

NUMERIČKE METODE FINANCIJSKE MATEMATIKE
05.09.2007.

Studenti koji su kolegij slušali 2003./2004. i 2004./2005. rješavaju zadatke 1, 2, 4, 6, 7. Studenti koji su kolegij slušali 2005./2006. i 2006./2007. pišu zadatke 1, 2, 3, 4, 5.

1. Funkciju $f(x) = \sqrt{3x+5}$ aproksimirajte Newtonovim interpolacijskim polinomom stupnja 3 na Čebiševljevoj mreži intervala $[-1.5, 1.5]$.
2. Metodom bisekcije pronađite točku cikliranja Newtonove metode za nalaženje nultočke funkcije $f(x) = \arctg(x) - \frac{\pi}{2}$ na intervalu $[-0.15, 0.1]$ tako da greška bude manja od 10^{-2} . Unaprijed izračunajte broj iteracija potrebnih za dostizanje tražene točnosti.
3. Riješite običnu diferencijalnu jednadžbu

$$y'(x) = \frac{x^2 + 2y(x)}{x}, y(1) = 0$$

pomoću Eulerove metode na intervalu $[1, 4]$ i na mreži od $n = 6$ jednakih dijelova.

4. Eksplicitnom metodom konačnih diferencija numerički riješite rubni problem:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial \tau} &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, x \in \langle -1.6, 1.6 \rangle, \tau \in \langle 0, 0.9 \rangle \\ u(-1.6, \tau) &= \cos \tau, \tau \in \langle 0, 0.9 \rangle \\ u(1.6, \tau) &= \sqrt{\tau + 3}, \tau \in \langle 0, 0.9 \rangle \\ u(x, 0) &= x, x \in [-1.6, 1.6] \end{aligned}$$

na mreži zadanoj sa

- (a) $h_x = 0.6$ i $h_\tau = 0.5$
- (b) $h_x = 0.8$ i $h_\tau = 0.3$

5. Pretpostavimo da želimo riješiti linearni problem najmanjih kvadrata

$$\min_x \|Ax - b\|_2, A \in \mathbb{R}^{m \times n}, b \in \mathbb{R}^m, x \in \mathbb{R}^n, m \geq n$$

Objasnite kako biste riješili taj problem pomoću dekompozicije singularnih vrijednosti.

6. Napravite numeričku stabilnost izraza

$$\tilde{z} = fl \left(\sqrt{\sum_{i=1}^n \frac{x_i}{y_i}} \right), \quad x_1, y_i \in \mathbb{R}, y_i \neq 0, i = 1, \dots, n$$

tako da nađete greške unaprijed i unazad, koje nastaju kada se dani izraz računa u aritmetici konačne preciznosti sa jediničnom greškom zaokruživanja u. Koji je broj uvjetovanosti? Je li računanje ovog izraza povratno stabilno? A stabilno unaprijed?

7. Riješite sustav $Ax = b$ pri čemu je

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 & 0 \\ -2 & 10 & 12 & 0 \\ 0 & 12 & 17 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 8 \end{pmatrix} \text{ i } b = \begin{pmatrix} 2 \\ 20 \\ 27 \\ 6 \end{pmatrix}$$

pomoću LDL^T algoritma za tridijagonalnu matricu. Izračunajte broj izvršenih operacija.

Martina Barberić

Vrijeme rješavanja je 120 minuta. Svaki zadatak nosi 20 bodova. Dozvoljena je uporaba kalkulatora (koji nisu programabilni) i jednog lista papira A4 formata s formulama. Među tim formulama ne smije biti izvoda samih formula.

Rezultati: petak 07.09.2007 u 13:00, a možda i ranije na <http://web.math.hr/~hyde/nmfm/rezultati.html>
Termin usmenog kod prof. Harija bit će objavljen naknadno.