Omega \rho(\mathbf{b} \cdot \nabla v)^2\, dx \\
&= \int_\Omega \rho(\mathbf{b} \cdot \nabla v)^2\, dx.
\end{aligned}$$

Schwartzova nejednakost i (9.26) daju

$$\begin{aligned}\int_K \operatorname{div}(\mathbf{A}(x)\,\nabla v)(\rho\mathbf{b}\cdot\nabla v)\,dx &\leq (\int_K |\operatorname{div}(\mathbf{A}(x)\,\nabla v)|^2\,dx)^{1/2}(\int_K (\rho\mathbf{b}\cdot\nabla v)^2\,dx)^{1/2}\\ &\leq C_{inv}^{1/2}h_K^{-1}(\int_K \mathbf{A}(x)\,\nabla v\cdot\nabla v\,dx)^{1/2}(\int_K (\rho\mathbf{b}\cdot\nabla v)^2\,dx)^{1/2}\\ &\leq \frac{1}{2}\int_K \mathbf{A}(x)\,\nabla v\cdot\nabla v\,dx + \frac{1}{2}C_{inv}h_K^{-2}\int_K (\rho\mathbf{b}\cdot\nabla v)^2\,dx,\end{aligned}$$

gdje smo iskoristili nejednakost $ab \leq (a^2+b^2)/2$. Time dobivamo

$$\begin{aligned}a(v,Mv) \geq \frac{1}{2}\varepsilon\int_\Omega \mathbf{A}\,\nabla v\cdot\nabla v\,dx &+ \int_\Omega \rho(\mathbf{b}\cdot\nabla v)^2\,dx\\ &- \frac{1}{2}C_{inv}\varepsilon\sum_{K\in\mathcal{T}_h} h_K^{-2}\rho\int_K \rho(\mathbf{b}\cdot\nabla v)^2\,dx.\end{aligned}$$

Negativan član ne postoji u slučaju $|\mathbf{b}|h_K \leq \varepsilon$; Stoga uzmimo da je $|\mathbf{b}|h_K > \varepsilon$. Tada, koristeći (9.27), dobivamo

$$C_{inv}\varepsilon h_K^{-2}\rho \leq C_{inv}|\mathbf{b}|h_K^{-1}\rho \leq 1,$$

i odatle slijedi ocjena. □

Inverzna ocjena koja je pretpostavljena u lemi može se dokazati za razne familije konačnih elemenata.

Daljnja analiza greške SUPG metode izložena je u [10] i [11].

Dodatak A

Diferencijalni operatori i jednadžbe

Domena u $\mathbb{R}^n$ je svaki otvoren i povezan skup. Kanonsku bazu u $\mathbb{R}^n$ označavamo s $(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)$. Skalarni produkt označavamo točkom $(\cdot)$, a normu s $|\cdot|$.

Parcijalne derivacije funkcije $u\colon \Omega \to \mathbb{R}$ označavamo s

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = \partial_i u(x) = u_{x_i}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} = \partial^2_{ij} u(x) = u_{x_i x_j}, \ldots$$

Za označavanje viših derivacija uvodimo pojam multiindeksa. Multiindeks je svaka n-torka $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, $\alpha_i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Duljina multiindksa je broj

$$|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n.$$

Govorimo još da je α multiindeks reda $|\alpha|$. Multiindeks koristimo na sljedeće načine.

$$\partial^\alpha u(x) = \frac{\partial^{|\alpha|} u(x)}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}};$$

$$x^\alpha = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_n^{\alpha_1}$$

$D^k u(x) = \{\partial^\alpha u(x) \colon |\alpha| = k\}$ je skup svik k-tih parcijalnih derivacija. Ukoliko među njih uvedemo neki poredak dobivamo vektor u $\mathbb{R}^{n^k}$.

Zadatak. Pokažite da je broj svih parcijalnih derivacija reda k jednak $\binom{n+k-1}{k}$. $\square$

Posebno imamo gradijent

$$Du(x) = (\partial_1 u(x), \ldots, \partial_n u(x)) = \nabla\, u(x);$$

i hesijan

$$D^2 u(x) = \begin{bmatrix} \partial^2_{11} u(x) & \cdots & \partial^2_{1n} u(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial^2_{n1} u(x) & \cdots & \partial^2_{nn} u(x) \end{bmatrix}.$$

Laplaceov operator:

$$\triangle u(x) = \operatorname{tr}(D^2 u(x)) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}.$$

Gradijent vektorske funkcije $\mathbf{u}\colon \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ je matrica

$$D\mathbf{u}(x) = \nabla \mathbf{u}(x) = \begin{bmatrix} \partial_1 u_1(x) & \cdots & \partial_n u_1(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial_1 u_n(x) & \cdots & \partial_n u_n(x) \end{bmatrix}.$$

U i-tom retku matrice nalazi se gradijent i-te komponente funkcije. Laplaceov operator vektorske funkcije definira se po komponentama:

$$\triangle \mathbf{u}(x) = (\triangle u_i(x)).$$

Divergencija vektorske funkcije:

$$\operatorname{div} \mathbf{u}(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u_i(x)}{\partial x_i}.$$

Posebno je

$$\triangle u(x) = \operatorname{div}(\nabla u(x)).$$

Rotacija vektorske funkcije u $\mathbb{R}^3$:

$$\operatorname{rot} \mathbf{u}(x) = \begin{bmatrix} \partial_2 u_3(x) - \partial_3 u_2(x) \\ \partial_3 u_1(x) - \partial_1 u_3(x) \\ \partial_1 u_2(x) - \partial_2 u_1(x) \end{bmatrix} = (\text{formalno}) = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ \partial_1 & \partial_2 & \partial_3 \\ u_1(x) & u_1(x) & u_3(x) \end{vmatrix}.$$

Zadatak. Neka je $\phi(x)$ skalarna glatka funkcija, a $\mathbf{u}(x)$ vektorska. Dokažite formulu

$$\operatorname{div}(\phi(x)\mathbf{u}(x)) = \phi(x) \operatorname{div} \mathbf{u}(x) + \nabla\phi(x) \cdot \mathbf{u}(x). \quad \square$$

Prostori neprekidnih funkcija

$$\begin{aligned}
C(\Omega) &= \{u\colon \Omega \to \mathbb{R}\colon u \ \text{ je neprekidna na } \Omega\}, \\
C^k(\Omega) &= \{u \in C(\Omega)\colon D^\alpha u \in C(\Omega) \ \text{ za sve } |\alpha| \le k\}, \quad k = 1, \ldots \\
C^0(\Omega) &= C(\Omega) \\
C(\overline{\Omega}) &= \{u\colon \Omega \to \mathbb{R}\colon u \ \text{ je uniformno neprekidna na } \Omega\}, \\
C^k(\overline{\Omega}) &= \{u \in C(\overline{\Omega})\colon D^\alpha u \in C(\overline{\Omega}) \ \text{ za sve } |\alpha| \le k\}, \quad k = 1, \ldots \\
C^0(\overline{\Omega}) &= C(\overline{\Omega}) \\
C^\infty(\Omega) &= \cap_{k=1}^\infty C^k(\Omega) \\
C^\infty(\overline{\Omega}) &= \cap_{k=1}^\infty C^k(\overline{\Omega}).
\end{aligned}$$

Nosač funkcije:

$$\text{supp} u = \overline{\{x \in \Omega \colon u(x) \neq 0\}}.$$

$$C_c^k(\Omega) = \{u \in C^k(\Omega) \colon u \text{ ima kompaktan nosač}\}$$

Prostor test-funkcija:

$$\mathcal{D}(\Omega) = C_c^\infty(\Omega) = \cap_{k=1}^\infty C_c^k(\Omega).$$

Definicija A.1 Parcijalna diferencijalna jednadžba (PDJ) je izraz oblika

$$F(D^k u(x), D^{k-1}u(x), \ldots, Du(x), u(x), x) = 0,$$

gdje je

$$F \colon \mathbb{R}^{n^k} \times \mathbb{R}^{n^{k-1}} \times \cdot \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \Omega \to \mathbb{R}$$

zadana funkcija, a $u \colon \Omega \to \mathbb{R}$ je nepoznata funkcija koju treba odrediti.

Linearna PDJ je oblika

$$\sum_{|\alpha| \leq k} a_\alpha(x) \partial^\alpha u = f(x).$$

Funkcije $a_\alpha(x)$ i $f(x)$ su zadani koeficijenti i desna strana. Ukoliko je $f \equiv 0$ kažemo da je jednadžba homogena, a inače je nehomogena.

Semilinearna PDJ je oblika

$$\sum_{|\alpha|=k} a_\alpha(x) \partial^\alpha u + a_0(D^{k-1}u(x), \ldots, Du(x), u(x), x) = 0.$$

Kvazilinearna PDJ je oblika

$$\sum_{|\alpha|=k} a_\alpha(D^{k-1}u(x), \ldots, Du(x), u(x), x) \partial^\alpha u + a_0(D^{k-1}u(x), \ldots, Du(x), u(x), x) = 0.$$

Primjeri:
Linearne:

$$\begin{aligned}
\triangle u = 0 &\quad \text{Laplaceova} \\
\triangle u + \lambda u = 0 &\quad \text{Helmholtzova} \\
u_t + \mathbf{b}(x) \cdot \nabla u = 0 &\quad \text{transportna} \\
u_t - \triangle u = 0 &\quad \text{jednadžba provođenja} \\
i u_t + \triangle u = 0 &\quad \text{Schrödingerova} \\
u_{tt} - \triangle u = 0 &\quad \text{valna jednadžba} \\
u_t + u_{xxx} = 0 &\quad \text{Airyjeva.}
\end{aligned}$$

Nelinearne:

$$
\begin{aligned}
-\triangle u = f(u) &\quad \text{nelinearna Poissonova} \\
\operatorname{div}\left(|Du|^{p-2}Du\right) = 0 &\quad p-\text{Laplaceova} \\
\operatorname{div}\left(\frac{Du}{\sqrt{1+|Du|^2}}\right) = 0 &\quad \text{jednadžba minimalne plohe} \\
u_t + \operatorname{div}\mathbf{F}(u) = 0 &\quad \text{skalarni zakon sačuvanja.}
\end{aligned}
$$

Sustavi:

$$\mathbf{u}_t + \operatorname{div}\mathbf{F}(\mathbf{u}) = 0 \quad \text{zakon sačuvanja.}$$

$$\begin{cases} \mathbf{u}_t + (\nabla\mathbf{u})\mathbf{u} = \triangle\mathbf{u} - \nabla p & \text{Navier-Stokesove jednadžbe} \\ \operatorname{div}\mathbf{u} = 0 \end{cases}$$

$$\mu \triangle \mathbf{u} + (\lambda+\mu)\nabla(\operatorname{div}\mathbf{u}) = 0 \quad \text{jed. linearne elastičnosti}$$

$$\begin{cases} \mathbf{E}_t = \operatorname{rot}\mathbf{B} & \text{Maxwellove jednadžbe} \\ \mathbf{B}_t = -\operatorname{rot}\mathbf{E} \\ \operatorname{div}\mathbf{E} = \operatorname{div}\mathbf{B} = 0 \end{cases}$$

Klasifikacija linearnih PDJ drugog reda. To su jednadžbe oblika

$$-\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x)u = f(x). \tag{A.1}$$

Klasifikacija ovisi o matrici koeficijenata uz najviše derivacije:

$$\mathbf{A}(x) = (a_{ij}(x)),$$

i o vektoru $\mathbf{b}(x) = (b_i(x))$. Za tu se matricu uvijek pretpostavlja da je simetrična u svakoj točki domene budući da za glatke funkcije možemo slobodno mijenjati poredak parcijalnih derivacija. Stoga ona ima samo realne svojstvene vrijednosti.

Definicija A.2

- Jednadžba (A.1) je eliptička u točki x ako je matrica $\mathbf{A}(x)$ pozitivno definitna;
- Jednadžba (A.1) je hiperbolička u točki x ako matrica $\mathbf{A}(x)$ ima jednu strogo negativnu i $n-1$ strogo pozitivnih svojstvenih vrijednosti;
- Jednadžba (A.1) je parabolička u točki x ako je matrica $\mathbf{A}(x)$ pozitivno semidefinitna, ali ne i pozitivno definitna, i rang proširene matrice $(\mathbf{A}(x), \mathbf{b}(x))$ je jednak n.

Primjeri.

$$
\begin{aligned}
- \triangle u &= f(x) && \text{eliptička} \\
u_{tt} - \triangle u &= f(x) && \text{hiperbolička} \\
u_t - \triangle u &= f(x) && \text{parabolička.}
\end{aligned}
$$

Kvazilinearne i semilinearne jednadžbe klasificiraju se analogno s time da nelinearne jednadžbe mogu biti različitog tipa na različitim rješenjima.

Teorem o divergenciji. Za dovoljno regularno područje $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ i dovoljno glatku vektorsku funkciju $\mathbf{F} \colon \Omega \to \mathbb{R}^n$ vrijedi

$$
\int_\Omega \operatorname{div} \mathbf{F}(x)\, dx = \int_{\partial\Omega} \mathbf{F}(x) \cdot \mathbf{n}(x) dS
$$

gdje je $\mathbf{n}$ polje jedinične vanjske normale na $\partial\Omega$. Posebno je

$$
\int_\Omega \triangle u(x)\, dx = \int_{\partial\Omega} \nabla u(x) \cdot \mathbf{n}(x) dS.
$$

Pišemo

$$
\frac{\partial u(x)}{\partial \mathbf{n}} = \nabla u(x) \cdot \mathbf{n}(x).
$$

Za linearnu PDJ-u drugog reda kažemo da je u divergentnoj formi ako se može zapisati u obliku

$$
-\sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\sum_{j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) + \sum_{i=1}^n b_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x) u = f(x).
$$

Takvu jednadžbu češće pišemo u vektorskoj notaciji

$$
-\operatorname{div} (\mathbf{A}(x) \nabla u) + \mathbf{b}(x) \cdot \nabla u + c(x) u = f(x).
$$

Ako su koeficijenti a_{ij} dovoljno glatki, onda se jednadžba može iz nedivergentnog oblika prebaciti u divergentni i obratno. Pri tome se matrica $\mathbf{A}$ ne mijenja.

Rubne zadaće za PDJ. Za različite tipove PDJ-bi zadaju se različiti uvjeti na granici domene. Evo nekoliko primjera.

$$
\begin{aligned}
- \triangle u &= f \quad x \in \Omega \qquad \text{Dirichletova zadaća} \\
u &= u_0 \quad x \in \partial\Omega
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
- \triangle u &= f \quad x \in \Omega \qquad \text{Neumannova zadaća} \\
\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} &= g \quad x \in \partial\Omega
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned} u_t - \triangle u &= f \quad x \in \Omega,\ t > 0 \\ u &= u_0 \quad x \in \partial\Omega,\ t > 0 \quad \text{rubni uvjet} \\ u|_{t=0} &= v_0 \quad x \in \Omega \quad \text{početni uvjet} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_{tt} - \triangle u &= f \quad x \in \Omega,\ t > 0 \\ u &= u_0 \quad x \in \partial\Omega,\ t > 0 \quad \text{rubni uvjet} \\ u|_{t=0} &= v_0 \quad x \in \Omega \quad \text{1. početni uvjet} \\ u_t|_{t=0} &= v_1 \quad x \in \Omega \quad \text{2. početni uvjet} \end{aligned}$$

U ovim primjerima f, g, u_0, v_0 i v_1 su zadani podaci, a u je nepoznanica.

Rubni i početni uvjeti za diferencijalnu jednadžbu određeni su fizikalnim smislom promatranog problema. S matematičke strane oni moraju biti odabrani tako da je zadaća korektno postavljena u smislu ove definicije:

Definicija A.3 (Hadamard) Rubna zadaća za PDJ je dobro postavljena (korektna) ako ima jedinstveno rješenje koje neprekidno ovisi o zadanim podacima.

Dodatak B

Funkcionalna analiza

B.1 Normirani i Banchovi prostori

Definicija B.1 Neka je X vektorski prostor nad $\mathbb{K}$ ($\mathbb{R}$ ili $\mathbb{C}$). Funkcija $x \mapsto \|x\|$, sa X u realne brojeve, je norma na X ukoliko zadovoljava sljedeće uvjete za sve $x, y \in X$ i sve $\alpha \in \mathbb{K}$:

(N1) $\|x\| \geq 0$;

(N2) $\|x\| = 0$ ako i samo ako je $x = 0$;

(N3) $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$;

(N4) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (nejednakost trokuta).

Uređeni par $(X, \|\cdot\|)$ vektorskog prostora X i norme na njemu $\|\cdot\|$ naziva se normirani vektorski prostor.

Definicija B.2 Neka je X vektorski prostor te $\|\cdot\|$ i $|||\cdot|||$ dvije norme na X. Kažemo da si norme $\|\cdot\|$ i $|||\cdot|||$ ekvivalentne ako postoje konstante $C_1, C_2 > 0$ takve da za svako $x \in X$ vrijedi

$$C_1\|x\| \leq |||x||| \leq C_2\|x\|.$$

Ekvivalencija normi je prava relacija ekvivalencije.

(Generalizirana nejednakost trokuta) U normiranom prostoru X za svako $x, y \in X$ vrijedi

$$|\,\|x\| - \|y\|\,| \leq \|x \pm y\| \leq \|x\| + \|y\|.$$

Ako je $x \mapsto \|x\|$ norma na vektorskom prostoru X, onda je

$$d(x, y) = \|x - y\|$$

metrika na X. Drugim riječima svaki normirani prostor je i metrički prostor. Lako se provjeravaju sva svojstva metrike:

(M1) $d(x, y) \geq 0$;

(M2) $d(x, y) = 0$ ako i samo ako je $x = y$;

(M3) $d(x, y) = d(y, x)$;

(M4) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ (nejednakost trokuta). $\square$

Definicija B.3 Niz (u_n) normiranog prostora X je Cauchyjev ako za svako $\varepsilon > 0$ postoji $n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ takav da je

$$\|u_n - u_m\| < \varepsilon \text{ za sve } n, m \geq n_0(\varepsilon).$$

U normiranom prostoru svaki konvergentan niz je Cauchyjev. Obrat ne mora vrijediti.

Definicija B.4 Banachov prostor je potpuni normirani prostor. To je dakle normirani prostor u kojem je svaki Cauchyjev niz konvergentan.

B.2 Neprekidni linearni operatori

Definicija B.5 Neka su X i Y linearni prostori nad poljem $\mathbb{K}$. Operator $A\colon L \subset X \to Y$ je linearan ako je L linearan potprostor od X i ako vrijedi

$$A(\alpha u + \beta v) = \alpha A u + \beta A v \quad \forall u, v \in L,\ \alpha, \beta \in \mathbb{K}.$$

Lema B.1 Neka su X i Y normirani prostori i $A\colon X \to Y$ linearan operator. Ekvivalentno je

(i) A je neprekidan;

(ii) Postoji $C > 0$ takvo da je $\|Au\| \leq C\|u\|$ za sve $u \in X$.

Neka je $A\colon X \to Y$ linearan i neprekidan operator. Operatorska norma operatora A je dana formulom

$$\|A\| = \sup_{\|v\| \leq 1} \|Av\|.$$

Preslikavanje $A \mapsto \|A\|$ ima svojstva norme te da vrijedi:

$$\|Av\| \leq \|A\|\|v\| \quad \forall v \in X,$$

$$\|A\| = \sup_{\|v\|=1} \|Av\| = \sup_{v \neq 0} \frac{\|Av\|}{\|v\|}.$$

Lema B.2 Neka je X normiran prostor nad $\mathbb{K}$, a Y Banachov prostor nad $\mathbb{K}$. Označimo s $L(X, Y)$ skup svih linearnih i neprekidnih operatora

$$A\colon X \to Y.$$

Tada je $L(X, Y)$ Banachov prostor nad $\mathbb{K}$ s operatorskom normom $\|A\|$.

B.3 Dualni prostor

Definicija B.6 Neka je X normirani prostor nad poljem $\mathbb{K}$. Linearan i neprekidan funkcional nad X je svako linearno i neprekidno preslikavanje

$$f\colon X \to \mathbb{K}.$$

Skup svih linearnih i neprekidnih funkcionala nad X naziva se dualni prostor i označava X'.

Očito je $X' = L(X, \mathbb{K})$. Stoga je X' linearan normiran prostor s operatorskom normom

$$\|f\| = \sup_{\|u\| \leq 1} |f(u)|.$$

Štoviše, budući da je $\mathbb{K}$ potpun on je Banachov prostor.

Koristimo oznaku $\langle f, u\rangle = f(u)$. Imamo

$$|\langle f, u\rangle| \leq \|f\| \|u\| \quad \forall u \in X,\ \forall f \in X'.$$

Definicija B.7 Za niz (u_n) iz normiranog prostora X kažemo da slabo konvergira prema $u \in X$ ako za svako $f \in X'$ vrijedi

$$\langle f, u_n\rangle \to \langle f, u\rangle \quad \text{kada } n \to \infty.$$

Uočimo da jaka konvergencija (konvergencija po normi) uvijek povlači slabu.

Lema B.3 Neka je X Banchov prostor i (u_n) niz u X koji slabo konvergira prema $u \in X$. Tada je niz (u_n) ograničen u X i vrijedi

$$\|u\|_X \leq \liminf \|u_n\|_X.$$

Nadalje, ako je (f_n) niz iz X', koji jako konvergira prema $f \in X'$, tada

$$\langle f_n, u_n\rangle \to \langle f, u\rangle \quad \text{kada } n \to \infty.$$

Analogan koncept u dualnom prostoru je slaba* konvergencija.

Definicija B.8 neka je niz (f_n) iz topološkog duala X', normiranog prostora X. Kažemo da niz (f_n) slabo* konvergira prema $f \in X'$ ako za svako $u \in X$ vrijedi

$$\langle f_n, u\rangle \to \langle f, u\rangle \quad \text{kada } n \to \infty.$$

Jako konvergentan niz funkcionala je i slabo* konvergentan.

Lema B.4 Neka je X Banchov prostor i (f_n) niz u X' koji slabo* konvergira prema $f \in X'$. Tada je niz (f_n) ograničen u X' i vrijedi

$$\|f\|_{X'} \leq \liminf \|f_n\|_{X'}.$$

Nadalje, ako je (u_n) niz iz X, koji jako konvergira prema $u \in X$, tada

$$\langle f_n, u_n\rangle \to \langle f, u\rangle \quad \text{kada } n \to \infty.$$

B.4 Unitaran i Hilbertov prostor

Kao i do sada $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ili $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Ako je z kompleksan broj, onda je $\overline{z}$ njemu kompleksno konjugiran broj. Ako je pak $z \in \mathbb{R}$ onda je $\overline{z} = z$. Realni i imaginarni dio kompleksnog broja z označavamo s $\mathrm{Re}(z)$ i $\mathrm{Im}(z)$.

Definicija B.9 Neka je X vektorski prostor nad poljem $\mathbb{K}$. Skalarni produkt na X je preslikavanje koje svakom paru (u, v), $u, v \in X$ pridružuje broj

$$(u, v) \in \mathbb{K}$$

takav da za svako $u, v, w \in X$ i svako $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ vrijedi:

(i) $(u, u) \geq 0$ i $(u, u) = 0$ ako i samo ako je $u = 0$;

(ii) $(\alpha u + \beta v, w) = \alpha(u, w) + \beta(v, w)$;

(iii) $\overline{(u, v)} = (v, u)$.

Uočimo da je skalarni produkt linearan u prvom argumentu, a antilinearan u drugom. To znači da je za svako $u, v, w \in X$ i svako $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$

$$(w, \alpha u + \beta v) = \overline{\alpha}(w, u) + \overline{\beta}(w, v).$$

Dva elementa $u, v \in X$ su *ortogonalna* ako je

$$(u, v) = 0.$$

Lema B.5 (Schwartzova nejednakost) Neka je X unitaran prostor. Tada za svako $u, v \in X$ vrijedi

$$|(u, v)| \leq (u, u)^{1/2}(v, v)^{1/2}.$$

Dokaz. Za $v \neq 0$ imamo

$$\begin{aligned} 0 \leq (u - \alpha v, u - \alpha v) &= (u, u) - \alpha(v, u) - \overline{\alpha}(u, v) + |\alpha|^2(v, v) \\ &= (u, u) - \alpha(v, u) - \overline{\alpha}[(u, v) - \alpha(v, v)]. \end{aligned}$$

Uzmimo sada $\alpha = (u, v)/(v, v)$. Izlazi

$$0 \leq (u, u) - \frac{(u, v)(v, u)}{(v, v)} = (u, u) - \frac{|(u, v)|^2}{(v, v)}.$$

Za $v = 0$ nejednakost je trivijalno ispunjena. $\square$

U konačnodimenzionalnom slučaju Schwartzova nejednakost daje

$$\left|\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n} y_i^2}.$$

Svaki unitaran prostor X nad poljem $\mathbb{K}$ je normiran prostor nad $\mathbb{K}$ s normom

$$\|u\| = (u, u)^{1/2}.$$

Za ovu normu kažemo da je inducirana skalarnim produktom.

Lema B.6 Neka je X unitaran prostor. Tada vrijedi

(i) Skalarni produkt je neprekidan;

(ii) Ako je $M \subset X$ gust podskup i ako je

$$(u, v) = 0 \quad \forall v \in M$$

onda je $u = 0$.

Definicija B.10 Hilbertov prostor je unitaran prostor koji je potpun u odnosu na normu induciranu skalarnim produktom.

U Hilbertovom prostoru je svaki Cauchyjev niz u normi induciranoj skalarnim produktom konvergentan.

B.5 Refleksivni prostori

Neka je X Banachov prostor i X' njegov dual. Kako je X' Banachov prostor možemo konstrirati njegov dualni prostor. Taj se prostor označava s X'' i zove bidual prostora X. Normu u X'' uvodimo na isti način kao u X', tj. uzimamo za $\xi \in X''$

$$\|\xi\|_{X''} = \sup\{|\langle \xi, f\rangle| \colon f \in X',\ \|f\|_{X'} \leq 1\}.$$

Preslikavanje $J\colon X \to X''$, definirano formulom

$$\langle Jx, f\rangle = \langle f, x\rangle$$

nazivamo kanonskom injekcijom. Ono je linearna izometrija, tj. vrijedi

$$\|Jx\|_{X''} = \|x\|_X$$

za sve $x \in X$. OPćenito nije surjektivno.

Definicija B.11 Banachov prostor X je refleksivan ako je $J(X) = X''$.

Po Rieszovom teoremu reprezentacije, svaki Hilbertov prostor je refleksivan Banachov prostor.

Teorem B.1 Neka je X refleksivan Banachov prostor. Svaki ograničeni niz u X ima slabo konvergentan podniz.

B.6 Bilinearne forme

Definicija B.12 Neka je X normirani prostor. Ograničena bilinearna forma na X je funkcija

$$a\colon X \times X \to \mathbb{K}$$

koja ima ova svojstva:

(i) Bilinearnost: Za sve $u, v, w \in X$ i $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ vrijedi

$$a(\alpha u+\beta v, w) = \alpha a(u, w)+\beta a(v, w), \quad a(w, \alpha u+\beta v) = \alpha a(w, u)+\beta a(w, v).$$

(ii) Ograničenost. Postoji konstanta $M > 0$ takva da je

$$|a(u, v)| \leq M\|u\|\|v\| \quad \forall u, v \in X.$$

Forma $a(\cdot, \cdot)$ je simetrična ako vrijedi

$$a(u, v) = a(v, u) \quad \forall u, v \in X.$$

Forma $a(\cdot, \cdot)$ je pozitivna ako vrijedi

$$a(u, u) \geq 0 \quad \forall u \in X.$$

Forma $a(\cdot, \cdot)$ je strogo pozitivna ako postoji konstanta $\alpha > 0$ takva da je

$$a(u, u) \geq \alpha\|u\|^2 \quad \forall u \in X.$$

B.7 Rieszov teorem o reprezentaciji funkcionala

Zadan je Hilbertov prostor X i njegov zatvoren, linearan potprostor M. Postavljemo si problem naći za zadano $u \in X$ element $v \in M$ za koji je

$$\|u - v\| = \min_{w\in M} \|u - w\|. \tag{B.1}$$

Radi se o problemu nalaženja *ortogonalne projekcije* točke u na ravninu M.
S tim u vezi uvodimo *ortogonalni komplement* skupa M

$$M^{\perp} = \{w \in X\colon (w, v) = 0 \quad \forall v \in M\}.$$

Uočimo da je $M^{\perp}$ linearan potprostor od X.

Teorem B.2 Problem minimizacije ima jedinstveno rješenje $v \in M$ i vrijedi $u - v \in M^{\perp}$.

Posljedica B.1 Zadan je Hilbertov prostor X i njegov zatvoren linearan potprostor M. Tada svako $u \in X$ ima jedinstvenu dekompoziciju oblika

$$u = v + w, \quad v \in M, w \in M^\perp.$$

Sada je evidentno da ako je $M \subset X$ zatvoren potprostor Hilbertovog prostora X i $M^\perp = \{0\}$, onda je $M = X$.

Teorem B.3 (Rieszov teorem) Neka je X Hilbertov prostor nad poljem $\mathbb{K}$ i X' njegov dualni prostor.

Tada je $f \in X'$ onda i samo onda ako postoji $v \in X$ za koji je

$$f(u) = (u, v) \quad \text{za svako} \quad u \in X.$$

Element v određen je na jedinstven način funkcionalom f i vrijedi

$$\|f\| = \|v\|.$$

Dodatak C

Prostori Soboljeva

C.1 L^p prostori

Pretpostavljamo da je $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ otvoren skup opskrbljen Lebesgueovom mjerom naslijeđenom s $\mathbb{R}^n$. Za dvije funkcije $f, g \colon \Omega \to \mathbb{R}$ kažemo da su jednake skoro svuda i pišemo

$$f = g \quad \text{s.s.}$$

ako postoji skup $A \subset \Omega$ Lebesgueove mjere jednake nuli, takav da je

$$\forall x \in \Omega \backslash A, \quad f(x) = g(x).$$

Svake takve dvije funkcije smatrat ćemo jednakim.

Definicija C.1 Za $p \in \mathbb{R}$, $1 \leq p < \infty$ definiramo

$$L^p(\Omega) = \{f \colon \Omega \to \mathbb{R} \colon f \text{ je izmjeriva i } \int_\Omega |f(x)|^p \, dx < \infty\}.$$

Uvodimo oznaku

$$\|f\|_{L^p} = \left[\int_\Omega |f(x)|^p \, dx\right]^{1/p}.$$

Definicija C.2

$$L^\infty(\Omega) = \{f \colon \Omega \to \mathbb{R} \colon f \text{ je izmjeriva i } \exists \text{ konstanta } C \text{ tdj. } |f(x)| \leq C \text{ s.s.}\}.$$

Uvodimo oznaku

$$\|f\|_{L^\infty} = \inf\{C \colon |f(x)| \leq C \text{ s.s.}\}.$$

Uvijek imamo

$$|f(x)| \leq \|f\|_{L^\infty} \text{ s.s.}$$

Za funkciju kažemo da je lokalno integrabilna na Ω ako je integrabilna na svakom kompaktnom podskupu od Ω. Prostor svih lokalno integrabilnih funkcija označavamo $L^1_{\text{loc}}(\Omega)$.

Neka je $1 \leq p \leq \infty$. Konjugirani indeks p' definiran je relacijom

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1.$$

Za $p = \infty$ imamo $p' = 1$ i obratno.

Youngova nejednakost: Neka su $a, b \geq 0$ i $1 < p < \infty$. Tada je

$$ab \leq \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{p'}a^{p'}.$$

Hölderova nejednakost. Ako je $f \in L^p(\Omega)$ i $g \in L^{p'}(\Omega)$, onda je $fg \in L^1(\Omega)$ i vrijedi

$$\int_\Omega |f(x)g(x)|\,dx \leq \|f\|_p \|g\|_{p'}.$$

Nejednakost Minkowskog. Za svako $1 \leq p \leq \infty$ vrijedi

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$$

pa se lako vidi da je $\|f\|_p$ norma na $L^p(\Omega)$ za $1 \leq p \leq \infty$. Ovi prostori imaju sljedeća svojstva:

- Prostor $L^p(\Omega)$ je Banachov za $1 \leq p \leq \infty$;
- Prostor $L^p(\Omega)$ je separabilan za $1 \leq p < \infty$;
- Prostor $\mathcal{D}(\Omega)$ je gust u $L^p(\Omega)$ za $1 \leq p < \infty$.
- Prostor $L^p(\Omega)$ je refleksivan za $1 < p < \infty$;
- Prostor $L^2(\Omega)$ je Hilbertov sa skalarnim produktom

$$(f, g)_{L^2} = \int_\Omega f(x)g(x)\,dx.$$

Napomena. U slučaju kada želimo naglasiti domenu, koristit ćemo oznaku za normu $\|f\|_{p;\Omega}$. $\square$

Sljedeće dvije leme govore o funkcijama iz L^∞ prostora.

Lema C.1 Neka je domena Ω ograničena (ili samo konačne mjere). Tada za svako $u \in L^\infty(\Omega)$ vrijedi

$$\|u\|_\infty = \lim_{p\to\infty} \|u\|_p.$$

Lema C.2 Neka je domena Ω ograničena (ili samo konačne mjere). Ako je

$$u \in \cap_{p=1}^\infty L^p(\Omega) \quad \text{i} \quad \sup_{p\in\mathbb{N}} \|u\|_p < \infty,$$

onda je $u \in L^\infty(\Omega)$.

C.2 Distribucije

Distribucije su neprekidni linearni funkcionali nad prostorom $\mathcal{D}(\Omega)$. Da bismo mogli definirati neprekidnost funkcionala moramo imati topologiju na skupu $\mathcal{D}(\Omega)$. Umjesto da definiramo otvorene skupove u $\mathcal{D}(\Omega)$, mi ćemo definirati konvergenciju. Na taj se način implicitno definira topologija, odnosno, kažemo da je time definirana pseudo-topologija na $\mathcal{D}(\Omega)$.

Niz (ϕ_n) u $\mathcal{D}(\Omega)$ konvergira prema $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$ ako vrijedi sljedeće:

1. Nosači funkcija ϕ_n ostaju u jednom fiksiranom kompaktnom skupu $K \subset \Omega$;

2. Za svaki multiindeks α, $\partial^\alpha \phi_n$ konvergira prema $\partial^\alpha \phi$, uniformno na K;

Neka je T linearan funkcional na $\mathcal{D}(\Omega)$. Djelovanje funkcionala T na funkciji $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$ označavamo s $\langle T, \phi\rangle$. Za funkcional T kažemo da je neprekidan ako za svaki niz (ϕ_n) koji konvergira prema $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$ virjedi $\langle T, \phi_n\rangle \to \langle T, \phi\rangle$. Skup svih neprekidnih linearnih funkcionala nad $\mathcal{D}(\Omega)$ označavamo $\mathcal{D}'(\Omega)$, elemente $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ nazivamo distribucijama, a funkcije $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$ zovemo test-funkcijama.

Pseudo-topologiju na $\mathcal{D}'(\Omega)$ definiramo na sljedeći način: Niz distribucija (T_n) konvergira prema $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ ako za svaku test funkciju $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$ vrijedi $\langle T_n, \phi\rangle \to \langle T, \phi\rangle$.

Diracova delta funkcija. Neka je $a \in \Omega$. Diracova delta funkcija ili Diracova masa δ_a definira se kao distribucija

$$\forall \phi \in \mathcal{D}(\Omega), \quad \langle \delta_a, \phi\rangle = \phi(a).$$

Svakoj lokalno integrabilnoj funkciji $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ pridružujemo distribuciju $T_f \in \mathcal{D}'(\Omega)$ po formuli

$$\langle T_f, \phi\rangle = \int_\Omega f(x)\phi(x)\,dx.$$

Time je $L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ uloženo u $\mathcal{D}'(\Omega)$, a ulaganje $f \mapsto T_f$ nazivamo kanonsko ulaganje. Injektivnost ulaganja slijedi iz gustoće $\mathcal{D}(\Omega)$ u $L^1(\Omega)$. Posebno je, na ovaj način, svaki je $L^p(\Omega)$ prostor, za $1 \le p < \infty$ uložen u $\mathcal{D}'(\Omega)$. Kanonsko ulaganje je pri tome neprekidno.

Deriviranje u smislu distribucija. Ako je $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$, onda definiramo $\frac{\partial T}{\partial x_i}$ kao funkcional

$$\forall \phi \in \mathcal{D}(\Omega), \quad \langle \frac{\partial T}{\partial x_i}, \phi\rangle = -\langle T, \frac{\partial \phi}{\partial x_i}\rangle.$$

Budući da je

$$\phi \mapsto -\langle T, \frac{\partial \phi}{\partial x_i}\rangle$$

linearan i neprekidan funkcional na $\mathcal{D}(\Omega)$, derivacija distribucije je ponovo distribucija. Nadalje, lako se vidi da ako je $T = T_f$ za neku glatku funkciju f, onda je

$$\frac{\partial T_f}{\partial x_i} = T_{\frac{\partial f}{\partial x_i}} \quad \text{u } \mathcal{D}'(\Omega),$$

tj. klasična derivacija i derivacija u smislu distribucija se podudaraju. Zaista, imamo

$$\forall \phi \in \mathcal{D}(\Omega), \quad \langle \frac{\partial T_f}{\partial x_i}, \phi \rangle = -\langle T_f, \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \rangle = -\int_\Omega f(x) \frac{\partial \phi(x)}{\partial x_i}\, dx.$$

$$\forall \phi \in \mathcal{D}(\Omega), \quad \langle T_{\frac{\partial f}{\partial x_i}}, \phi \rangle = \int_\Omega \frac{\partial f(x)}{\partial x_i} \phi(x)\, dx = -\int_\Omega f(x) \frac{\partial \phi}{\partial x_i}\, dx.$$

Time je jednakost distribucija pokazana.

Na analogan način možemo definirati proizvoljnu parcijalnu derivaciju distribucije. Za bilo koji multiindeks α i $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ definiramo $\partial^\alpha T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ formulom

$$\langle \partial^\alpha T, \phi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle T, \partial^\alpha \phi \rangle.$$

Lako se provjerava da je to ponovo jedna distribucija i da je preslikavanje $T \mapsto \partial^\alpha T$ neprekidno sa $\mathcal{D}'(\Omega)$ u $\mathcal{D}'(\Omega)$.

Primjer: Heavisideova funkcija.

$$H(x) = \begin{cases} 1 & \text{za } x > 0 \\ 0 & \text{za } x < 0 \end{cases}.$$

$$\forall \phi \in \mathcal{D}(\Omega), \quad \langle \frac{dT_H}{dx}, \phi \rangle = -\int_{\mathbb{R}} H(x) \frac{d\phi(x)}{dx}\, dx = -\int_0^\infty \frac{d\phi(x)}{dx}\, dx = \phi(0).$$

Izlazi

$$\frac{dT_H}{dx} = \delta_0.$$

(Derivacija je Diracova masa u nuli.)

Primjer: Po dijelovima glatka funkcija. Zadana je funkcija f definirana na $\mathbb{R}$ koja ima neprekidnu derivaciju na $\mathbb{R} \setminus \cup_{j=1}^k \{x_j\}$. U točkama x_j funkcija ima prekide prve vrste. Stavimo $s_j = f(x_j + 0) - f(x_j - 0)$. Tada je

$$\frac{dT_f}{dx} = T_{\frac{df}{dx}} + \sum_{j=1}^k s_j \delta_{x_j}.$$

C.3 $W^{1,p}$ prostori

Distribucijsku derivaciju ćemo nadalje označavati isto kao i klasičnu derivaciju. Svaka funkcija iz L^p prostora ima derivaciju ako ju razumijemo u smislu distribucija. Od posebnog su interesa one funkcije čija je distribucijska derivacija ponovo funkcija.

Za $1 \le p \le \infty$ definiramo

$$W^{1,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega) \colon \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^p(\Omega),\ 1 \le i \le n\}.$$

Derivacija $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ se uzima u smislu distribucija. Zahtijev da je $\frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^p(\Omega)$ znači da postoji funkcija $v \in L^p(\Omega)$ takva da je

$$\forall \phi \in \mathcal{D}(\Omega), \quad \langle \frac{\partial u}{\partial x_i}, \phi \rangle = -\int_\Omega u(x) \frac{\partial \phi}{\partial x_i}(x)\, dx = \int_\Omega v(x)\phi(x)\, dx.$$

Kao što smo već spomenuli distribucijsku derivaciju ćemo označavati isto kao i klasičnu, pa ćemo za $v(x)$ pisati $\frac{\partial u}{\partial x_i}(x)$, podrazumijevajući da se radi o distribucijskoj derivaciji koja se nalazi u nekom L^p prostoru. Za takvu derivaciju se često koristi i termin slaba derivacija.

Prostor $W^{1,p}(\Omega)$ je očito linearan. Za $1 \leq p < \infty$ normu u njemu definiramo formulom

$$\|u\|_{1,p} = \left(\int_\Omega |u(x)|^p\, dx + \sum_{i=1}^n \int_\Omega |\frac{\partial u}{\partial x_i}(x)|^p\, dx \right)^{1/p}.$$

Za $p = \infty$ imamo

$$\|u\|_{1,\infty} = \max(\|u\|_\infty, \max_{1 \leq i \leq n} \|\frac{\partial u}{\partial x_i}\|_\infty).$$

Istaknuto mjesto ima slučaj $p = 2$, pa stoga taj prostor imamo posebnu oznaku

$$W^{1,2}(\Omega) = H^1(\Omega).$$

U taj prostor može se uvesti skalarni produkt formulom

$$(u, v)_1 = \int_\Omega u(x)v(x)\, dx + \sum_{i=1}^n \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) \frac{\partial v}{\partial x_i}(x)\, dx.$$

Prostore $W^{1,p}(\Omega)$ nazivamo prostorima Soboljeva prvog reda. Posve analogno se definiraju prostori Soboljeva višeg reda ($m = 1, 2, 3, \ldots$).

$$W^{m,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega) \colon \partial^\alpha u \in L^p(\Omega), \text{ za sve } |\alpha| \leq m\}.$$

Normu definiramo na sljedeći način: Za $1 \leq p < \infty$,

$$\|u\|_{m,p} = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \int_\Omega |\partial^\alpha u(x)|^p\, dx \right)^{1/p}.$$

te za $p = \infty$,

$$\|u\|_{m,\infty} = \max_{|\alpha| \leq m} \|\partial^\alpha u\|_\infty.$$

Ponovo, u slučaju $p = 2$ dobivamo prostor sa skalarnim produktom koji označavamo

$$W^{m,2}(\Omega) = H^m(\Omega),$$

a skalarni produkt je dan formulom

$$(u, v)_m = \sum_{|\alpha| \leq m} \int_\Omega \partial^\alpha u(x) \partial^\alpha v(x)\, dx.$$

Napomena. U slučaju kada želimo naglasiti domenu, koristit ćemo oznaku za normu $\|u\|_{m,p;\Omega}$. $\Box$

Napomena. Ako za funkciju $u \in W^{1,p}(\Omega)$ vrijedi $|\nabla u| = 0$ s.s., onda je u konstanta (s.s.). $\Box$

Svi prostori Soboljeva su potpuni.

Teorem C.1 Prostor $W^{m,p}(\Omega)$ je Banachov. Prostor $H^m(\Omega)$ je Hilbertov.

Drugi pristup konstrukciji prostora Soboljeva za $p < \infty$ je sljedeći. Promatra se prostor svih funkcija iz $C^m(\Omega)$ koje imaju konačnu $W^{m,p}$-normu. To je linearan potprostor od $C^m(\Omega)$ na kome je $\|\cdot\|_{W^{m,p}}$ jedna norma. Budući da on nije potpun definiramo prostor $H^{m,p}(\Omega)$ kao *upotpunjenje* tog prostora. Sljedeći teorem kaže da smo na taj način ponovo došli do prostora Soboljeva, tj. da je $H^{m,p}(\Omega) = W^{m,p}(\Omega)$.

Teorem C.2 Neka je Ω otvoren skup. Tada je $W^{m,p}(\Omega) \cap C^\infty(\Omega)$ gust u $W^{m,p}(\Omega)$, za sve $1 \leq p < \infty$.

Gustoća ima sljedeći smisao: za svaku funkciju $u \in W^{m,p}(\Omega)$ možemo naći niz funkcija (u_n), takvih da je $u_n \in C^\infty(\Omega)$ i

$$\lim_{n\to\infty} \|u - u_n\|_{m,p} = 0.$$

Funkcije iz prostora $C^\infty(\Omega)$ mogu biti neograničene. Postavlja se pitanje da li je $C^\infty(\overline{\Omega})$ gust u $W^{m,p}(\Omega)$. Odgovor je pozitivan ako je granica skupa Ω dovoljno regularna. Na primjer, Ω ne smije ležati s obje strane svoje granice.

Postupak zatvorenja možemo provesti s prostorom $\mathcal{D}(\Omega)$. Na taj način dolazimo do sljedećih prostora:

$$W_0^{m,p}(\Omega) = \text{zatvorenje prostora } \mathcal{D}(\Omega) \text{ u normi prostora } W^{m,p}(\Omega).$$

Taj se prostor sastoji od svih funkcija $u \in W^{m,p}(\Omega)$ za koje možemo naći niz funkcija (u_n), $u_n \in \mathcal{D}(\Omega)$, takvih da je

$$\lim_{n\to\infty} \|u - u_n\|_{m,p} = 0.$$

Općenito je $W_0^{m,p}(\Omega)$ pravi podskup od $W^{m,p}(\Omega)$. To su funkcije iz $W^{m,p}(\Omega)$ koje se na određeni način poništavaju na rubu domene. Preciznije, vrijedi sljedeći rezultat: ako se funkcija $u \in W_0^{m,p}(\Omega)$ proširi nulom izvan Ω, dobiva se funkcija iz prostora $W^{m,p}(\mathbb{R}^n)$. Koristimo oznaku

$$H_0^m(\Omega) = W_0^{m,2}(\Omega).$$

U prostorima $W^{m,p}$ se definiraju polunorme

$$|u|_{m,p} = \left(\sum_{|\alpha|=m} \int_\Omega |\partial^\alpha u(x)|^p \, dx \right)^{1/p},$$

za $1 \leq p < \infty$, te anlogno za $p = \infty$.

Teorem C.3 (Poincaréova nejednakost) Ako je domena Ω ograničena barem u jednom smjeru, onda postoji konstanta $c = c(\Omega, p)$ takva da za svako $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ vrijedi

$$\|u\|_{L^p} \leq c|u|_{1,p}, \quad (1 \leq p < \infty).$$

Dokaz. Dokazat ćemo teorem u slučaju $p = 2$. Bez smanjenja općenitosti možemo uzeti da se domena nalazi unutar pruge $a < x_n < b$. Uzmimo proizvoljnu funkciju $v \in \mathcal{D}(\Omega)$ i proširimo ju nulom izvan skupa Ω. Imamo

$$v(x', x_n) = \int_a^{x_n} \frac{\partial v}{\partial x_n}(x', t) \, dt.$$

Cauchyjeva nejednakost daje

$$|v(x', x_n)|^2 \leq (x_n - a) \int_a^b |\frac{\partial v}{\partial x_n}(x', t)|^2 dt,$$

pa integriranjem po prvih $n-1$ varijabli slijedi

$$\int_{\mathbb{R}^{n-1}} |v(x', x_n)|^2 dx' \leq (x_n - a) \int_a^b \int_{\mathbb{R}^{n-1}} |\frac{\partial v}{\partial x_n}(x', t)|^2 dx' dt.$$

$$\int_a^b \int_{\mathbb{R}^{n-1}} |v(x', x_n)|^2 dx' dx_n \leq \frac{1}{2}(b-a)^2 \int_a^b \int_{\mathbb{R}^{n-1}} |\frac{\partial v}{\partial x_n}(x', t)|^2 dx' dt.$$

Budući da je funkcija jednaka nuli izvan Ω slijedi

$$\int_\Omega |v(x)|^2 dx \leq \frac{1}{2}(b-a)^2 \int_\Omega |\frac{\partial v}{\partial x_n}(x)|^2 dx.$$

Ta nejednakost vrijedi za svako $v \in \mathcal{D}(\Omega)$. Da bismo pokazali da vrijedi za svako $v \in H_0^1(\Omega)$ koristimo argument gustoće. Za odabrani $v \in H_0^1(\Omega)$ uzmemo niz (v_n), $v_n \in \mathcal{D}(\Omega)$, koji konvergira prema v u normi prostora $H^1(\Omega)$. Dokazali smo da je

$$\int_\Omega |v_n(x)|^2 dx \leq \frac{1}{2}(b-a)^2 \int_\Omega |\frac{\partial v_n}{\partial x_n}(x)|^2 dx.$$

Prijelazom na limes dobivamo da ista tvrdnja vrijedi i za v. $\square$

Promjenom Poincaréove nejednakosti dobivamo sljedeću ekvivalenciju normi na $H_0^1(\Omega)$:

$$\forall u \in H_0^1(\Omega), \qquad \frac{1}{\sqrt{1+c^2}}\|u\|_{1,2} \leq |u|_{1,2} \leq \|u\|_{1,2}.$$

Primjenom Poincaréove nejednakosti na parcijalne derivacije može se pokazati analogna ekvivalencija normi na $H_0^m(\Omega)$:

$$\forall u \in H_0^m(\Omega), \quad c_1\|u\|_{m,2} \leq |u|_{m,2} \leq \|u\|_{m,2}.$$

Zadatak. Dokažite teorem u slučaju $p \neq 2$. □

C.3.1 Singulariteti $W^{1,p}$ funkcija

Funkcije iz prostora L^p mogu biti neograničene (za $p < \infty$). Moraju li funkcije is $W^{1,p}$ biti ograničene ovisi o odnosu dimenzije prostora i indeksa p. Za $n = 1$ imamo ovaj rezultat

Teorem C.4 $W^{1,p}(a,b) \subset C([a,b])$ i vrijedi

$$u(x) - u(y) = \int_x^y u'(z)\, dz.$$

Sve funkcije iz $W^{1,p}(a,b)$ su neprekidne na segmentu $[a,b]$, pa su stoga i ograničene. Pri tome treba imati na umu da su funkcije iz L^p-prostora, pa onda i $W^{1,p}$-prostora, određene do na skup mjere nula. Svake dvije funkcije koje se razlikuju samo na skupu mjere nula smatramo jednakim. Stoga ovaj rezultat treba interpretirati tako da između svih skoro svuda jednakih funkcija postoji jedna koja je neprekidna i za nju vrijedi Newton-Leibnizova formula.

Već u dvije dimenzije ovo svojstvo se gubi.

Zadatak. 1.Pokažite da funkcija

$$u(x,y) = \ln\ln\frac{2}{r}, \quad r^2 = x^2 + y^2,$$

pripada prostoru $H^1(\Omega)$, $\Omega = B(0,1) \subset \mathbb{R}^2$.

2.Pokažite da funkcija

$$u(x) = r^{-\alpha}, \quad r = |x|,$$

pripada prostoru $H^1(\Omega)$, $\Omega = B(0,1) \subset \mathbb{R}^n$, $n > 2$, za $\alpha < (n-2)/2$. □

Iz ovih primjera vidimo da funkcije sa slabom derivacijom ne moraju biti niti neprekidne niti ograničene.

Teorem C.5 Za $1 \leq p \leq \infty$ i bilo koju domenu $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ vrijedi

- Za $1 \leq p < n$ vrijedi $W_0^{1,p}(\Omega) \subset L^{p^*}(\Omega)$ za $\dfrac{1}{p^*} = \dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{n}$;
- Za $p = n$ vrijedi $W_0^{1,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega)$ za sve $q \in [p, \infty)$;
- Za $p > n$ vrijedi $W_0^{1,p}(\Omega) \subset C(\overline{\Omega})$ i štoviše imamo

$$|u(x) - u(y)| \leq C\|u\|_{1,p}|x - y|^\alpha$$

gdje je $\alpha = 1 - n/p$ i $C = C(n, p, \Omega)$.

Isti teorem vrijedi i za funckije iz $W^{1,p}(\Omega)$, ako se na Ω stave dodatne pretpostavke.

C.3.2 Regularnost granice

Uzet ćemo radi jednostavnosti da je domena Ω ograničena, što je za naše potrebe sasvim dovoljno.

Definicija C.3 Ograničena domena $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ je Lipschitzova (klase C^k) ako za svaku točku $x \in \partial\Omega$ postoji okolina U i sustav ortogonalnih koordinata $y = (y', y_n)$, gdje je $y' = (y_1, \ldots, y_{n-1})$, takvi da vrijedi:

1. U novim koordinatam U je hiperkocka

$$U = \{y \in \mathbb{R}^n \colon -a_j < y_j < a_j,\ j = 1, 2, \ldots, n\}.$$

2. Postoji Lipschitzova (klase C^k) funkcija ϕ definirana na

$$U' = \{y' \in \mathbb{R}^n \colon -a_j < y_j < a_j,\ j = 1, 2, \ldots, n - 1\},$$

koja zadovoljava

$$\forall y' \in U', \quad |\phi(y')| \leq a_n/2$$

$$\Omega \cap U = \{y \colon y_n > \phi(y')\}, \quad \partial\Omega \cap U = \{y \colon y_n = \phi(y')\}.$$

Ova definicija znači da se lokalno granica skupa može prikazati kao graf Lipschitzove funkcije, te da se skup lokalno nalazi samo s jedne strane granice. Uočimo još da zbog ograničenosti domene, njena granica je kompaktan skup te stoga možemo uvijek odabrati konačan skup ovakvih karata koje pokrivaju cijelu granicu.

U Lipschitzovoj domeni vrjede teoremi ulaganja za $W^{1,p}$ prostor.

Teorem C.6 Za $1 \leq p \leq \infty$ i bilo ograničenu Lipschitzovu domenu $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ vrijedi

- Za $1 \leq p < n$ vrijedi $W^{1,p}(\Omega) \subset L^{p^*}(\Omega)$ za $\dfrac{1}{p^*} = \dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{n}$;
- Za $p = n$ vrijedi $W^{1,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega)$ za sve $q \in [p, \infty)$;
- Za $p > n$ vrijedi $W^{1,p}(\Omega) \subset C(\overline{\Omega})$ i štoviše imamo

$$|u(x) - u(y)| \leq C\|u\|_{1,p}|x - y|^\alpha$$

gdje je $\alpha = 1 - n/p$ i $C = C(n, p, \Omega)$.

Lipschitzove funkcije su skoro svuda derivabilne, tako da je u Lipschitzovoj domeni Ω dobro definirana jedinična vanjska normala na $\partial\Omega$, skoro svuda na $\partial\Omega$.

Teorem C.7 Neka je $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ograničena Lipschitzova domena. Tada je $C^\infty(\overline{\Omega})$ gust u $W^{1,p}(\Omega)$ za sve $m \geq 0$ i $1 \leq p < \infty$.

Teorem vrijedi i za neograničene domene s Lipschitzovim rubom.

C.3.3 Trag funkcije

Za funkcije iz $W^{1,p}(\Omega)$ prostora vrijednost funkcije na $\partial\Omega$ nije evidentna. Prije svega, te funkcije nisu originalno definirane na $\overline{\Omega}$, a zatim, one mogu biti definirane na proizvoljan način na skupu mjere nula, jer skoro svuda jednake funkcije smatramo jednakim. Kako je $\partial\Omega$ skup mjere nula, ako je granica regularna, to nije jasno da se može govoriti o vrijednosti funkcije na rubu domene.

Teorem C.4 pokazuje da u 1D vrijednosti u rubovima intervala možemo jednoznačno definirati. Ista je situacija i u višedimenzionalnom slučaju ako je granica domene glatka.

Prvo se dokaže sljedeći rezultat.

Lema C.3 Neka je $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ograničena Lipschitzova domena. Tada postoji konstanta $C > 0$ takva da je

$$\forall v \in C^\infty(\overline{\Omega}), \quad \|v\|_{L^p(\partial\Omega)} \leq C\|v\|_{1,p}.$$

Označimo sa γ_0 preslikavanje koje funkciji $v \in C^\infty(\overline{\Omega})$ pridružuje njenu restrikciju na $\partial\Omega$. Prethodna lema kaže da je to neprekidan linearan operator iz $W^{1,p}(\Omega)$ u $L^p(\partial\Omega)$. Prema Teoremu C.7 taj je operator definiran na gustom podskupu i stoga ima jedinstveno proširenje po neprekidnosti na čitav $W^{1,p}(\Omega)$. To proširenje nazivamo operator traga i označavamo ponovo s γ_0.

Operator traga nije surjekcija. To znači da restrikcije funkcija iz $W^{1,p}(\Omega)$ na $\partial\Omega$ imaju nešto veću regularnost. Prostor svih takvih funkcija se označava s $W^{1-1/p,p}(\partial\Omega)$ i postoje različiti načini za njegovo karakteriziranje. U Hilbertovom slučaju prostor svih tragova funkcija iz $H^1(\Omega)$ označavamo s $H^{\frac{1}{2}}(\Omega)(= W^{\frac{1}{2},2}(\partial\Omega))$. Prirodna norma u tim prostorima je

$$\|f\|_{1-1/p,p;\partial\Omega} = \inf\{\|v\|_{1,p;\Omega} \colon v \in W^{1,p}(\Omega). \quad \gamma_0(v) = f\}.$$

Prostor $W_0^{1,p}(\Omega)$ možemo karakterizirati na ova način.

Teorem C.8 Neka je $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ograničena Lipschitzova domena. Tada je

$$W_0^{1,p}(\Omega) = \{v \in W^{1,p}(\Omega) \colon \gamma_0(v) = 0\}.$$

Sada je lako dokazati sljedeću verziju Greenove formule.

Lema C.4 Neka je $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ograničena Lipschitzova domena. Za svako $u, v \in H^1(\Omega)$ i $1 \le i \le n$ vrijedi

$$\int_\Omega u \frac{\partial v}{\partial x_i}\, dx = -\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i} v\, dx + \int_{\partial\Omega} \gamma_0(uv) n_i\, dS,$$

gdje je $\mathbf{n}$ jedinična vanjska normala na $\partial\Omega$.

Napomena. Analogna formula vrijedi za $u \in W^{1,p}(\Omega)$ i $v \in W^{1,p'}(\Omega)$. $\square$

Ako je $u \in W^{2,p}(\Omega)$ onda je ona naravno i u $W^{1,p}(\Omega)$, pa je njen trag dobro definiran. Štoviše, sve su parcijalne derivacije u $W^{1,p}(\Omega)$ pa i one imaju trag na $\partial\Omega$. Kako je u Lipschitzovoj domeni jedinična vanjska normala skoro svuda dobro definirana, dobro je definiran i operator derivacije u smjeru normale

$$\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}\Big|_{\partial\Omega} = \sum_{i=1}^n \gamma_0(\frac{\partial u}{\partial x_i}) n_i.$$

Može se analogno dokazati da vrijedi Greenova formula : za svako $u \in H^2(\Omega)$ i $v \in H^1(\Omega)$

$$\sum_{i=1}^n \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_i}\, dx = -\sum_{i=1}^n \int_\Omega \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} v\, dx + \sum_{i=1}^n \int_{\partial\Omega} \gamma_0(\frac{\partial u}{\partial x_i} v) n_i dS.$$

Operator normalne derivacije se obično označava s

$$\gamma_1(u) = \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}\Big|_{\partial\Omega}$$

i naziva prvim tragom funkcije. Prostor $W_0^{2,p}(\Omega)$ možemo karakterizirati kao potprostor od $W^{2,p}(\Omega)$ na kome se nulti i prvi trag poništavaju:

$$W_0^{2,p}(\Omega) = \{v \in W^{2,p}(\Omega) \colon \gamma_0(v) = 0, \quad \gamma_1(v) = 0\}.$$

C.3.4 Dualni prostori

Promatramo samo slučaj $p = 2$, radi jednostavnosti.
Definiramo
$$H^{-k}(\Omega) = (H_0^k(\Omega))'.$$
To je prostor svih linearnih i neprekidnig funkcionala na $H_0^k(\Omega)$. Uočimo da su svi ti funkcionli distribucije jer je $\mathcal{D}(\Omega) \subset H_0^k(\Omega)$. Djelovanje funkcionala $f \in H^{-k}(\Omega)$ na funkciji $u \in H_0^k(\Omega)$ označavamo s $\langle f, u\rangle_k$. Normu funkcionala definiramo uobičajeno:

$$\|f\|_{-k} = \sup\{\frac{< f, u >_k}{\|u\|_{k,2}} \colon u \in H_0^k(\Omega), \quad u \neq 0\}.$$

Najčešće se koristi prostor $H^{-1}(\Omega)$. Pored njega važnu ulogu ima i prostor $H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ koji se definira kao dualni prostor za $H^1(\partial\Omega)$. Normu definiramo analogno

$$\|f\|_{-\frac{1}{2};\partial\Omega} = \sup\{\frac{< f, u >_{\frac{1}{2};\partial\Omega}}{\|u\|_{\frac{1}{2},2;\partial\Omega}} \colon u \in H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega), \quad u \neq 0\},$$

gdje smo uveli odgovarajuće oznake za dualnost i dualnu normu.

C.4 Prostor $H(\mathrm{div};\Omega)$

U varijacijskoj formulaciji nekih rubnih zadaća važnu ulogu ima prostor

$$H(\mathrm{div};\Omega) = \{\mathbf{v} \in \mathbf{L}^2(\Omega)\colon \operatorname{div}\mathbf{v} \in L^2(\Omega)\}.$$

Divergencija funkcije $\mathbf{v} \in \mathbf{L}^2(\Omega)$ uzima se u smislu distribucija. Norma na tom prostoru je
$$\|\mathbf{v}\|_{H(\mathrm{div};\Omega)} = \left(\|\mathbf{v}\|_{0;\Omega}^2 + \|\operatorname{div}\mathbf{v}\|_{0;\Omega}^2\right)^{1/2}.$$
K tome definiramo

$$H_0(\mathrm{div};\Omega) = \text{ zatvarač skupa } \mathcal{D}(\Omega) \text{ u normi } \|\cdot\|_{H(\mathrm{div};\Omega)}.$$

Teorem C.9 Neka je $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ Lipschitzova domena. Tada je $C^\infty(\overline{\Omega})$ gusto u $H(\mathrm{div};\Omega)$.

U $H(\mathrm{div};\Omega)$ moguće je definirati normalnu komponentu polja na granici domene.

Teorem C.10 Neka je $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ Lipschitzova domena. Tada se preslikavanje $\gamma_n\colon \mathbf{v} \mapsto \mathbf{v}\cdot\mathbf{n}\big|_{\partial\Omega}$, definirano na $C^\infty(\overline{\Omega})^n$, može proširiti po neprekidnosti do preslikavanja $\gamma_n\colon H(\mathrm{div};\Omega) \to H^{-1/2}(\partial\Omega)$. Vrijedi teorem o divergenciji:

$$\forall \mathbf{v} \in H(\mathrm{div};\Omega),\ \forall \phi \in H^1(\Omega), \qquad \int_\Omega \mathbf{v}\cdot\nabla\phi\,dx + \int_\Omega \operatorname{div}\mathbf{v}\phi\,dx = \langle\gamma_n(\mathbf{v}),\phi\rangle_{\frac{1}{2};\partial\Omega}.$$

Uočomo da smo ovdje zbog nedostatka regularnosti integral

$$\int_{\partial\Omega} \mathbf{v}\cdot\mathbf{n}\phi\, dS \text{ zamijenili s dualnošću } \langle\gamma_n(\mathbf{v}),\phi\rangle_{\frac{1}{2};\partial\Omega}.$$

Primjenom prethodnog teorema dobivamo sljedeću formulu parcijalne integracije: Za svako $u \in H^1(\Omega)$ takvo da je $\triangle u \in L^2(\Omega)$ dobro je definirana normalna derivacija $\partial u/\partial\mathbf{n} \in H^{-1/2}(\partial\Omega)$ te vrijedi

$$\forall v \in H^1(\Omega), \quad \int_\Omega \nabla u\cdot\nabla v\, dx = -\int_\Omega \triangle u\, v\, dx + \langle\frac{\partial u}{\partial\mathbf{n}}, v\rangle_{\frac{1}{2};\partial\Omega}.$$

C.5 Kompaktnost ulaganja

Među prostorima Soboljeva evidentno postoje odnosi

$$L^p(\Omega) \supset W^{1,p}(\Omega) \supset W^{2,p}(\Omega) \supset W^{3,p}(\Omega) \supset \cdots$$

Preslikavanje $I\colon W^{k+1,p}(\Omega) \to W^{k,p}(\Omega)$ koje element $u \in W^{k+1,p}(\Omega)$ preslikava u isti taj element u prostoru $W^{k,p}(\Omega)$ nazivamo ulaganjem (za $k = 0$ uzimamo $W^{0,p}(\Omega) = L^p(\Omega)$). Evidentno su sva ulaganja neprekidna.

Preslikavanje $A\colon X \to Y$, s normiranog prostora X u normirani prostor Y, je kompaktno ako je neprekidno i ako svaki ograničen skup preslikava u relativno kompaktan skup. Ovo drugo svojstvo možemo ekvivalentno formulirati i na sljedeći način: za svaki ograničen niz (x_n) u X, niz slika $(A(x_n))$ ima konvergentan podniz u Y.

Teorem C.11 (Rellich-Kondrachov). Neka je $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ograničena Lipschitzova domena. Tada su sljedeća ulaganja kompaktna:

- Za $1 \le p < n$ vrijedi $W^{1,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega)$ za $q \in [1, p^*)$, $\dfrac{1}{p^*} = \dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{n}$;
- Za $p = n$ vrijedi $W^{1,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega)$ za sve $q \in [1,\infty)$;
- Za $p > n$ vrijedi $W^{1,p}(\Omega) \subset C(\overline{\Omega})$.

Napomena. Kompaktnost vrijedi za ograničene domene. Kontraprimjerom se pokazuje da općenito za neograničene domene ne vrijedi. □

Bibliografija

[1] I. Aganović: Uvod u rubne zadaće mehanike kontinuuma, Element, Zagreb, 2003.

[2] O. Axelsson, V.A. Barker: Finite Element Solution of Boundary value Problems. Theory and Computation, Academic Press, Inc., 1984.

[3] D. Braess: Finite elements, Theory, fast solvers, and applications in solid mechanics, Second Edition, Cambridge University Press, 2001.

[4] C. Brenner, L. R. Scott: The Mathematical Theory of Finite Element Methods, Texts in Applied Mathematics 15, Springer-Verlag, 1994.

[5] H. Brezis: Analyse finctionnelle, Théorie et applications, Masson, Paris, 1983.

[6] P. G. Ciarlet: The Finite Element Method for Elliptic Problems, Studies in Mathematics and its Applications 4, North-Holland, 1978.

[7] A. Ern, J-L Guermond: Elements finis: theorie, applications, mise en oeuvre, Springer, 2002.

[8] P. Joly: Mise en Oeuvre de la Methode des Elements Finis, Ellipses, 1990.

[9] S. Kurepa: *Funkcionalna analiza. Elementi teorije operatora*, Školska knjiga, Zagreb, 1981.

[10] K. W. MOrton: *Numerical Solution of Convection-Diffusion Problems*, Chapman & Hall, 1996.

[11] A. Quaeteroni, A. Valli: Numerical Approximation of Partial Differential Equations, Springer Series in Computational Mathematics, Springer-Verlag, 1994.

[12] P.A. Raviart, J.M. Thomas: *Introduction à l'analyse numérique des équations aux dérivées partielles*, Masson, Paris, 1992.

[13] H.-G. Roos, M. Stynes, L. Tobiska: *Numerical Methods for Singularly Perturbed Differential Equations. Convection-Diffusion and Flow Problems*, Springer, 1996.

[14] E. Zeidler: *Applied Functional Analysis. Applications to Mathematical Physics*, Applied Mathematical Sciences 108, Springer-Verlag, New York, 1995.