NORMIRANI PROSTORI I OPERATORI

Boris Guljaš

predavanja

Zagreb, 1.9.2010.

Posljednji ispravak: ponedjeljak, 19. ožujak 2012.

Sadržaj

Poglavlje 1

Normirani prostori

1.1 Normirani i unitarni prostori, osnovni pojmovi

Pod oznakom polja $\mathbb{K}$ podrazumjevamo polje realnih brojeva $\mathbb{R}$ ili polje kompleksnih brojeva $\mathbb{C}$.

X je vektorski prostor nad poljem $\mathbb{K}$.

1.1.1. Definicija. Norma na X je preslikavanje $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \|x\|$, za koje vrijedi

(1) $\|x\| \geq 0$, $\forall x \in X$ (pozitivnost).

(2) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$ (strogost).

(3) $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$, $\forall \lambda \in \mathbb{K}$, $\forall x \in X$ (pozitivna homogenost).

(4) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$, $\forall x, y \in X$ (subaditivnost - relacija trokuta).

Normirani prostor $(X, \|\cdot\|)$ je uređeni par vektorskog prostora i norme na njemu.

1.1.2. Primjeri.

1. $\mathbb{K}^n$, $x = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$; $\|x\|_1 = \sum_{k=1}^n |\xi_k|$.

2. $\mathbb{K}^n$, $x = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$; $\|x\|_\infty = \max\{|\xi_k|; 1 \leq k \leq n\}$.

3. $C([a,b]) = \{f; f : [a,b] \to \mathbb{K}$ neprekidna na $[a,b]\}$, $\|f\|_1 = \int_a^b |f(t)| dt$.

3. $C([a,b])$, $\|f\|_\infty = \max\{|f(t)|; t \in [a,b]\}$.

1.1.3. Definicija. Skalarni produkt na X je preslikavanje $(\cdot|\cdot) : X \times X \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto (x|y)$, za koje vrijedi

(1) $(x|x) \geq 0$, $\forall x \in X$ (pozitivnost).

(2) $(x|x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ (strogost).

(3) $\forall y \in X$ je $x \mapsto (x|y)$ linearan funkcional na X.

(4) $(x|y) = \overline{(y|x)}$, $\forall x, y \in X$ (hermitska simetrija).

Unitarni prostor $(X, (\cdot|\cdot))$ je uređeni par vektorskog prostora i skalarnog produkta na njemu.

1.1.4. Teorem. (Cauchy-Schwarz-Buniakowsky)
Neka je $(X, (\cdot|\cdot))$ unitaran prostor. Tada je

$$|(x|y)|^2 \leq (x|x)(y|y), \quad \forall x, y \in X. \tag{1.1}$$

Znak jednakost vrijedi u (1.1) ako i samo ako su x i y linearno zavisni (proporcionalni).

Dokaz: Ako je vektor $y = 0$ onda u (1.1) vrijedi jednakost. Ako je $y \neq 0$, onda je $e = \frac{y}{\sqrt{(y|y)}}$ takav da vrijedi $(e|e) = 1$. Vrijedi

$$0 \leq (x - (x|e)e|x - (x|e)e) = (x|x) - 2(x|e)(e|x) + |(x|e)|^2 = (x|x) - |(x|e)|^2,$$

odnosno $|(x|e)|^2 \leq (x, x)$, tj. imamo (1.1).

Ako u (1.1) vrijedi jednakost, onda je $(x - (x|e)e|x - (x|e)e) = 0$, pa iz definicije 1.1.3.(2) slijedi $x = (x|e)e$, odnosno $x = \frac{(x|y)}{(y|y)}\, y$. Obrat je očit. $\square$

1.1.5. Korolar. *Ako je $(\cdot|\cdot)$ skalarni produkt na X, onda je sa $\|x\| = \sqrt{(x|x)}$ zadana norma na X.*

1.1.6. Teorem. (P. Jordan - J. von Neumann)
Neka je $\|\cdot\|$ norma na X. Slijedeća dva svojstva su međusobno ekvivalentna:

(a) *Vrijedi jednakost paralelograma:*

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2, \quad \forall x, y \in X.$$

(b) *Postoji skalarni produkt $(\cdot|\cdot)$ na X takav da je $(x|x) = \|x\|^2$, $\forall x \in X$.*

Skalarni produkt iz (b) je jedinstven i dan sa

$$
\begin{aligned}
(x|y) &= \frac{1}{4}\|x+y\|^2 - \frac{1}{4}\|x-y\|^2, \quad \text{za } \mathbb{K}=\mathbb{R}. \\
(x|y) &= \frac{1}{4}\|x+y\|^2 - \frac{1}{4}\|x-y\|^2 + \frac{i}{4}\|x+iy\|^2 - \frac{i}{4}\|x-iy\|^2, \quad \text{za } \mathbb{K}=\mathbb{C}.
\end{aligned}
$$

1.1.7. Teorem. Gramm - Schmidt *Neka je X unitaran prostor i $x_1, x_2, \ldots$ konačan ili beskonačan niz linearno nezavisnih vektora u X. Postoji jedinstven ortonormiran niz $e_1, e_2, \ldots$ takav da vrijedi*

(a) $[\{x_1, \ldots, x_k\}] = [\{e_1, \ldots, e_k\}]$, $\forall k \in \mathbb{N}$,

(b) $(x_k|e_k) > 0$, $\forall k \in \mathbb{N}$.

Dokaz: Matematičkom indukcijom se lako provjeri da vrijedi $e_k = \frac{y_k}{\|y_k\|}$, gdje je $y_k = x_k - \sum_{j=1}^{k-1}(x_k|e_j)e_j$, $\forall k \in \mathbb{N}$ $\square$

Neka su $(X_j, \|\cdot\|_{n(j)})$, $(j = 1, \ldots, n)$ normirani prostori nad poljem $\mathbb{K}$. Na $X_1 \times \cdot \times X_n$ možemo definirati normu na više načina:

$$\|(x_1, \ldots, x_n)\|_1 = \sum_{j=1}^{n} \|x_j\|_{n(j)},$$

$$\|(x_1, \ldots, x_n)\|_2 = \left(\sum_{j=1}^{n} \|x_j\|_{n(j)}^2\right)^{\frac{1}{2}},$$

$$\|(x_1, \ldots, x_n)\|_\infty = \max\{\|x_j\|_{n(j)}; 1 \le j \le n\}.$$

Za svaki $x = (x_1, \ldots, x_n) \in X_1 \times \cdot \times X_n$ vrijede nejednakosti

$$\|x\|_\infty \le \|x\|_2 \le \|x\|_1 \le \sqrt{n}\|x\|_2 \le n\|x\|_\infty.$$

1.2 Neprekidnost i ekvivalencija normi

1.2.1. Definicija. Kažemo da su norme $\|\cdot\|$ i $|||\cdot|||$ na vektorskom prostoru X **ekvivalentne** ako postoje $m > 0$ i $M > 0$ takvi da vrijedi

$$m|||x||| \le \|x\| \le M|||x|||.$$

1.2.2. Definicija. Neka su $(X, \|\cdot\|)$ i $(Y, |\!|\!|\cdot|\!|\!|)$ normirani prostori, $S \subseteq X$, $f : X \to Y$ i $a \in S$. Kažemo da je f **neprekidna u točki** a ako

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall x \in S,\ (\|x - a\| < \delta) \Rightarrow (|\!|\!|f(x) - f(a)|\!|\!| < \varepsilon).$$

Funkcija f je **jednoliko** ili **uniformno** neprekidna na skupu $T \subseteq S$ ako vrijedi

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall x, x' \in T,\ (\|x - x'\| < \delta) \Rightarrow (|\!|\!|f(x) - f(x')|\!|\!| < \varepsilon).$$

Očigledno, ako je funkcija neprekidna u nekoj točki ili uniformno neprekidna na nekom skupu u jednom paru normi, onda se to ne mijenja ako neku od normi zamijenimo s njoj ekvivalentnom normom.

Za podskup $S \subseteq X$ u normiranom prostoru X kažemo da je ograničen ako postoji $M > 0$ takav da vrijedi $\|x\| \leq M$, $\forall x \in S$.

1.2.3. Propozicija. *Neka je* $\|\cdot\|$ *norma na* X.

(*a*) *Funkcija* $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$ *je uniformno neprekidna na* X.

(*b*) *Funkcija* $+ : X \times X \to X$, $(x, y) \mapsto x + y$ *je uniformno neprekidna na* $X \times X$ *u bilo kojoj od ekvivalentnih normi* $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ *ili* $\|\cdot\|_\infty$.

(*c*) *Funkcija* $(\lambda, x) \mapsto \lambda x$ *je neprekidna sa* $\mathbb{K} \times X \to X$ *i uniformno je neprekidna na svakom ograničenom podskupu od* $\mathbb{K} \times X$.

Dokaz: (a) Za $x, y \in X$ imamo $\|x\| = \|(x-y)+y\| \leq \|x-y\| + \|y\|$ iz čega slijedi $\|x\| - \|y\| \leq \|x - y\|$. Zamjenom x i y imamo $\|y\| - \|x\| \leq \|x - y\|$. Dakle, $|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\|$, $\forall x, y \in X$. Sada je jasno da za zadani $\varepsilon > 0$ možemo uzeti $\delta = \varepsilon$ i vrijedi $(\|x - y\| < \delta) \Rightarrow (|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\| < \varepsilon)$.

(b) Na $X \times X$ uzmimo normu $\|(x_1, x_2)\|_1 = \|x_1\| + \|x_2\|$ pa imamo:

$$\|(x + y) - (x' + y')\| = \|(x - x') + (y - y')\| \leq \|x - x'\| + \|y - y'\| =$$

$$= \|(x - x', y - y')\|_1 = \|(x, y) - (x', y')\|_1.$$

Odatle je jasno da uz izbor $\delta = \varepsilon$ vrijedi

$$(\|(x, y) - (x', y')\|_1 < \delta) \Rightarrow (\|(x + y) - (x' + y')\| < \varepsilon).$$

(c) Neka je S ograničen podskup od $\mathbb{K} \times X$, tj. postoji $M > 0$ takav da je $\|(\lambda, x)\|_1 = |\lambda| + \|x\| \leq M$, $\forall (\lambda, x) \in S$. Sada za bilo koji $\varepsilon > 0$ uzmemo $\delta = \frac{\varepsilon}{2M}$, pa

$$\forall (\lambda, x), (\lambda', x') \in S, (\|(\lambda, x) - (\lambda', x')\|_1 = |\lambda\lambda'| + \|x - x'\| < \delta) \Rightarrow$$

$$(\|\lambda x - \lambda' x'\| \leq |\lambda|\|x - x'\| + |\lambda - \lambda'|\|x'\| < 2M\delta = \varepsilon),$$

odakle slijedi tvrdnja. $\square$

1.2.4. Propozicija. *Neka je* $(\cdot|\cdot)$ *skalarni produkt na* X*. Funkcija* $(x,y) \mapsto (x|y)$ *je neprekidna sa* $X \times X$ *u* $\mathbb{K}$ *i uniformno je neprekidna na svakom ograničenom podskupu od* $X \times X$*.*

Dokaz: Slijedi iz propozicije 1.2.3.(a),(b) i iz teorema 1.1.6. □

1.2.5. Teorem. *Neka je* X *konačno dimenzionalan vektorski prostor i* $\|\cdot\|_1$*,* $\|\cdot\|_2$ *bilo koje dvije norme na* X*. Tada su norme* $\|\cdot\|_1$ *i* $\|\cdot\|_2$ *ekvivalentne.*

Dokaz: Neka je $\{e_1, \ldots, e_n\}$ baza u X i stavimo $M_j = \max\{\|e_k\|_j; k = 1, \ldots, n\}$, $j = 1, 2$.

Definiramo $\|x\| = |\xi_1| + \cdots + |\xi_n|$, za $x = \xi_1 e_1 + \cdots + \xi_n e_n \in X$. Tada je $\|\cdot\|$ norma na X. Za $j = 1, 2$ imamo

$$\|x\|_j = \|\xi_1 e_1 + \cdots + \xi_n e_n\|_j \leq |\xi_1|\|e_1\|_j + \cdots + |\xi_n|\|e_n\|_j \leq M_j\|x\|.$$

Definiramo funkciju $f_j : \mathbb{K}^n \to \mathbb{R}$ $(j = 1, 2)$ sa:

$$f_j(\xi_1, \ldots, \xi_n) = \|\xi_1 e_1 + \cdots + \xi_n e_n\|_j, \forall(\xi_1, \ldots, \xi_n) \in \mathbb{K}^n.$$

Prema propoziciji 1.2.3. funkcija je neprekidna na $\mathbb{K}^n$. Neka je

$$S = \{(\xi_1, \ldots, \xi_n) \in \mathbb{K}^n; |\xi_1| + \cdots + |\xi_n| = 1\}.$$

Skup S je zatvoren i ograničen u $\mathbb{K}^n$, dakle kompaktan. Za $j \in \{1, 2\}$ postoji $(\xi_1^{(j)}, \ldots, \xi_n^{(j)}) \in S$ takav da je

$$f_j(\xi_1^{(j)}, \ldots, \xi_n^{(j)}) \leq f_j(\xi_1, \ldots, \xi_n), \forall(\xi_1, \ldots, \xi_n) \in S.$$

Stavimo $x_j = \xi_1^{(j)} e_1 + \cdots + \xi_n^{(j)} e_n$ i vrijedi $x_j \neq 0$.

Neka je $y \in X$, $\|y\| = 1$. Tada je $y = \eta_1 e_1 + \cdots + \eta_n e_n$ i $\|y\| = |\eta_1| + \cdots + |\eta_n| = 1$, dakle $(\eta_1, \ldots, \eta_n) \in S$ pa slijedi:

$$f_j(\xi_1^{(j)}, \ldots, \xi_n^{(j)}) \leq f_j(\eta_1, \ldots, \eta_n), \forall(\eta_1, \ldots, \eta_n) \in S,$$

tj.

$$\|x_j\|_j \leq \|y\|_j, \ \ \forall y \in X, \|y\| = 1.$$

Neka je $x \in X$, $x \neq 0$, po volji. Za $y = \frac{x}{\|x\|}$ vrijedi $\|y\| = 1$ pa je

$$\|x_j\|_j \leq \|y\|_j = \|\frac{x}{\|x\|}\|_j = \frac{\|x\|_j}{\|x\|}, \text{ a odatle imamo } \|x\|_j \geq \|x_j\|_j\|x\|.$$

Stavimo $m_j = \|x_j\|_j$ pa vrijedi $m_j\|x\| \leq \|x\|_j$ $(j = 1, 2)$, $\forall x \in X$. Dakle, $m_j\|x\| \leq \|x\|_j \leq M_j\|x\|$, $\forall x \in X$. Konačno, imamo

$$\frac{m_1}{M_2}\|x\|_2 \leq m_1\|x\| \leq \|x\|_1 \leq M_1\|x\| \leq \frac{M_1}{m_2}\|x\|_2,$$

tj. $\dfrac{m_1}{M_2}\|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq \dfrac{M_1}{m_2}\|x\|_2$. $\square$

1.3 Potpunost

U daljnjem je X normiran prostor s normom $\|\cdot\|$.

1.3.1. Definicija. Niz $(x_n)_n$ u X je konvergentan ako za neki $x \in X$ niz brojeva $(\|x_n - x\|)_n$ konvergira i vrijedi $\lim_n \|x_n - x\| = 0$. tj.

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, (n \geq n_\varepsilon) \Rightarrow (\|x_n - x\| < \varepsilon).$$

Takav x je jedinstven i pišemo $x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_n x_n$ ili $x_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} x$.

1.3.2. Definicija. Niz $(x_n)_n$ u X je Cauchyjev ako

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}, \forall n, m \in \mathbb{N}, (n, m \geq n_\varepsilon) \Rightarrow (\|x_n - x_m\| < \varepsilon).$$

Očito, zbog

$$\|x_n - x_m\| = \|(x_n - x) + (x - x_m)\| \leq \|x_n - x\| + \|x - x_m\|$$

je svaki konvergentan niz Cauchyjev.

1.3.3. Definicija. Normirani prostor X je potpun ili Banachov ako je svaki Cauchyjev niz u X konvergentan.

1.3.4. Napomena. Ako je X potpun za neku normu, onda je on potpun i za svaku njoj ekvivalentnu normu. Naime, ako je niz Cauchyjev u nekoj normi onda je Cauchyjev i u svakoj njoj ekvivalentnoj normi. Isto vrijedi i za konvergentne nizove, s tim da i limes ostaje isti.

1.3.5. Propozicija. *Konačno dimenzionalan normiran prostor je potpun.*

Dokaz: Prema teoremu 1.2.5. sve norme su ekvivalentne pa možemo promatrati odabranu bazu $\{e_1, \ldots, e_n\}$ i normu $\|\sum_{j=1}^n \xi_j e_j\| = \max\{|\xi_j|; 1 \leq j \leq n\}$.

Neka je $(x_k)_k$ Cauchyjev niz u X, $x_k = \sum_{j=1}^n \xi_j^{(k)} e_j$, $k \in \mathbb{N}$. Neka je $\varepsilon > 0$ po volji i $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ takav da $(p, q \geq n_\varepsilon) \Rightarrow (\|x_p - x_q\| < \varepsilon)$.

Tada za $\forall j \in \{1, \ldots, n\}$ vrijedi $(p, q \geq n_\varepsilon) \Rightarrow (|\xi_j^{(p)} - \xi_j^{(q)}| < \varepsilon)$, dakle nizovi $(\xi_j^{(k)})_k$ su Cauchyjevi u $\mathbb{K}$, pa su onda i konvergentni u $\mathbb{K}$.

Neka je $\xi_j = \lim_k \xi_j^{(k)}$, $\forall j \in \{1, \ldots, n\}$, i označimo $x = \sum_{j=1}^n \xi_j e_j$. Očito vrijedi $x = \lim_k x_k$. □

1.3.6. Propozicija. *Neka je $(x_n)_n$ Cauchyjev niz u normiranom prostoru X.*

(a) *Skup $\{x_n; n \in \mathbb{N}\}$ je ograničen.*

(b) *Za svaki niz $(\varepsilon_n)_n$ u $\langle 0, \infty\rangle$ postoji podniz $(x_{p_n})_n$ takav da vrijedi*

$$\|x_{p_{n+1}} - x_{p_n}\| < \varepsilon_n, \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Dokaz: (a) Za $\varepsilon = 1 > 0$ postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da $n, m \geq n_\varepsilon$ povlači $\|x_n - x_m\| < 1$. Označimo $M = 1 + \sum_{i=1}^{n_0} \|x_i\|$, pa za $n \in \mathbb{N}$, $n \leq n_0$, imamo $\|x_n\| \leq M$. Za $n \geq n_0$ imamo $\|x_n\| \leq \|x_n - x_{n_0}\| + \|x_{n_0}\| \leq 1 + \|x_{n_0}\| \leq M$.

(b) Postoji $n_1 \in \mathbb{N}$ takav da $p, q \geq n_1$ povlači $\|x_p - x_q\| < \varepsilon_1$. Stavimo $p_1 = n_1$. Sada postoji $n_2 > n_1$ takav da $p, q \geq n_2$ povlači $\|x_p - x_q\| < \varepsilon_2$ i stavimo $p_2 = n_2$, itd. Induktivno dolazimo do strogo rastućeg niza $(p_n)_n$ u $\mathbb{N}$ takvog da $p, q \geq p_n$ povlači $\|x_p - x_q\| < \varepsilon_n$. Specijalno, zbog $p_{n+1} > p_n$ vrijedi $\|x_{p_{n+1}} - x_{p_n}\| < \varepsilon_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$. □

1.3.7. Lema. *Neka je $(x_n)_n$ Cauchyjev niz u normiranom prostoru X. Ako je neki podniz $(x_{p_n})_n$ konvergentan, onda je i niz konvergentan i ima isti limes kao i podniz.*

Dokaz: Neka je $x = \lim_n x_{p_n}$, tj.

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n'_\varepsilon \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, (n \geq n'_\varepsilon) \Rightarrow (\|x_{p_n} - x\| < \frac{\varepsilon}{2}).$$

Također,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n''_\varepsilon \in \mathbb{N}, \forall n, m \in \mathbb{N}, (n, m \geq n''_\varepsilon) \Rightarrow (\|x_n - x_m\| < \frac{\varepsilon}{2}).$$

Za $\varepsilon > 0$ po volji uzmimo $n_\varepsilon = \max\{n'_\varepsilon, n''_\varepsilon\}$. Sada za $n \geq n_\varepsilon$ imamo $p_n \geq n \geq n_\varepsilon$. Odatle slijedi $\|x_n - x\| \leq \|x_n - x_{p_n}\| + \|x_{p_n} - x\| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. □

1.3.8. Definicija. Red $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ vektora iz X je konvergentan ako niz parcijalnih suma konvergira, tj. ako postoji $x \in X$ takav da $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}$, takav da $n \geq n_\varepsilon$ povlači $\|x - \sum_{k=1}^{n} x_k\| < \varepsilon$.

Red $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ je apsolutno konvergentan ako konvergira red nenegativnih brojeva $\sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\|$, tj. $\exists M > 0$ takav da je $\sum_{k=1}^{n} \|x_k\| \leq M$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

1.3.9. Propozicija. *Normirani prostor X je potpun ako i samo ako svaki apsolutno konvergentan red u X konvergira.*

Dokaz: Pretpostavimo da svaki apsolutno konvergentan red u X konvergira. Neka je $(x_n)_n$ Cauchyjev niz u X. Prema propoziciji 1.3.6. postoji podniz $(x_{p_n})_n$ takav da vrijedi $\|x_{p_{n+1}} - x_{p_n}\| \leq \frac{1}{2^n}$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Tada konvergira red $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_{p_{n+1}} - x_{p_n}\|$, pa po pretpostavci konvergira red $\sum_{n=1}^{\infty}(x_{p_{n+1}} - x_{p_n})$. Dakle, konvergira niz parcijalnih suma $(s_n)_n$ toga reda i neka je $s = \lim_n s_n$. Parcijalne sume toga reda su $s_n = \sum_{k=1}^{n}(x_{p_{k+1}} - x_{p_k}) = x_{p_{n+1}} - x_{p_1}$, što povlači da niz $(x_{p_n})_n$ konvergira i $\lim_n x_{p_n} = x_{p_1} + s = x \in X$. Prema lemi 1.3.7. konvergira i niz $(x_n)_n$ i vrijedi $x = \lim_n x_n$, dakle X je potpun.

Obratno, neka je X Banachov prostor i neka je red $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ apsolutno konvergentan. Uzmimo $\varepsilon > 0$ po volji. Postoji $m \in \mathbb{N}$ takav da za ostatak reda vrijedi $\sum_{k=m+1}^{\infty} \|x_k\| < \varepsilon$. Tada za $p > q \geq m$ vrijedi

$$\|s_p - s_q\| = \| \sum_{k=q+1}^{p} x_k\| \leq \sum_{k=q+1}^{p} \|x_k\| \leq \sum_{k=m+1}^{\infty} \|x_k\| < \varepsilon,$$

pa je niz parcijalnih suma $(s_n)_n$ konvergentan. $\square$

1.3.10. Definicija. Potpun unitaran prostor nazivamo **Hilbertov prostor**.

U slijedećim razmatranjima važnu ulogu imaju neki osnovni pojmovi i rezultati iz teorije metričkih prostora i opće topologije.

Za $a \in X$ i $r > 0$ sa $K(a, r) = \{x \in X; \|x - a\| < r\}$ označavamo otvorenu kuglu u X radijusa r sa središtem u a, a sa $\overline{K}(a, r) = \{x \in X; \|x - a\| \leq r\}$ zatvorenu kuglu.

Skup $S \subseteq X$ je otvoren ako $\forall a \in S$ postoji $r > 0$ takav da je $K(a, r) \subseteq S$. Skup $S \subseteq X$ je zatvoren ako je $X \backslash S$ otvoren.

$\overline{S}$, zatvarač skupa S, je najmanji zatvoren skup koji sadrži S. To je presjek svih zatvorenih skupova koji sadrže S.

1.3.11. Propozicija. *Neka je $S \subseteq X$. $\overline{S}$ je skup limesa svih konvergentnih nizova u X čiji su članovi iz S.*

Dokaz: (a) Neka je T zatvoren skup u X. Neka je $(x_n)_n$ konvergentan niz u X čiji članovi su iz T i neka je $x = \lim_n x_n$. Dokažimo da je $x \in T$.

Pretpostavimo suprotno, tj. $x \in X \backslash T$. Kako je $X \backslash T$ otvoren, to postoji $r > 0$ takav da je $K(x, r) \subseteq X \backslash T$. Tada je $K(x, r) \cap T = \emptyset$, tj. $\|x - y\| \geq r$, $\forall y \in T$. Posebno je $\|x - x_n\| \geq r > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, što je kontradikcija.

(b) Ako je $(x_n)_n$ niz u S koji konvergira u X i $x = \lim_n x_n$, tada prema (a) vrijedi $x \in T$ za svaki zatvoreni $T \supseteq S$. Dakle, $x \in \overline{S}$.

(c) Neka je $x \in \overline{S}$ i $\varepsilon > 0$ bilo koji. Tada je $K(x, \varepsilon) \cap S \neq \emptyset$.

U suprotnom bi vrijedilo $K(x, \varepsilon) \cap S = \emptyset$, odnosno $S \subseteq X \backslash K(x, \varepsilon)$ i $X \backslash K(x, \varepsilon)$ je zatvoren skup. Zato je $\overline{S} \subseteq X \backslash K(x, \varepsilon)$, tj. $K(x, \varepsilon) \cap \overline{S} = \emptyset$, što je kontradikcija.

Sada $\forall n \in \mathbb{N}$ izaberemo $x_n \in S$ takav da je $\|x_n - x\| < \frac{1}{n}$. Očito je $x = \lim_n x_n$. Dakle, x je limes niza čiji članovi su iz S. $\square$

Potprostor normiranog (unitarnog) prostora je i sam normiran (unitaran) s restrikcijom norme (skalarnog produkta).

1.3.12. Propozicija. *Neka je Y potprostor normiranog prostora X.*

(a) *$\overline{Y}$ je potprostor od X.*

(b) *Ako je X potpun, onda je i $\overline{Y}$ potpun.*

(c) *Ako je Y potpun, onda je Y zatvoren.*

(d) *Ako je Y konačno dimenzionalan, onda je Y zatvoren u X.*

Dokaz: (a) Neka su $x, y \in \overline{Y}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ i $(x_n)_n$, $(y_n)_n$ nizovi u Y takvi da je $x = \lim_n x_n$, $y = \lim_n y_n$. Prema propoziciji 1.2.3.(b),(c) je $\alpha x + \beta y = \lim_n(\alpha x_n + \beta y_n) \in \overline{Y}$.

(b) Neka je $(x_n)_n$ Cauchyjev niz u $\overline{Y}$. Onda je $(x_n)_n$ konvergentan u X. Ali $\overline{Y}$ je zatvoren pa je $x = \lim_n x_n \in \overline{Y}$. Dakle, $(x_n)_n$ je konvergentan u $\overline{Y}$.

(c) Neka je $x \in \overline{Y}$. Tada postoji $(x_n)_n$ u Y takav da je $x = \lim_n x_n$. Tada je $(x_n)_n$ Cauchyjev niz u Y, pa je konvergentan u Y, tj. postoji $y \in Y$, $y = \lim_n x_n$. No, $y = x$ povlači da je $\overline{Y} \subseteq Y$, dakle $\overline{Y} = Y$.

(d) Slijedi iz (c) i iz propozicije 1.3.5. $\square$

1.3.13. Definicija. Skup $S \subseteq X$ je **kompaktan** ako svaki niz u S ima konvergentan podniz čiji limes je u S.

Ekvivalentno, svaki otvoreni pokrivač skupa S može se reducirati na konačan potpokrivač.

1.3.14. Propozicija. *Neka je X normiran prostor i $S \subseteq X$.*

(a) *Ako je S kompaktan, onda je S zatvoren i ograničen.*

(b) *Zatvoren podskup kompaktnog skupa je kompaktan.*

(c) *$\overline{S}$ je kompaktan ako i samo ako svaki niz u S ima podniz konvergentan u X. Takav skup zovemo* **relativno kompaktan**.

(d) *Relativno kompaktan skup je ograničen.*

Dokaz: (a) Neka je $x \in \overline{S}$ i $(x_n)_n$ niz u S takav da je $x = \lim_n x_n$. Niz $(x_n)_n$ ima konvergentan podniz $(x_{p_n})_n$ i $x = \lim x_{p_n} \in S$. Dakle, $S = \overline{S}$.

Pretpostavimo da S nije ograničen. Tada u S postoji niz $(x_n)_n$ takav da je $\|x_n\| \geq n$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Jasno je da taj niz nema konvergentnog podniza.

(b) je očigledno.

(c) Neka je $(x_n)_n$ niz u $\overline{S}$. Neka je $(y_n)_n$ niz u S takav da je $\|x_n - y_n\| \leq \frac{1}{n}$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Neka je $(y_{p_n})_n$ konvergentan podniz od $(y_n)_n$ i $y = \lim_n y_{p_n} \in X$. Tada vrijedi $\|y - x_{p_n}\| \leq \|y - y_{p_n}\| + \|y_{p_n} - x_{p_n}\| \leq \|y - y_{p_n}\| + \frac{1}{p_n} \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

Obrat je očigledan.

(d) Slijedi iz (a). $\square$

1.3.15. Lema. (Frigyes Riesz) *Neka je $Y \neq X$ zatvoren potprostor od X i $\varepsilon > 0$ bilo koji. Postoji $x \in X$ takav da je $\|x\| = 1$ i $\|x - y\| > 1 - \varepsilon$, $\forall y \in Y$.*

Ako je Y konačno dimenzionalan, onda postoji $x \in X$ takav da je $\|x\| = 1$ i $\|x - y\| \geq 1$, $\forall y \in Y$.

Dokaz: Možemo pretpostaviti da je $0 < \varepsilon < 1$. Neka je $0 < \delta < \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}$ i neka je $x_0 \in X \backslash Y$. Tada postoji $r > 0$ takav da je $K(x_0, r) \subseteq X \backslash Y$, tj. $K(x_0, r) \cap Y = \emptyset$, odnosno $\|x_0 - y\| \geq r$, $\forall y \in Y$. Neka je

$$d = \inf\{\|x_0 - y\|; y \in Y\} \geq r > 0.$$

Tada je $d \leq d + d\delta$, pa postoji $y_0 \in Y$ takav da je $d \leq \|x_0 - y_0\| \leq d + d\delta$. Stavimo $x = \frac{x_0 - y_0}{\|x_0 - y_0\|}$. Tada je $\|x\| = 1$ i za svaki $y \in Y$ vrijedi

$$\|x - y\| = \|\frac{x_0 - y_0}{\|x_0 - y_0\|} - y\| = \frac{1}{\|x_0 - y_0\|}\|x_0 - y_0 - \|x_0 - y_0\|y\| =$$

$$= \frac{1}{\|x_0 - y_0\|}\|x_0 - (\underbrace{y_0 + \|x_0 - y_0\|y}_{\in Y})\| \geq \frac{d}{\|x_0 - y_0\|} \geq$$

$$\geq \frac{d}{d + d\delta} = \frac{1}{1 + \delta} > \frac{1}{1 + \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}} = 1 - \varepsilon.$$

Ako je Y konačne dimenzije, onda je i $Z = \mathbb{K}x_0 + Y$ konačne dimenzije. Prema dokazanom $\forall n \in \mathbb{N}$, $\exists x_n \in Z$, $\|x_n\| = 1$, takav da je $\|x_n - y\| > 1 - \frac{1}{n}$, $\forall y \in Y$. Sada imamo niz $(x_n)_n$ u kompaktnom skupu $S = \{x \in Z; \|x\| = 1\}$, pa on ima konvergentan podniz $(x_{p_n})_n$ i neka je $x = \lim_n x_{p_n}$. Vrijedi $1 - \frac{1}{p_n} < \|x_{p_n} - y\|$, $\forall y \in Y$, a odatle u limesu slijedi $\|x - y\| \geq 1$. □

1.3.16. Napomena. Za $x \in X$ i $S \subseteq X$ uvedimo oznaku

$$d(x, S) = \inf\{\|x - y\|; y \in S\}.$$

Sada možemo lema 1.3.15. iskazati na slijedeći način:

Za zatvoren potprostor $Y \leq X$, $Y \neq X$, vrijedi $\forall \varepsilon > 0$, $\exists x \in X$, $\|x\| = 1$, takav da je $d(x, Y) \geq 1 - \varepsilon$.

U slučaju $\dim Y < \infty$ $\exists x \in X$, $\|x\| = 1$, takav da je $d(x, Y) = 1$.

1.3.17. Teorem. *Jedinična sfera u beskonačno dimenzionalnom normiranom prostoru nije kompaktan skup.*

Dokaz: Neka je $S = S(0, 1)$ jedinična sfera u X i neka je $e_1 \in S$. Tada za $Y_1 = [\{e_1\}] \leq X$ postoji $e_2 \in S$ takav da je $d(e_2, Y_1) = 1$. Nadalje, za $Y_2 = [\{e_1, e_2\}] \leq X$ postoji $e_3 \in S$ takav da je $d(e_3, Y_2) = 1$, itd. Tako dolazimo do niza $(e_n)_n$ u S za kojeg vrijedi $\|e_n - e_m\| \geq 1$, $\forall n, m \in \mathbb{N}$, $n \neq m$. Očigledno, taj niz nema konvergentan podniz. □

1.3.18. Teorem. (F. Riesz) *Normiran prostor je konačno dimenzionalan ako i samo ako je svaki njegov ograničen i zatvoren podskup kompaktan.*

Dokaz: Slijedi iz činjenice da je svaki n-dimenzionalni vektorski prostor izomorfan s $\mathbb{K}^n$ i teorema 1.3.17. □

1.3.19. Definicija. Neka su $(X, \|\cdot\|)$ i $(Y, |\!|\!|\cdot|\!|\!|)$ normirani prostori. Linearano preslikavanje $\varphi : X \to Y$ takvo da za svaki $x \in X$ vrijedi $|\!|\!|\varphi(x)|\!|\!| = \|x\|$ nazivamo **izometrija**. Ako je φ bijektivna izometrija onda kažemo da su normirani prostori X i Y **izometrički izomorfni**.

1.3.20. Definicija. **Upotpunjenje** normiranog prostora X je par (Y, φ), gdje je Y Banachov prostor, a $\varphi : X \to Y$ je izometrija takva da je njena slika $\varphi(X)$ gusta u Y.

1.3.21. Napomena. Skup $S \subseteq X$ je gust u X ako $\forall a \in X$ i $\forall \varepsilon > 0$ vrijedi $K(a, \varepsilon) \cap S \neq \emptyset$.

1.3.22. Teorem. *Neka je X normiran prostor.*

(*a*) *Postoji upotpunjenje (Y, φ) od X.*

(*b*) *Ako je prostor X unitaran i (Y, φ) njegovo upotpunjenje, onda je i Y unitaran (Hilbertov) prostor.*

(*c*) *Ako su (Y_1, φ_1) i (Y_2, φ_2) dva upotpunjenja od X, onda postoji jedinstven izometrički izomorfizam $\psi : Y_1 \to Y_2$ takav da je $\psi \circ \varphi_1 = \varphi_2$.*

Dokaz: Prvo konstruktivno dokazujemo tvrdnju (a).

(1) Neka je Z skup svih Cauchyjevih nizova u X. Z je vektorski prostor nad $\mathbb{K}$ s operacijama: $(x_n)_n + (y_n)_n = (x_n + y_n)_n$ i $\lambda(x_n)_n = (\lambda x_n)_n$. Neka je N skup svih nulnizova u X. N je potprostor od Z. Stavimo $Y = Z/N$ i neka je $\varphi : X \to Y$ definirana sa $\varphi(x) = (x, x, x, \ldots) + N$, $\forall x \in X$.

(2) Dokažimo da za svaki niz $(x_n)_n$ u Z niz brojeva $(\|x_n\|)_n$ konvergira u $\mathbb{R}$. Tvrdnja slijedi iz nejednakosti $|\|x_n\| - \|x_m\|| \leq \|x_n - x_m\|$, $\forall n, m \in \mathbb{N}$ i potpunosti polja $\mathbb{R}$.

(3) Dokažimo: ako su $(x_n)_n, (y_n)_n \in Z$ takvi da je $(x_n)_n + N = (y_n)_n + N$ (tj. $(x_n)_n - (y_n)_n \in N$), tada je $\lim_n \|x_n\| = \lim_n \|y_n\|$.

Stavimo $z_n = x_n - y_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Tada je $(z_n)_n \in N$, dakle $\lim_n z_n = 0$, a onda i $\lim_n \|z_n\| = 0$. Međutim, $|\|x_n\| - \|y_n\|| \leq \|x_n - y_n\| = \|z_n\|$, pa slijedi $\lim_n \|x_n\| = \lim_n \|y_n\| = 0$.

Zbog (2) i (3) možemo definirati preslikavanje $\xi \mapsto \|\xi\|$ sa Y u $\mathbb{R}$ sa

$$\|\xi\| = \lim_n \|x_n\|, \text{ gdje je } \xi \in Y,\ \xi = (x_n)_n + N,\ (x_n)_n \in Z.$$

(4) Dokažimo da je $\xi \mapsto \|\xi\|$ norma na Y.

(*i*) Očito je $\|\xi\| \geq 0$, $\forall \xi \in Y$.

(*ii*) Neka je $\|\xi\| = 0$. To znači da je $\xi = (x_n)_n + N$, gdje je $(x_n)_n \in Z$ takav da je $\lim_n \|x_n\| = 0$. Tada je $\lim_n x_n = 0$, dakle $(x_n)_n \in N$, a to znači da je $\xi = N = 0$ u Y.

(*iii*) $\|\alpha\xi\| = |\alpha|\|\xi\|$ za $\alpha \in \mathbb{K}$ i $\xi \in Y$ je očito.

(*iv*) Ako je $\xi = (x_n)_n + N$, $\eta = (y_n)_n + N$, tada je $\xi + \eta = (x_n + y_n)_n + N$, pa imamo $\|\xi + \eta\| = \lim_n \|x_n + y_n\| \leq \lim_n(\|x_n\| + \|y_n\|) = \|\xi\| + \|\eta\|$.

(5) Funkcija $\varphi : X \to Y$ je izometrija. Doista, za $x \in X$ je $\varphi(x) = (x_n)_n + N$, pri čemu je $x_n = x$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Dakle, $\|\varphi(x)\| = \lim_n \|x_n\| = \|x\|$.

(6) Slika $\varphi(X)$ je gusta u Y.

Ako je $\xi = (x_n)_n + N$ i $\epsilon > 0$, $(x_n)_n$ je Cauchyjev niz u X, pa postoji $m \in \mathbb{N}$ takav da vrijedi $(p, q \geq m) \Rightarrow (\|x_p - x_q\| \leq \frac{\varepsilon}{2})$.

Sada je $\|\varphi(x_m) - \xi\| = \lim_n \|x_m - x_n\| \leq \frac{\varepsilon}{2}) < \varepsilon$. Dakle, $\varphi(x_m) \in K(\xi, \epsilon) \cap \varphi(X)$, tj. $K(\xi, \epsilon) \cap \varphi(X) \neq \emptyset$.

(7) Dokažimo još da je normirani prostor Y potpun.

Neka je $(\xi^{(k)})_k$ Cauchyjev niz u Y. Prema (6) vrijedi $K(\xi^{(k)}, \frac{1}{k}) \cap \varphi(X) \neq \emptyset$, $\forall k \in \mathbb{N}$.

Dakle, postoje $x_k \in X$, $k \in \mathbb{N}$, takvi da je $\varphi(x_k) \in K(\xi^{(k)}, \frac{1}{k})$. Sada je

$$\|x_p - x_q\| = \|\varphi(x_p) - \varphi(x_q)\| \leq \|\varphi(x_p) - \xi^{(p)}\| +$$

$$+ \|\xi^{(p)} - \xi^{(q)}\| + \|\xi^{(q)} - \varphi(x_q)\| < \frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \|\xi^{(p)} - \xi^{(q)}\|.$$

Odavde se vidi da je niz $(x_k)_k$ Cauchyjev niz, tj. $(x_k)_k \in Z$.

Stavimo $\xi = (x_n)_n + N \in Y$ neka je $\varepsilon > 0$ po volji. Neka je $m \in \mathbb{N}$ takav da je $m\varepsilon > 2$ i takav da vrijedi $(p, q \geq m) \Rightarrow (\|x_p - x_q\| < \frac{\varepsilon}{2})$. Za $p \geq m$ imamo

$$\|\xi^{(p)} - \xi\| \leq \|\xi^{(p)} - \varphi(x_p)\| + \|\varphi(x_p) - \xi\| < \frac{1}{p} + \lim_q \|x_p - x_q\| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

tj. $\xi = \lim_p \xi^{(p)}$.

(b) Ako norma u X zadovoljava jednakost paralelograma, onda ju očito zadovoljava i norma u Y. Naime, za $\xi = (x_n)_n + N$, $\eta = (y_n)_n + N \in Y$ vrijedi

$$\|\xi + \eta\|^2 + \|\xi - \eta\|^2 = \lim_n (\|x_n + y_n\|^2 + \|x_n - y_n\|^2) =$$

$$= \lim_n (2\|x_n\|^2 + 2\|y_n\|^2) = 2\|\xi\|^2 + 2\|\eta\|^2.$$

(c) Neka je $\psi : \varphi_1(X) \to Y_2$ definirano sa $\psi(\varphi_1(x)) = \varphi_2(x)$, $\forall x \in X$.

ψ je dobro definirana linearna izometrija, tj.

$$\|\psi(\varphi_1(x))\| = \|\varphi_2(x)\| = \|x\| = \|\varphi_1(x)\|, \ \forall x \in X.$$

Izometriju ψ proširimo do izometrije $\psi : Y_1 \to Y_2$ (zadržimo istu oznaku) na slijedeći način:

Za $\xi \in Y_1$ postoji niz $(x_n)_n$ u X takav da je $\xi = \lim_n \varphi_1(x_n)$. Tada je $(\psi(\varphi_1(x_n)))_n$ Cauchyjev niz u Y_2, jer su φ_1 i ψ izometrije. Zbog potpunosti od Y_2, taj niz je konvergentan, pa postoji $\psi(\xi) = \lim_n \psi(\varphi_1(x_n))$.

Definicija je dobra jer ne ovisi o izboru niza koji konvergira k ξ. Naime, u slučaju da je $\xi = \lim_n \varphi_1(y_n)$ za neki drugi niz $y_n(_n)$ u X, vrijedilo bi $\varphi_1(x_n - y_n) = 0$. Odatle je $\psi(\varphi_1(x_n - y_n)) = 0 = \psi(\varphi_1(x_n)) - \psi(\varphi_1((y_n))$.

ψ je izometrija: $\|\psi(\xi)\| = \lim_n \|\psi(\varphi_1(x_n))\| = \lim_n \|\varphi_1(x_n)\| = \|\xi\|$. Očigledno vrijedi $\psi \circ \varphi_1 = \varphi_2$.

Analogno, postoji izometrija $\psi' : Y_2 \to Y_1$ takva da je $\psi' \circ \varphi_2 = \varphi_1$. Sada je $\psi \circ \psi' \circ \varphi_2 = \psi \circ \varphi_1 = \varphi_2$. Dakle, $\psi \circ \psi'|_{\varphi_2(X)} = I_{\varphi_2(X)}$, pa je $\psi \circ \psi' = I_{Y_2}$. Isto tako se vidi da je $\psi' \circ \psi = I_{Y_1}$. Linearnost slijedi iz neprekidnosti zbrajanja i množenja sa skalarom. $\square$

1.4 Primjeri normiranih prostora

Neka su $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha < \beta$, i $C([\alpha, \beta])$ je vektorski prostor svih neprekidnih funkcija $f : [\alpha, \beta] \to \mathbb{K}$.

Na tom prostoru definiramo norme:

$$\|f\|_1 = \int_\alpha^\beta |f(t)|dt, \ \|f\|_2 = \left[\int_\alpha^\beta |f(t)|^2 dt\right]^{\frac{1}{2}}, \ \|f\|_\infty = \max\{|f(t)|; t \in [\alpha, \beta]\}.$$

Norma $\|\cdot\|_2$ zadovoljava jednakost paralelograma i dolazi od skalarnog produkta $(f|g) = \displaystyle\int_\alpha^\beta f(t)\overline{g(t)}dt$.

1.4.1. Lema. *Za svaku $f \in C([\alpha, \beta])$ vrijede nejednakosti:*

$$\|f\|_1 \leq \sqrt{\beta - \alpha}\|f\|_2,$$

$$\|f\|_2 \leq \sqrt{\beta - \alpha}\|f\|_\infty,$$

$$\|f\|_1 \leq (\beta - \alpha)\|f\|_\infty.$$

Dokaz: Vrijedi $\|f\|_1 = \int_\alpha^\beta |f(t)|dt = (1||f|) \leq \|1\|_2\|f\|_2 = \sqrt{\beta - \alpha}\|f\|_2$. Također, vrijedi $\|f\|_2 = \left[\int_\alpha^\beta |f(t)|^2 dt\right]^{\frac{1}{2}} \leq \|f\|_\infty \left(\int_\alpha^\beta dt\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\beta - \alpha}\|f\|_\infty$. Treća nejednakost slijedi iz prve dvije. $\square$

1.4.2. Lema. *Ne postoji niti jedan od brojeva $M_1 > 0$, $M_2 > 0$, $M_3 > 0$ tako da vrijedi neka od sljedećih nejednakosti*

$$\|f\|_2 \leq M_1\|f\|_1, \ \forall f \in C([\alpha, \beta]),$$

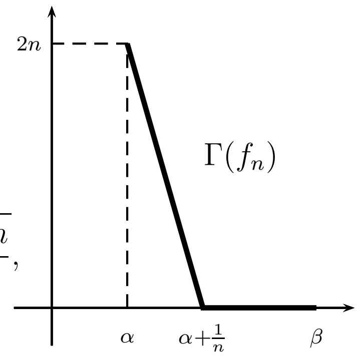
$$\|f\|_\infty \le M_2\|f\|_2,\ \forall f \in C([\alpha,\beta]),$$

$$\|f\|_\infty \le M_3\|f\|_1,\ \forall f \in C([\alpha,\beta]).$$

Dokaz: Neka je za $n \in \mathbb{N}$, $(\beta-\alpha)n > 1$, funkcija $f_n \in C([\alpha,\beta]$ definirana sa

$$f_n(t) = \begin{cases} 2n^2(\alpha - t) + 2n & ; \alpha \le t \le \alpha + \frac{1}{n}, \\ \\ 0 & ; \alpha + \frac{1}{n} \le t \le \beta. \end{cases}$$

Tada je



$$\begin{aligned} \|f_n\|_1 &= \int_\alpha^{\alpha+\frac{1}{n}} [2n^2(\alpha - t) + 2n]dt = 1, \\ \|f_n\|_2 &= \left[\int_\alpha^{\alpha+\frac{1}{n}} [2n^2(\alpha - t) + 2n]^2 dt\right]^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{4n}{3}}, \\ \|f_n\|_\infty &= 2n. \end{aligned}$$

Dakle, niz $(f_n)_n$ je ograničen u odnosu na $\|\cdot\|_1$, ali nije ograničen u normama $\|\cdot\|_2$ i $\|\cdot\|_\infty$, pa ne postoje $M_1 > 0$ i $M_3 > 0$.

Stavimo $g_n = \sqrt{\frac{3}{4n}} f_n$. Tada je $\|g_n\|_2 = 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$, tj. niz je ograničen u $\|\cdot\|_2$. Vrijedi $\|g_n\|_\infty = \sqrt{3n}$, pa niz nije ograničen u $\|\cdot\|_\infty$. Dakle, ne postoji $M_2 > 0$. $\square$

1.4.3. Lema. *Prostor* $(C([\alpha,\beta]), \|\cdot\|_\infty)$ *je potpun, a prostori* $(C([\alpha,\beta]), \|\cdot\|_1)$ *i* $(C([\alpha,\beta]), \|\cdot\|_2)$ *nisu potpuni.*

Dokaz: Neka je $(f_n)_n$ Cauchyjev niz u $(C([\alpha,\beta]), \|\cdot\|_\infty)$.

Vrijedi $|f_p(t) - f_q(t)| \le \|f_p - f_q\|_\infty$, $\forall t \in [\alpha,\beta]$. Dakle, niz brojeva $(f_n(t))_n$ je Cauchyjev niz u $\mathbb{K}$, pa je konvergentan $\forall t \in [\alpha,\beta]$. Definiramo $f : [\alpha,\beta] \to \mathbb{K}$ sa $f(t) = \lim_n f_n(t)$, $\forall t \in [\alpha,\beta]$. Dokažimo da je funkcija f neprekidna na $[\alpha,\beta]$.

Neka je $t_0 \in [\alpha,\beta]$ i $\varepsilon > 0$ bilo koji. Kako je $(f_n)_n$ Cauchyjev niz u odnosu na normu $\|\cdot\|_\infty$, postoji $m \in \mathbb{N}$ takav da vrijedi $(p, q \ge m) \Rightarrow (\|f_p - f_q\| < \frac{\varepsilon}{3})$, tj.

$$(p, q \ge m) \Rightarrow (|f_p(t) - f_q(t)| < \frac{\varepsilon}{3}), \quad \forall t \in [\alpha,\beta]. \tag{1.2}$$

Kako je f_m neprekidna u t_0, postoji $\delta > 0$ takav da vrijedi

$$\forall t \in [\alpha,\beta], \quad (|t - t_0| < \delta) \Rightarrow (|f_m(t) - f_m(t_0)| < \frac{\varepsilon}{3}). \tag{1.3}$$

Za $p \geq M$, $t \in [\alpha, \beta]$, $|t - t_0| < \delta$ iz (1.2) i (1.3) slijedi:

$$|f_p(t) - f_p(t_0)| \leq |f_p(t) - f_m(t)| + |f_m(t) - f_m(t_0)| + |f_m(t_0) - f_p(t_0)| < \varepsilon.$$

Za $p \to \infty$ dobijemo

$$\forall t \in [\alpha, \beta], \ \ (|t - t_0| < \delta) \Rightarrow (|f_(t) - f_(t_0)| < \varepsilon.$$

Dakle, f je neprekidna u t_0, $\forall t_0 \in [\alpha, \beta]$.

Dokažimo da je $f = \lim_n f_n$ u odnosu na normu $\|\cdot\|_\infty$, tj. $\lim_n \|f_n - f\|_\infty = 0$.

Neka je $\varepsilon > 0$. Postoji $n \in \mathbb{N}$ takav da vrijedi

$$(q \geq p \geq n) \Rightarrow (\|f_p - f_q\| < \varepsilon), \text{ tj. } |f_p(t) - f_q(t)| < \varepsilon, \ \forall t \in [\alpha, \beta].$$

Pustimo $q \to \infty$ pa imamo $(p \geq n) \Rightarrow (|f_p(t) - f(t)| < \varepsilon)$, $\forall t \in [\alpha, \beta]$, tj. $(p \geq n) \Rightarrow (\|f_p - f\| < \varepsilon)$. Time je dokazano da je $(C([\alpha, \beta]), \|\cdot\|_\infty)$ potpun.

Sada dokazujemo da prostori $(C([\alpha, \beta]), \|\cdot\|_1)$ i $(C([\alpha, \beta]), \|\cdot\|_2)$ nisu potpuni. U tu svrhu dovoljno je konstruirati niz funkcija $(f_n)_n$ u $C([\alpha, \beta])$ koji je Cauchyjev niz u odnosu na normu $\|\cdot\|_2$ (dakle i u odnosu na $\|\cdot\|_1$ prema lemi 1.4.1.) koji nije konvergentan u odnosu na normu $\|\cdot\|_1$ (dakle ni u odnosu na $\|\cdot\|_2$ prema lemi 1.4.1.).

Označimo $\gamma = \frac{\alpha+\beta}{2}$ i za $n \in \mathbb{N}$, $(\beta - \alpha)n \geq 2$, neka je $f_n \in C([\alpha, \beta])$ definirana sa

$$f_n(t) = \begin{cases} 0 & ; \alpha \leq t \leq \gamma - \frac{1}{n}, \\ \dfrac{1}{2} + \dfrac{n}{2}(t - \gamma) & ; \gamma - \frac{1}{n} \leq t \leq \gamma + \frac{1}{n}, \\ 1 & ; \gamma + \frac{1}{n} \leq t \leq \beta. \end{cases}$$

Za $q \geq p \geq \frac{2}{\beta - \alpha}$ imamo

$$\|f_q - f_p\|_2^2 = \int_{\gamma - \frac{1}{p}}^{\gamma + \frac{1}{p}} (f_q(t) - f_p(t))^2 dt = \int_{\gamma - \frac{1}{p}}^{\gamma + \frac{1}{q}} \left[\frac{1}{2} + \frac{p}{2}(t - \gamma)\right]^2 dt +$$

$$\int_{\gamma - \frac{1}{q}}^{\gamma + \frac{1}{q}} \left[\frac{p - q}{2}(t - \gamma)\right]^2 dt + \int_{\gamma + \frac{1}{q}}^{\gamma + \frac{1}{p}} \left[\frac{1}{2} + \frac{p}{2}(t - \gamma)\right]^2 dt = \frac{(q - p)(2q + p)}{3q^2 p} \leq \frac{1}{p}.$$

Dakle, za $q \geq p \geq \frac{2}{\beta - \alpha}$ je $\|f_q - f_p\|_2 \leq \frac{1}{\sqrt{p}}$, što pokazuje da je $(f_n)_n$ Cauchyjev niz u normi $\|\cdot\|_2$.

Dokažimo da $(f_n)_n$ nije konvergentan u normi $\|\cdot\|_1$. Pretpostavimo suprotno, tj. da postoji $f \in C([\alpha,\beta])$ takva da je $f = \lim_n f_n$.

Uzmimo $\varepsilon > 0$, $\varepsilon < \frac{\beta-\alpha}{2}$ po volji i neka je $k \in \mathbb{N}$, $k > \frac{1}{\varepsilon}$. Tada je

$$\|f - f_n\|_1 = \int_\alpha^\beta |f(t) - f_n(t)|dt \geq \int_{\gamma+\varepsilon}^\beta |f(t) - 1|dt.$$

Dakle, $f(t) = 1$, $\forall t \in [\gamma+\varepsilon, \beta]$ i $\forall \varepsilon > 0$. To znači da je $f(t) = 1$, $\forall t \in \langle \gamma, \beta]$. Analogno,

$$\|f - f_n\|_1 \geq \int_\alpha^{\gamma-\varepsilon} |f(t)|dt, \ \ \forall n > \frac{1}{\varepsilon},$$

povlači $f(t) = 0$, $\forall t \in [\alpha, \gamma-\varepsilon]$ i $\forall \varepsilon > 0$, odnosno $f(t) = 0$, $\forall t \in [\alpha, \gamma\rangle$.

Prema tome, f ima prekid u $t_0 = \gamma$. □

1.4.4. Definicija. Normiran prostor je separabilan ako posjeduje gust prebrojiv podskup.

1.4.1 Prostor ℓ_2

Označimo sa $\ell_2 = \{x = (\xi_n)_n; \xi_n \in \mathbb{K}, \forall n \in \mathbb{N}, \sum_{n=1}^\infty |\xi_n|^2 < \infty\}$.

Za takav $x \in \ell_2$ stavljamo

$$\|x\|_2 = \left(\sum_{n=1}^\infty |\xi_n|^2\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{1.4}$$

1.4.5. Teorem. *Skup ℓ_2 je separabilan Hilbertov prostor.*

Za $x, y \in \ell_2$, $x = (\xi_n)_n$, $y = (\eta_n)_n$, njihov skalarni produkt je dan sa

$$(x|y) = \sum_{n=1}^\infty \xi_n \overline{\eta_n}, \tag{1.5}$$

pri čemu red u (1.5) *apsolutno konvergira.*

Dokaz: (1) ℓ_2 je vektorski prostor i $\|\cdot\|_2$ je norma na ℓ_2.

Očito je $\|x\|_2 \geq 0$, $\forall x \in \ell_2$ i $\|x\|_2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$. Nadalje, ako je $x \in \ell_2$ i $\lambda \in \mathbb{K}$ očito je $\lambda x \in \ell_2$ i $\|\lambda x\|_2 = |\lambda| \|x\|_2$.

Neka su $x, y \in \ell_2$ i $x = (\xi_n)_n$, $y = (\eta_n)_n$. Za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$\left[\sum_{k=1}^n |\xi_k + \eta_k|^2\right]^{\frac{1}{2}} \leq \left[\sum_{k=1}^n |\xi_k|^2\right]^{\frac{1}{2}} + \left[\sum_{k=1}^n |\eta_k|^2\right]^{\frac{1}{2}} \leq \|x\|_2 + \|y\|_2,$$

odakle za $n \to \infty$ slijedi $x + y \in \ell_2$ i $\|x + y\|_2 \leq \|x\|_2 + \|y\|_2$.

(2) Za $x, y \in \ell_2$ i za $n \in \mathbb{N}$ imamo

$$\sum_{k=1}^{n} |\xi_k \overline{\eta_k}| \leq \left[\sum_{k=1}^{n} |\xi_k|^2\right]^{\frac{1}{2}} \left[\sum_{k=1}^{n} |\eta_k|^2\right]^{\frac{1}{2}} \leq \|x\|_2 \|y\|_2.$$

Za $n \to \infty$ vidimo da red u (1.5) apsolutno konvergira. Neposredno se provjerava da je sa (1.5) definiran skalarni produkt na ℓ_2 i očito $(x|x) = \|x\|_2^2$. Dakle, ℓ_2 je unitaran prostor.

(3) Dokažimo da je ℓ_2 potpun prostor.

Neka je $(x_n)_n$ Cauchyjev niz u ℓ_2, $x_n = (\xi_k^{(n)})_k$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Tada za bilo koji $\varepsilon > 0$ postoji $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ takav da za sve $n, m \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$(n, m \geq n_\varepsilon) \Rightarrow (\|x_n - x_m\|_2^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k^{(n)} - \xi_k^{(m)}|^2 < \varepsilon^2). \tag{1.6}$$

Iz (1.6) slijedi

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad (n, m \geq n_\varepsilon) \Rightarrow (|\xi_k^{(n)} - \xi_k^{(m)}| < \varepsilon),$$

tj. za svaki $k \in \mathbb{N}$ je $(\xi_k^{(n)})_n$ Cauchyjev niz u $\mathbb{K}$.

Stavimo $\xi_k = \lim_n \xi_k^{(n)}$ i $x = (\xi_k)_k$. Iz (1.6) slijedi da $\forall p \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$(n, m \geq n_\varepsilon) \Rightarrow (\sum_{k=1}^{p} |\xi_k^{(n)} - \xi_k^{(m)}|^2 < \varepsilon^2).$$

Pustimo da $m \to \infty$, pa $\forall p \in \mathbb{N}$ vrijedi.

$$(n \geq n_\varepsilon) \Rightarrow (\sum_{k=1}^{p} |\xi_k^{(n)} - \xi_k|^2 < \varepsilon^2).$$

Sada za $p \to \infty$ imamo

$$(n \geq n_\varepsilon) \Rightarrow (\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k^{(n)} - \xi_k|^2 \leq \varepsilon^2).$$

To prvo pokazuje da za svaki $n \geq n_\varepsilon$ niz $z_n = (\xi_k^{(n)} - \xi_k)_k = x_n - x \in \ell_2$, pa je i $x = x_n - z_n \in \ell_2$, jer je ℓ_2 vektorski prostor. Nadalje, $(n \geq n_\varepsilon) \Rightarrow (\|x_n - x\|_2 \leq \varepsilon)$, tj. $x = \lim_n x_n$ u normi od ℓ_2.

(4) Dokažimo još da je Hilbertov prostor ℓ_2 separabilan.

Neka je S_n, $n \in \mathbb{N}$ skup svih nizova $x = (\xi_k)_k$ u $\mathbb{K}$ takvih da je $\xi_k = 0$, $\forall k \in \mathbb{N}$, $k \geq n$, pri čemu su $\operatorname{Re}\xi_k, \operatorname{Im}\xi_k \in \mathbb{Q}$. Neka je $S = \cup_{n\in\mathbb{N}} S_n$. Svaki S_n je prebrojiv, pa je i S prebrojiv.

Neka je $x = (\xi_k)_k \in \ell_2$ bilo koji i $\varepsilon > 0$ po volji. Tada je $\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^2$ konvergentan red pa postoji $n \in \mathbb{N}$ takav da je $\sum_{k=n+1}^{\infty} |\xi_k|^2 < \frac{\varepsilon^2}{4}$. Stavimo $z = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, 0, 0, \ldots)$, pa je $\|x - z\|_2 < \frac{\varepsilon}{2}$. Izaberimo sada $\eta_1, \ldots, \eta_n$ takve da je $\operatorname{Re}\eta_j, \operatorname{Im}\eta_j \in \mathbb{Q}$ za $j = 1, \ldots, n$ i da je $|\xi_j - \eta_j| \leq \frac{\varepsilon}{2\sqrt{n}}$ za $j = 1, \ldots, n$. Tada je $y = (\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n, 0, 0, \ldots) \in S$ i

$$\|z - y\|_2 = \left[\sum_{k=1}^{n} |\xi_k - \eta_k|^2\right]^{\frac{1}{2}} \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

odatle je $\|x - y\|_2 \leq \|x - z\|_2 + \|z - y\|_2 < \varepsilon$, dakle, $y \in K(x, \varepsilon) \cap S$, tj. $K(x, \varepsilon) \cap S \neq \emptyset$. □

1.4.2 Prostor ℓ_1

Označimo sa $\ell_1 = \{x = (\xi_n)_n ; \xi_n \in \mathbb{K}, \forall n \in \mathbb{N}, \sum_{n=1}^{\infty} |\xi_n| < \infty\}$.

Za takav $x \in \ell_1$ stavljamo

$$\|x\|_1 = \sum_{n=1}^{\infty} |\xi_n|. \tag{1.7}$$

1.4.6. Teorem. *Skup ℓ_1 je separabilan Banachov prostor.*

Dokaz: ℓ_1 je vektorski prostor i $\|\cdot\|_1$ je norma na ℓ_1.

Očito je $\|x\|_1 \geq 0$, $\forall x \in \ell_1$ i $\|x\|_1 = 0 \Leftrightarrow x = 0$. Nadalje, ako je $x \in \ell_1$ i $\lambda \in \mathbb{K}$ očito je $\lambda x \in \ell_1$ i $\|\lambda x\|_1 = |\lambda| \|x\|_1$.

Neka su $x, y \in \ell_1$ i $x = (\xi_n)_n$, $y = (\eta_n)_n$. Za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$\sum_{k=1}^{n} |\xi_k + \eta_k| \leq \sum_{k=1}^{n} |\xi_k| + \sum_{k=1}^{n} |\eta_k| \leq \|x\|_1 + \|y\|_1,$$

odakle za $n \to \infty$ slijedi $x + y \in \ell_1$ (ℓ_1 je vektorski prostor) i $\|x + y\|_1 \leq \|x\|_1 + \|y\|_1$ ($\|\cdot\|_1$ je norma na ℓ_1).

(2) Dokažimo da je ℓ_1 potpun prostor.

Neka je $(x_n)_n$ Cauchyjev niz u ℓ_1, $x_n = (\xi_k^{(n)})_k$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Tada za bilo koji $\varepsilon > 0$ postoji $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ takav da za sve $n, m \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$(n, m \geq n_\varepsilon) \Rightarrow (\|x_n - x_m\|_1 = \sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k^{(n)} - \xi_k^{(m)}| < \varepsilon). \tag{1.8}$$

Iz (1.8) slijedi

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad (n, m \geq n_\varepsilon) \Rightarrow (|\xi_k^{(n)} - \xi_k^{(m)}| < \varepsilon),$$

tj. za svaki $k \in \mathbb{N}$ je $(\xi_k^{(n)})_n$ Cauchyjev niz u $\mathbb{K}$.

Stavimo $\xi_k = \lim_n \xi_k^{(n)}$ i $x = (\xi_k)_k$. Iz (1.8) slijedi da $\forall p \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$(n, m \geq n_\varepsilon) \Rightarrow (\sum_{k=1}^{p} |\xi_k^{(n)} - \xi_k^{(m)}| < \varepsilon).$$

Pustimo da $m \to \infty$, pa $\forall p \in \mathbb{N}$ vrijedi.

$$(n \geq n_\varepsilon) \Rightarrow (\sum_{k=1}^{p} |\xi_k^{(n)} - \xi_k| < \varepsilon).$$

Sada za $p \to \infty$ imamo

$$(n \geq n_\varepsilon) \Rightarrow (\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k^{(n)} - \xi_k| \leq \varepsilon).$$

To prvo pokazuje da za svaki $n \geq n_\varepsilon$ niz $z_n = (\xi_k^{(n)} - \xi_k)_k = x_n - x \in \ell_1$, pa je i $x = x_n - z_n \in \ell_1$, jer je ℓ_1 vektorski prostor. Nadalje, $(n \geq n_\varepsilon) \Rightarrow (\|x_n - x\|_1 \leq \varepsilon)$, tj. $x = \lim_n x_n$ u normi od ℓ_1.

(3) Dokažimo još da je Banachov prostor ℓ_1 separabilan.

Neka je S_n, $n \in \mathbb{N}$ skup svih nizova $x = (\xi_k)_k$ u $\mathbb{K}$ takvih da je $\xi_k = 0$, $\forall k \in \mathbb{N}$, $k \geq n$, pri čemu su $\operatorname{Re} \xi_k, \operatorname{Im} \xi_k \in \mathbb{Q}$. Neka je $S = \cup_{n \in \mathbb{N}} S_n$. Svaki S_n je prebrojiv, pa je i S prebrojiv.

Neka je $x = (\xi_k)_x \in \ell_1$ bilo koji i $\varepsilon > 0$ po volji. Tada je $\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|$ konvergentan red pa postoji $n \in \mathbb{N}$ takav da je $\sum_{k=n+1}^{\infty} |\xi_k| < \frac{\varepsilon}{2}$. Stavimo $z = (\xi_1, \xi_1, \ldots, \xi_n, 0, 0, \ldots)$, pa je $\|x - z\|_1 < \frac{\varepsilon}{2}$. Izaberimo sada $\eta_1, \ldots, \eta_n$ takve da je $\operatorname{Re} \eta_j, \operatorname{Im} \eta_j \in \mathbb{Q}$ za $j = 1, \ldots, n$ i da je $|\xi_j - \eta_j| \leq \frac{\varepsilon}{2n}$ za $j = 1, \ldots, n$. Tada je $y = (\eta_1, \eta_1, \ldots, \eta_n, 0, 0, \ldots) \in S$ i

$$\|z - y\|_1 = \sum_{k=1}^{n} |\xi_k - \eta_k| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

odatle je $\|x - y\|_1 \leq \|x - z\|_1 + \|z - y\|_1 < \varepsilon$, dakle, $y \in K(x, \varepsilon) \cap S$, tj. $K(x, \varepsilon) \cap S \neq \emptyset$. $\square$

1.4.3 Prostor ℓ_∞

Označimo sa $\ell_\infty = \{x = (\xi_n)_n; \xi_n \in \mathbb{K}, \forall n \in \mathbb{N}, \sup\{|\xi_n|; n \in \mathbb{N}\} < \infty\}$.

Za takav $x \in \ell_\infty$ stavljamo

$$\|x\|_\infty = \sup\{|\xi_n|; n \in \mathbb{N}\}. \tag{1.9}$$

1.4.7. Teorem. *Skup ℓ_∞ je neseparabilan Banachov prostor.*

Dokaz: ℓ_∞ je vektorski prostor i $\|\cdot\|_\infty$ je norma na ℓ_∞.

Očito je $\|x\|_\infty \geq 0$, $\forall x \in \ell_\infty$ i $\|x\|_\infty = 0 \Leftrightarrow x = 0$. Nadalje, ako je $x \in \ell_\infty$ i $\lambda \in \mathbb{K}$ očito je $\lambda x \in \ell_\infty$ i $\|\lambda x\|_\infty = |\lambda|\|x\|_\infty$.

Neka su $x, y \in \ell_\infty$ i $x = (\xi_n)_n$, $y = (\eta_n)_n$. Za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$\|x+y\|_\infty = \sup\{|\xi_k + \eta_k|; k \in \mathbb{N}\} \leq \sup\{|\xi_k| + |\eta_k|; k \in \mathbb{N}\} \leq$$

$$\leq \sup\{|\xi_k|; k \in \mathbb{N}\} + \sup\{|\eta_k|; k \in \mathbb{N}\} = \|x\|_\infty + \|y\|_\infty,$$

odakle slijedi $x+y \in \ell_\infty$ (ℓ_∞ je vektorski prostor) i $\|x+y\|_\infty \leq \|x\|_\infty + \|y\|_\infty$ ($\|\cdot\|_\infty$ je norma na ℓ_∞).

(2) Dokažimo da je ℓ_∞ potpun prostor.

Neka je $(x_n)_n$ Cauchyjev niz u ℓ_∞, $x_n = (\xi_k^{(n)})_k$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Tada za bilo koji $\varepsilon > 0$ postoji $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ takav da za sve $n, m \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$(n, m \geq n_\varepsilon) \Rightarrow (\|x_n - x_m\|_\infty = \sup\{|\xi_k^{(n)} - \xi_k^{(m)}|; k \in \mathbb{N}\} < \varepsilon). \tag{1.10}$$

Iz (1.10) slijedi

$$\forall k \in \mathbb{N}, \ \ (n, m \geq n_\varepsilon) \Rightarrow (|\xi_k^{(n)} - \xi_k^{(m)}| < \varepsilon),$$

tj. za svaki $k \in \mathbb{N}$ je $(\xi_k^{(n)})_n$ Cauchyjev niz u $\mathbb{K}$.

Stavimo $\xi_k = \lim_n \xi_k^{(n)}$ i $x = (\xi_k)_k$. Pustimo da $m \to \infty$, pa imamo

$$(n \geq n_\varepsilon) \Rightarrow (\sup\{|\xi_k^{(n)} - \xi_k|; k \in \mathbb{N}\} \leq \varepsilon).$$

To prvo pokazuje da za svaki $n \geq n_\varepsilon$ niz $z_n = (\xi_k^{(n)} - \xi_k)_k = x_n - x \in \ell_\infty$, pa je i $x = x_n - z_n \in \ell_\infty$, jer je ℓ_∞ vektorski prostor. Nadalje, $(n \geq n_\varepsilon) \Rightarrow (\|x_n - x\|_\infty \leq \varepsilon)$, tj. $x = \lim_n x_n$ u normi od ℓ_∞.

(3) Dokažimo još da je Banachov prostor ℓ_∞ neseparabilan.

Za $S \subseteq \mathbb{N}$, $S \neq \emptyset$, neka je $x_S = (\xi_k)_k$ karakteristična funkcija skupa S, tj. $\xi_k = 1$ ako je $k \in S$ i $\xi_k = 0$ ako je $k \notin S$. Tada je $\|x_S\|_\infty = 1$, $\forall S \neq \emptyset$. Također, $S_1 \neq S_2$ povlači $\|x_{S_1} - x_{S_2}\|_\infty = 1$, odnosno, za $S_1 \neq S_2$ vrijedi $K(x_{S_1}, \frac{1}{2}) \cap K(x_{S_2}, \frac{1}{2}) = \emptyset$. Familija skupova $\{K(x_{S_1}, \frac{1}{2}); S \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) \backslash \{\emptyset\}\}$ je neprebrojiva i svi članovi su međusobno disjunktni.

Neka je $A \subseteq \ell_\infty$ prebrojiv skup. Kada bi A bio gust u ℓ_∞, onda bi za svaki $S \in \mathcal{P}(\mathbb{N})\backslash\{\emptyset\}$ bilo $A \cap \{K(x_S, \frac{1}{2}) \neq \emptyset$, pa izaberimo $x(S) \in A \cap \{K(x_S, \frac{1}{2})$. Tada je $S \mapsto X(S)$ preslikavanje sa $\mathcal{P}(\mathbb{N})\backslash\{\emptyset\}$ u A. Zbog disjunktnosti kugala $K(x_S, \frac{1}{2})$ to preslikavanje je injekcija, pa je njegova slika, koja je podskup od A, neprebrojiva, što je u kontradikciji s prebrojivosti skupa A. □

1.5 Konveksnost u normiranim prostorima

Neka je X vektorski prostor i $x, y \in X$. Skup $[x, y] = \{(1-t)x+ty; 0 \leq t \leq 1\}$ nazivamo **segment** s krajevima x, y.

1.5.1. Definicija. Skup $K \subseteq X$ je **konveksan** ako za bilo koje dvije točke $x, y \in K$ vrijedi $[x, y] \subseteq K$.

1.5.2. Propozicija. *Neka je X normiran prostor, $x_0 \in X$ i $r > 0$. Kugle $K(x_0, r)$ $\overline{K}n(x_0, r)$ su konveksni skupovi u X.*

Dokaz: Za $x, y \in K(x_0, r)$ i $t \in [0, 1]$ imamo

$$\|[(1-t)x + ty] - x_0\| = \|(1-t)(x - x_0) + t(y - x_0)\| \leq$$

$$\leq (1-t)\underbrace{\|x - x_0\|}_{<r} + t\underbrace{\|y - x_0\|}_{<r} < r.$$

Analogno se dokazuje za $x, y \in \overline{K}(x_0, r)$. □

1.5.3. Propozicija. *Ako je S konveksan podskup normiranog prostora X, onda je i njegov zatvarač $\overline{S}$ konveksan.*

Dokaz: Neka su $x, y \in \overline{S}$, neka je $t \in [0, 1]$ i neka je $z = (1-t)x + ty$. Neka su $(x_n)_n$ i $(y_n)_n$ nizovi u S takvi da je $x = \lim_n x_n$ i $y = \lim_n y_n$. Tada, zbog konveksnost skupa S vrijedi $z_n = (1-t)x_n + ty_n \in S$, $\forall n \in \mathbb{N}$, tj. $(z_n)_n$ je niz u S i vrijedi $(1-t)x + ty = (1-t)\lim_n x_n + t\lim_n y_n = \lim_n z_n \in \overline{S}$. □

Evidentno je da je presjek bilo koje familije konveksnih podskupova vektorskog prostora konveksan skup. Stoga, sa bilo koji neprazan podskup $S \subseteq X$ postoji najmanji konveksan skup koji sadrži skup S. Njega označavamo sa $\mathrm{co}\,(S)$ i nazivamo **konveksna ljuska** skupa S.

Nadalje, presjek bilo koje familije zatvorenih konveksnih podskupova normiranog prostora je zatvoren konveksan skup. Stoga, sa bilo koji neprazan podskup $S \subseteq X$ postoji najmanji zatvoren konveksan skup koji sadrži skup

S. Njega označavamo sa $\overline{\text{co}}\,S$ i nazivamo **zatvorena konveksna ljuska** skupa S.

konveksna kombinacija vektora $x_1, \ldots, x_n \in X$ je linearna kombinacija $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k$ pri čemu su $\lambda_k \geq 0$ $(k = 1, \ldots, n)$ i $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k = 1$.

1.5.4. Propozicija. *Neka je X vektorski prostor i $S \subseteq X$.*

(*a*) co (S) *je skup svih konveksnih kombinacija vektora iz S.*

(*b*) *Ako je X normiran prostor onda je $\overline{\text{co}}\,S$ zatvarač od* co (S), *tj.* $\overline{\text{co}}\,(S) = \overline{\text{co}\,(S)}$.

Dokaz: (a) Neka je T skup svih konveksnih kombinacija vektora iz S.

(1) Dokažimo da je T konveksan skup. Za $x, y \in T$ postoje $x_1, \ldots, x_n \in S$ i $\lambda_k, \mu_k \geq 0$ $(k = 1, \ldots, n)$ i $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k = \sum_{k=1}^{n} \mu_k = 1$, takvi da vrijedi $x = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k$ i $y = \sum_{k=1}^{n} \mu_k x_k$. Za $t \in [0, 1]$ stavimo $\alpha_k = (1-t)\lambda_k + t\mu_k$, $(k = 1, \ldots, n)$. Tada su $\alpha_k \geq 0$ $(k = 1, \ldots, n)$ i $\sum_{k=1}^{n} \alpha_k = (1-t) \sum_{k=1}^{n} \lambda_k + t \sum_{k=1}^{n} \mu_k = 1$. Nadalje, vrijedi $\sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k = (1-t)x + ty \in T$. Budući je očigledno $S \subseteq T$, imamo co $(S) \subseteq T$.

(2) Dokažimo da je $T \subseteq$ co (S). U tu svrhu treba dokazati da za svaki konveksan skup K koji sadrži S vrijedi $T \subseteq K$. Neka je, dakle, K konveksan skup i neka je $x \in T$. Tada je

$$x = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k \text{ za } x_1, \ldots, x_n \in S \text{ i } \lambda_k \geq 0 \ (k = 1, \ldots, n), \sum_{k=1}^{n} \lambda_k = 1. \quad (1.11)$$

Trebamo dokazati da je $x \in K$. To ćemo dokazati indukcijom u odnosu na $n \in \mathbb{N}$.

Baza indukcije: Za $n = 1$ je $x = \lambda_1 x_1$, $\lambda_1 = 1$, pa je $x = x_1 \in S \subseteq K$.

Korak indukcije: Pretpostavimo da je $n \geq 2$ i da je dokazano:

Ako je $y = \sum_{k=1}^{n-1} \mu_k x_k$, $y_1, \ldots, y_n \in S$ i $\mu_k \geq 0$ $(k = 1, \ldots, n-1)$, $\sum_{k=1}^{n-1} \mu_k = 1$, onda je $y \in K$.

Neka sada vrijedi (1.11). Ako je $\lambda_n = 1$, onda je $x = x_n \in K$. Isto tako za $\lambda_n = 0$ vrijedi $x \in K$ po pretpostavci indukcije. U slučaju kada $0 < \lambda_n < 1$ vrijedi $\mu = \sum_{k=1}^{n-1} \lambda_k = 1 - \lambda_n > 0$. Stavimo $\mu_k = \frac{\lambda_k}{\mu}$ $(k = 1, \ldots, n-1)$. Tada je $\sum_{k=1}^{n-1} \mu_k = 1$, pa iz pretpostavke indukcije slijedi $y = \sum_{k=1}^{n-1} \mu_k x_k \in K$. Sada je $x = \mu y + \lambda_n x_n = (1 - \lambda_n)y + \lambda_n x_n \in K$, jer je K konveksan.

Tako smo dokazali da vrijedi $T \subseteq K$, za svaki konveksan K takav da je $S \subseteq K$. Odatle zaključujemo da vrijedi $T \subseteq$ co (S).

(b) Skup co (S) je konveksan, pa je po propoziciji 1.5.3. i zatvarač $\overline{\text{co}\,(S)}$ konveksan. Sada je $\overline{\text{co}\,(S)}$ zatvoren konveksan skup koji sadrži S, dakle, $\overline{\text{co}}\,(s) \subseteq \overline{\text{co}\,(S)}$.

Neka je K zatvoren konveksan skup kojim sadrži S. Kako je K konveksan, to je i $\overline{\mathrm{co}\,(S)} \subseteq K$. To pokazuje da je $\overline{\mathrm{co}\,(S)} \subseteq K$ za svaki zatvoren konveksan skup K koji sadrži S. Dakle, $\overline{\mathrm{co}\,(S)} \subseteq \overline{\mathrm{co}}\,(S)$. □

1.6 Ograničeni linearni operatori na normiranim prostorima

Ako su X i Y vektorski prostori nad $\mathbb{K}$, sa $L(X,Y)$ označavamo vektorski prostor svih linearnih operatora $A : X \to Y$.

1.6.1. Propozicija. *Neka su X i Y normirani prostori i $A \in L(X,Y)$. Slijedeća svojstva operatora A su međusobno ekvivalentna.*

(a) *A je neprekidan u nekoj točki $x_0 \in X$.*

(b) *A je neprekidan (u svakoj točki $x_0 \in X$).*

(c) *A je uniformno neprekidan na X.*

(d) *A je ograničen ($\exists M > 0$ takav da vrijedi $\|Ax\| \le M\|x\|, \forall x \in X$).*

Dokaz: Očito vrijede implikacije $(d) \Rightarrow (c) \Rightarrow (b) \Rightarrow (a)$. Prva implikacija vrijedi zbog $\|Ax - Ax_0\| \le M\|x - x_0\|, \forall x, x_0 \in X$.

$((a) \Rightarrow (b))$ Zbog linearnosti operatora A i neprekidnost zbrajanja i oduzimanja u X imamo

$$x = \lim_n x_n \Rightarrow x_0 = \lim_n x_n - x + x_0 = \lim_n (x_n - x + x_0) \Rightarrow Ax_0 = \lim_n A(x_n - x + x_0) =$$

$$= \lim_n (Ax_n - Ax + Ax_0) = \lim_n Ax_n - Ax + Ax_0 \Rightarrow Ax = \lim_n Ax_n.$$

$((b) \Rightarrow (d))$ A je neprekidan u 0 i $A0 = 0$. Dakle, za $\varepsilon = 1$ postoji $\delta > 0$ takav da vrijedi $\forall x \in X$, $(\|x\| < \delta) \Rightarrow (\|Ax\| \le 1)$.

Neka je $x \in X$, $x \neq 0$, po volji. Stavimo $y = \frac{\delta}{\|x\|}x$. Tada je $\|y\| = \delta$ pa je $\|Ax\| \le M\|x\|$ za $M = \frac{1}{\delta}$. □

Dakle, A je neprekidan ako i samo ako je ograničen.

Sa $B(X,Y)$ označavamo skup svih ograničenih $A \in L(X,Y)$. Očito je $B(X,Y)$ potprostor od $L(x,Y)$. Naime,

$$\|Ax\| \le M\|x\|, \|Bx\| \le N\|x\| \to \|(\lambda A + \mu B)x\| \le (|\lambda|M + |\mu|N)\|x\|.$$

1.6.2. Propozicija. *Ako je X konačne dimenzije onda je $B(X,Y) = L(X,Y)$.*

Dokaz: Neka je $A \in L(X,Y)$ i neka je $\{e_1,\dots,e_n\}$ baza od X. Za $x \in X$, $x = \sum_{k=1}^n \xi_k e_k$, stavimo $\|x\|_\infty = \max\{|\xi_j|; 1 \le j \le n\}$. Tada je $x \mapsto \|x\|_\infty$ norma na X, a kako je X konačne dimenzije, prema teoremu 1.2.5. ona je ekvivalentna s originalnom normom $x \mapsto \|x\|$. Dakle, postoje $\alpha > 0$ i $\beta > 0$ takvi da vrijedi $\alpha\|x\| \le \|x\|_\infty \le \beta\|x\|$, $\forall x \in X$.

Neka je $M > 0$ takav da je $\sum_{k=1}^n \|Ae_k\| \le \frac{M}{\beta}$. Tada za $x = \sum_{k=1}^n \xi_k e_k$ imamo

$$\|Ax\| = \|\sum_{k=1}^n \xi_k A e_k\| \le \sum_{k=1}^n |\xi_k|\|Ae_k\| \le \|x\|_\infty \sum_{k=1}^n \|Ae_k\| \le M\|x\|,$$

tj. A je ograničen operator. □

Za $A \in B(X,Y)$ stavljamo

$$\|A\| = \sup\{\|Ax\|; x \in X, \|x\| \le 1\} = \sup\{\|Ax\|; x \in X, \|x\| = 1\}. \quad (1.12)$$

Iz definicije je jasno da je

$$\|Ax\| \le \|A\|\|x\|, \ \ \forall A \in B(X,Y),\ \forall x \in X.$$

Nadalje, $\|A\|$ je najmanji broj $M \ge 0$ takav da vrijedi

$$\|Ax\| \le M\|x\|, \ \ \forall x \in X.$$

Napokon, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists x \in X$, $x \ne 0$, takav da je

$$\|Ax\| \ge (\|A\| - \varepsilon)\|x\|.$$

1.6.3. Teorem. *Preslikavanje $A \mapsto \|A\|$ je norma na vektorskom prostoru $B(X,Y)$. Ako je prostor Y Banachov , onda je i $B(X,Y)$ Banachov.*

Ako je prostor Y Banachov prostor i ako je $X_0 \le X$ gust potprostor u X, za svaki $A \in B(X_0,Y)$ postoji jedinstven $\overline{A} \in B(X,Y)$ takav da je $\overline{A}|_{X_0} = A$ i vrijedi $\|\overline{A}\| = \|A\|$.

Dokaz: (1) Očito je $\|A\| \ge 0$ i $\|A\| = 0 \Leftrightarrow A = 0$. Nadalje, očito je $\|\lambda A\| = |\lambda|\|A\|$, $\forall \lambda \in \mathbb{K}$, $\forall A \in B(X,Y)$. Napokon, za $A, B \in B(X,Y)$ imamo

$$\|(A+B)x\| \le \|Ax\| + \|Bx\| \le (\|A\| + \|B\|)\|x\|, \quad \forall A, B \in B(X,Y),$$

dakle, $\|A+B\| \le \|A\| + \|B\|$.

(2) Neka je Y potpun, neka je $(A_n)_n$ Cauchyjev niz u $B(X,Y)$ i $\varepsilon > 0$ po volji. Tada postoji $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ takav da $\forall n, m \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$(n, m \geq n_\varepsilon) \Rightarrow (\|A_n - A_m\| \leq \varepsilon).$$

Odavde odmah slijedi da je za svaki $x \in X$ niz $(A_n x)_n$ Cauchyjev, tj.

$$(n, m \geq n_\varepsilon) \Rightarrow (\|A_n x - A_m x\| \leq \varepsilon \|x\|). \tag{1.13}$$

Y je potpun , pa taj niz konvergira u Y i označimo $Ax = \lim_n A_n x$, $\forall x \in X$. Na taj način je definiran $A \in L(X,Y)$, budući da zbog neprekidnost zbrajanja i množenja sa skalarom vrijedi

$$A(\lambda x + \mu y) = \lim_n A_n(\lambda x + \mu y) = \lim_n(\lambda A_n x + \mu A_n y) =$$

$$= \lambda \lim_n A_n x + \mu \lim_n A_n y = \lambda Ax + \mu Ay.$$

Ako u (1.13) pustimo $m \to \infty$, dobivamo

$$(n \geq n_\varepsilon) \Rightarrow (\|A_n x - Ax\| \leq \varepsilon \|x\|). \tag{1.14}$$

Dakle, za $n \geq n_\varepsilon$ je $A_n - A \in B(X,Y)$, pa je i $A = A_n - (A_n - A) \in B(X,Y)$. Konačno, (1.14) vrijedi $\forall x \in X$, pa dobijemo

$$(n \geq n_\varepsilon) \Rightarrow (\|A_n - A\| \leq \varepsilon).$$

Dakle, $B(X,Y)$ je potpun.

(3) Neka je Y potpun, $X_0 \leq X$ gust potprostor u X i $A \in B(X_0, Y)$. Neka je $x \in X$ i neka je $(x_n)_n$ niz u X_0 takav da je $x = \lim_n x_n$. Zbog ograničenost operatora A, niz $(Ax_n)_n$ je Cauchyjev u Y. Označimo s $\overline{A}x = \lim_n Ax_n$.

$\overline{A}x$ ne ovisi o izboru niza $(x_n)_n$ u X_0. takvog da je $x = \lim_n x_n$. Doista, ako je $(y_n)_n$ niz u X_0 takav da je $x = \lim_n y_n$, tada je $\lim_n(x_n - y_n) = 0$, pa vrijedi $0 = A0 = A(\lim_n(x_n - y_n)) = \lim_n(Ax_n - Ay_n) = \lim_n Ax_n - \lim_n Ay_n$.

Nadalje, $\overline{A} : X \to Y$ je linearan jer za $x = \lim_n x_n$ i $y = \lim_n y_n$ vrijedi $\lambda x + \mu y = \lim_n(\lambda x_n + \mu y_n)$, pa imamo $\overline{A}(\lambda x + \mu y) = \lim_n A(\lambda x_n + \mu y_n) = \lim_n(\lambda A x_n + \mu A y_n) = \lambda \overline{A} x + \mu \overline{A} y$.

Napokon, očito je $\|A\| \leq \|\overline{A}\|$. S druge strane, ako je $x \in X$ i $(x_n)_n$ niz u X_0 takav da je $x = \lim_n x_n$, onda je $\|\overline{A}x\| = \lim_n \|Ax_n\| \leq \lim_n \|A\|\|x_n\| = \|A\|\|x\|$, pa je $\overline{A}\| \leq \|A\|$.

Jedinstvenost $\overline{A}$ slijedi iz gustoće X_0 u X i iz neprekidnosti operatora $\overline{A}$. $\square$

Posebno, $B(X, \mathbb{K})$ je Banachov prostor za svaki normirani prostor X, jer je $\mathbb{K}$ potpun prostor dimenzije 1.

Imamo oznake:

$L(X, \mathbb{K}) = X^\sharp$ je algebarski dual od X.

$B(X, \mathbb{K}) = X' \leq X^\sharp$ dual od X.

Dakle, dual X' normiranog prostora X je Banachov prostor.

1.6.4. Propozicija. *Za normirane prostore X, Y, Z i $A \in B(X, Y)$, $B \in B(Y, Z)$ je $BA \in B(X, Z)$ i $\|BA\| \leq \|B\|\|A\|$.*

Dokaz: Za svaki $x \in X$ vrijedi $\|BAx\| \leq \|B\|\|Ax\| \leq \|B\|\|A\|\|x\|$. □

Za $A \in L(X, Y)$ je sa $(A^\sharp f)(x) = f(Ax)$, $\forall x \in X$, $\forall f \in Y^\sharp$, definiran $A^\sharp \in L(Y^\sharp, X^\sharp)$.

1.6.5. Propozicija. *Za normirane prostore X, Y, Z i $A \in B(X, Y)$ je operator $A' = A^\sharp|_{Y'} \in B(Y', X'))$.*

$A \to A'$ je linearno preslikavanje sa $B(X, Y)$ u $B(Y', X')$ i vrijedi $(BA)' = A'B'$, $\forall A \in B(X, Y)$, $\forall B \in B(Y, Z)$.

Također je $\|A'\| \leq \|A\|$, $\forall A \in B(X, Y)$.

Dokaz: Za $f \in Y'$ je $A'f = A^\sharp f = f \circ A \in B(X, \mathbb{K}) = X'$, dakle, $A' \in L(Y', X')$. Nadalje, za $f \in Y'$ imamo

$$\|A'f\| = \sup\{|(A'f)(x)|; x \in X, \|x\| = 1\} = \sup\{|f(Ax)|; x \in X, \|x\| = 1\} \leq$$

$$\leq \sup\{\|f\|\|Ax\|; x \in X, \|x\| = 1\} = \|A\|\|f\|.$$

Dakle, $A' \in B(Y', X')$ i $\|A'\| \leq \|A\|$. Ostale tvrdnje slijede iz odgovarajućih svojstava preslikavanja $A \to A^\sharp$. □

1.7 Prostori ℓ_p i L_p

Već prije smo definirali Banachove prostore ℓ_1, ℓ_2 iℓ_∞. Sada ćemo definirati ℓ_p za bilo koji $p \in [1, \infty\rangle$.

Označimo sa $\ell_p = \{x = (\xi_n)_n; \xi_n \in \mathbb{K}, \forall n \in \mathbb{N}, \sum_{n=1}^{\infty} |\xi_n|^p < \infty\}$.

Za takav $x \in \ell_p$ stavljamo

$$\|x\|_p = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |\xi_n|^p \right)^{\frac{1}{p}}. \tag{1.15}$$

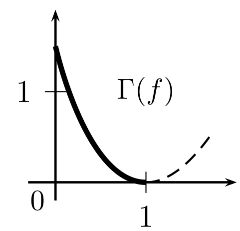
1.7.1. Lema. *Za $p>1$ i $q>1$ takve da je $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ i za $a,b\geq 0$ vrijedi*

$$ab \leq \frac{a^p}{p}+\frac{b^q}{q}. \tag{1.16}$$

Pri tome znak jednakosti vrijedi ako i samo ako je $a^p=b^q$.

Dokaz: Uočimo da je $q=\frac{p}{p-1}$, dakle $1+\frac{q}{p}=q$ $(p+q=pq)$.

Definiramo $f:\langle 0,\infty\rangle \to \mathbb{R}$ sa $f(t)=qt^p-qpt+p$. Odredimo ekstreme funkcije f. Vrijedi $f'(t)=pqt^{p-1}-pq$, dakle, iz $f'(t)=0$ slijedi $t=1$, pa je u toj točki jedini mogući ekstrem funkcije f. Nadalje, $f''(t)=pq(p-1)t^{p-2}$, pa je $f''(1)=pq(p-1)>0$. Prema tome, u točki $t=1$ je strogi minimum funkcije f na $\langle 0,\infty\rangle$.



Ako je $a^p\neq b^q$, onda je $t_0=ab^{-\frac{q}{p}}\neq 1$, pa je $0=q-qp+p=f(1)<f(t_0)=qa^pb^{-q}-qpab^{-\frac{q}{p}}+p$. Odatle imamo $\frac{a^pb^{-q}}{p}-ab^{-\frac{q}{p}}+\frac{1}{q}>0$, što množenjem s $b^q=b^{1+\frac{q}{p}}$ daje (1.16).

Obratno, ako je $a^p=b^q$, onda je $a=b^{\frac{q}{p}}$, dakle, $a^{p-1}=b^{\frac{q}{p}(p-1)}$, pa imamo $\frac{a^p}{p}+\frac{b^q}{q}=a^p(\frac{1}{p}+\frac{1}{q})=a^p=aa^{p-1}=ab$. □

U daljnjem su $p>1$ i $q>1$ takvi da vrijedi $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, tzv. **konjugirani eksponenti**.

1.7.2. Lema. (Hölderova nejednakost) *Za $x=(\xi_n)_n\in\ell_p$ i $y=(\eta_n)_n\in\ell_q$ je $z=(\xi_n\eta_n)_n\in\ell_1$ i vrijedi*

$$\|z\|_1 \leq \|x\|_p\|y\|_q, \tag{1.17}$$

odnosno

$$\sum_{n=1}^{\infty}|\xi_n\eta_n| \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty}|\xi_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{n=1}^{\infty}|\eta_n|^q\right)^{\frac{1}{q}}. \tag{1.18}$$

Pri tome u (1.17) i (1.18) vrijedi znak jednakosti ako i samo ako za neki $\gamma>0$ vrijedi $|\xi_n|^p=\gamma|\eta_n|^q$, $\forall n\in\mathbb{N}$.

Dokaz: Ako je $x=0$ ili $y=0$ vrijedi trivijalna jednakost.

Pretpostavimo da je $x\neq 0$ i $y\neq 0$ i stavimo

$$\alpha_n=\frac{|\xi_n|}{\|x\|_p},\ \beta_n=\frac{|\eta_n|}{\|y\|_p},\ \gamma_n=\frac{\alpha_n^p}{p}+\frac{\beta_n^q}{q}-\alpha_n\beta_n,\quad (\forall n\in\mathbb{N}).$$

Prema lemi 1.7.1. je $\gamma_n\geq 0$, s tim da je $\gamma_n>0$ ako je $\alpha_n^p\neq\beta_n^q$.

Izaberimo $n \in \mathbb{N}$ po volji. Za $m \geq n$ je

$$\gamma_n \leq \sum_{k=1}^{m} \gamma_k = \frac{1}{p} \sum_{k=1}^{m} \alpha_k^p + \frac{1}{q} \sum_{k=1}^{m} \beta_k^q - \sum_{k=1}^{m} \alpha_k \beta_k,$$

tj.

$$\gamma_n + \sum_{k=1}^{m} \alpha_k \beta_k \leq \frac{1}{p} \sum_{k=1}^{m} \alpha_k^p + \frac{1}{q} \sum_{k=1}^{m} \beta_k^q.$$

Međutim, $\sum_{k=1}^m \alpha_k^p = \frac{1}{\|x\|_p^p} \sum_{k=1}^m |\xi_k|^p \leq 1$ i analogno $\sum_{k=1}^m \beta_k^q \leq 1$. Prema tome, vrijedi

$$\gamma_n + \sum_{k=1}^{m} \alpha_k \beta_k \leq 1, \quad \forall m \in \mathbb{N},\ m \geq n \geq 1.$$

Pomnožimo ovu nejednakost sa $\|x\|_p \|y\|_q$. Kako je $\alpha_k \|x\|_p = |\xi_k|$ i $\beta_k \|y\|_q = |\eta_k|$, dobijemo

$$\gamma_n \|x\|_p \|y\|_q + \sum_{k=1}^{m} |\xi_k \eta_k| \leq \|x\|_p \|y\|_q, \quad \forall m \in \mathbb{N},\ m \geq n \geq 1.$$

Odavde slijedi $z \in \ell_1$ i $\|z\|_1 \leq \|x\|_p \|y\|_q$.

Nadalje, iz $\|z\|_1 = \|x\|_p \|y\|_q$ slijedi $\gamma_n = 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, pa je $\alpha_n^p = \beta_n^q$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Odatle slijedi $|\xi_n|^p = \gamma |\eta_n|^q$ za $\gamma = \frac{\|x\|_p^p}{\|y\|_q^q}$.

Obratno, $|\xi_n|^p = \gamma |\eta_n|^q$, $\forall n \in \mathbb{N}$, daje $\|x\|_p^p = \gamma \|y\|_q^q$ i $|\xi_n| = \gamma^{\frac{1}{p}} |\eta_n|^{\frac{q}{p}}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, pa zbog $1 + \frac{q}{p} = q$ nalazimo

$$\|z\|_1 = \sum_{n=1}^{\infty} |\xi_n \eta_n| = \sum_{n=1}^{\infty} |\xi_n| |\eta_n| = \gamma^{\frac{1}{p}} \sum_{n=1}^{\infty} |\eta_n|^{1+\frac{q}{p}} =$$

$$= \gamma^{\frac{1}{p}} \sum_{n=1}^{\infty} |\eta_n|^q = \gamma^{\frac{1}{p}} \|y\|_q^q = \|x\|_p \|y\|_q^{q-\frac{q}{p}} = \|x\|_p \|y\|_q.$$

□

1.7.3. Teorem. *ℓ_p je separabilan Banachov prostor za svaki $p \in [1, \infty\rangle$.*

Dokaz: (1) Očito je $\|x\|_p \geq 0$, $\forall x \in \ell_p$ i $\|x\|_p = 0 \Leftrightarrow x = 0$. Nadalje, ako je $x \in \ell_p$ i $\lambda \in \mathbb{K}$ očito je $\lambda x \in \ell_p$ i $\|\lambda x\|_p = |\lambda| \|x\|_p$. Da bismo dokazali da je ℓ_p normiran prostor treba još dokazati da za svaki $x, y \in \ell_p$ vrijedi $x + y \in \ell_p$ i da je $\|x + y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p$. Posljednja nejednakost je nejednakost Minkowskog.

U slučaju $x = 0$ ili $y = 0$ ona je trivijalna. Pretpostavimo da je $x \neq 0$ i $y \neq 0$. Prema lemi 1.7.2. za konačne nizove $|\xi_k|, |\eta_k|, |\xi_k + \eta_k|$ $(k = 1, \ldots, n)$ imamo $\forall n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{k=1}^{n} |\xi_k+\eta_k|^p = \sum_{k=1}^{n} |\xi_k+\eta_k||\xi_k+\eta_k|^{p-1} \leq \sum_{k=1}^{n} |\xi_k||\xi_k+\eta_k|^{p-1} + \sum_{k=1}^{n} |\eta_k||\xi_k+\eta_k|^{p-1} \leq$$

$$\leq \left(\sum_{k=1}^{n} |\xi_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^{n} |\xi_k + \eta_k|^{q(p-1)}\right)^{\frac{1}{q}} + \left(\sum_{k=1}^{n} |\eta_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^{n} |\xi_k + \eta_k|^{q(p-1)}\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Kako je $q(p-1) = p$, $\left(\sum_{k=1}^{n} |\xi_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \|x\|_p$ i $\left(\sum_{k=1}^{n} |\eta_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \|y\|_p$, slijedi

$$\sum_{k=1}^{n} |\xi_k + \eta_k|^p \leq (\|x\|_p + \|y\|_p) \left(\sum_{k=1}^{n} |\xi_k + \eta_k|^{p)}\right)^{\frac{1}{q}}$$

Imamo $1 - \frac{1}{q} = \frac{1}{p}$, pa slijedi

$$\left(\sum_{k=1}^{n} |\xi_k + \eta_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \|x\|_p + \|y\|_p \, .$$

Ta nejednakost vrijedi $\forall n \in \mathbb{N}$, pa vidimo da je $x + y \in \ell_p$ i $\|x + y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p$.

(2) Dokažimo da je prostor ℓ_p potpun. Neka je $(x_n)_n$ Cauchyjev niz u ℓ_p, $x_n = (\xi_k^{(n)})_k$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Tada za bilo koji $\varepsilon > 0$ postoji $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ takav da za sve $n, m \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$(n, m \geq n_\varepsilon) \Rightarrow (|\xi_k^{(n)} - \xi_k^{(m)}| \leq \|x_n - x_m\|_p < \varepsilon). \tag{1.19}$$

Prema tome, $\forall k \in \mathbb{N}$ niz $(\xi_k^{(n)})_n$ je Cauchyjev u $\mathbb{K}$, pa postoji $\xi_k = \lim_n \xi_k^{(n)}$, $\forall k \in \mathbb{N}$, i neka je $x = (\xi_k)_k$. Za svaki $k \in \mathbb{N}$ imamo

$$(n, m \geq n_\varepsilon) \Rightarrow (\sum_{j=1}^{k} |\xi_j^{(n)} - \xi_j^{(m)}|^p \leq \varepsilon^p).$$

Prema tome, $x_n - x \in \ell_p$, pa je i $x = x_n - (x_n - x) \in \ell_p$, jer je ℓ_p vektorski prostor. Nadalje, $(n \geq n_\varepsilon) \Rightarrow (\|x_n - x\|_p \leq \varepsilon)$, tj. $x = \lim_n x_n$ u normi prostora ℓ_p.

(3) Kao u dokazu teorema 1.4.5. u ℓ_p definiramo prebrojiv skup

$$S = \{(\xi_k)_k;\ \ \xi_k \in \mathbb{Q} + i\mathbb{Q}, \forall k \in \mathbb{N},\ \ \exists n \in \mathbb{N}, \xi_k = 0, \forall k > n\}.$$

Dokažimo da je S gust u ℓ_p.

Neka je $x = (\xi_k)_k \in \ell_p$ i $\varepsilon > 0$ po volji. Tada red $\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^p$ konvergira, pa postoji $n \in \mathbb{N}$ takav da je

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} |\xi_k|^p < \frac{\varepsilon^p}{2^p}.$$

Stavimo $z = (\xi_1, \ldots, \xi_n, 0, 0, \ldots)$. Dakle, $\|x - z\|_p < \frac{\varepsilon}{2}$.

Izaberimo sada $\eta_1, \ldots, \eta_n \in \mathbb{Q} + i\mathbb{Q}$ takve da je $|\xi_j - \eta_j| \leq \frac{\varepsilon}{2n^{\frac{1}{p}}}$ za $j = 1, \ldots, n$. Tada je $y = (\eta_1, \ldots, \eta_n, 0, 0, \ldots) \in S$ i vrijedi

$$\|z - y\|_p = \left(\sum_{k=1}^{n} |\xi_k - \eta_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\frac{\varepsilon^p}{2^p n} n\right)^{\frac{1}{p}} = \frac{\varepsilon}{2}.$$

Dakle, $\|x - y\|_p \leq \|x - z\|_p + \|z - y\|_p < \varepsilon$. □

Neka su $p > 1$ i $q > 1$ konjugirani eksponenti. Za $x = (\xi_n)_n \in \ell_p$ i $y = (\eta_n)_n \in \ell_q$ je prema lemi 1.7.2. red $\sum_{n=1}^{\infty} \xi_n \eta_n$ apsolutno konvergentan, dakle i konvergentan. Stavimo

$$[\varphi(y)](x) = \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n \eta_n,\ \ x = (\xi_n)_n \in \ell_p,\ y = (\eta_n)_n \in \ell_q.$$

Na taj način, svakom $y \in \ell_q$ smo pridružili preslikavanje $\varphi(y) : \ell_p \to \mathbb{K}$. Očito je $\varphi(y) \in \ell_p^{\sharp}$. Nadalje prema lemi 1.7.2. je

$$|[\varphi(y)](x)| = |\sum_{n=1}^{\infty} \xi_n \eta_n| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |\xi_n \eta_n| \leq \|y\|_q \|x\|_p.$$

Prema tome je $\varphi(y) \in \ell_p'$ i $\|\varphi(y)\| \leq \|y\|_q$.

Očito je preslikavanje $\varphi : \ell_q \to \ell_p'$ linearno.

1.7.4. Teorem. *Preslikavanje $\varphi : \ell_q \to \ell_p'$ je izometrički izomorfizam sa prostora ℓ_q na ℓ_p'*

Dokaz: Već znamo da je $\|\varphi(y)\| \leq \|y\|_q$, $\forall y \in \ell_q$.

Sada ćemo definirati $\psi : \ell_p' \to \ell_q$. Neka je $f \in \ell_p'$. Stavimo $e_k = (\delta_{n,k})_n \in \ell_p$ i $\eta_k = f(e_k)$, $k \in \mathbb{N}$. Definiramo $\psi(f) = (\eta_k)_k$.

Dokažimo da je $\psi(f) \in \ell_q$ i $\|\psi(f)\|_q \leq \|f\|$. Za $k \in \mathbb{N}$ neka je $\alpha_k \in \mathbb{K}$ takav da je $|\alpha_k| = 1$ i $|\eta_k| = \alpha_k \eta_k$. Nadalje za $n \in \mathbb{N}$ stavimo

$$z_n = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k |\eta_k|^{q-1} e_k = (\alpha_1 |\eta_1|^{q-1}, \ldots, \alpha_n |\eta_n|^{q-1}, 0, 0, \ldots).$$

Tada imamo

$$\|z_n\|_p = \left(\sum_{k=1}^{n} |\alpha_k| |\eta_k|^{p(q-1)} \right)^{\frac{1}{p}} = \left(\sum_{k=1}^{n} |\eta_k|^q \right)^{\frac{1}{p}},$$

$$f(z_n) = f\left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k |\eta_k|^{q-1} e_k \right) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k |\eta_k|^{q-1} \eta_k = \sum_{k=1}^{n} |\eta_k|^q$$

i $|f(z_n)| \leq \|f\| \|z_n\|_p$ (jer je $f \in \ell_p'$).

Dakle,

$$\sum_{k=1}^{n} |\eta_k|^q = f(z_n) = |f(z_n)| \leq \|f\| \|z_n\|_p = \|f\| \left(\sum_{k=1}^{n} |\eta_k|^q \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Odatle je

$$\|f\| \geq \left(\sum_{k=1}^{n} |\eta_k|^q \right)^{1-\frac{1}{p}} = \left(\sum_{k=1}^{n} |\eta_k|^q \right)^{\frac{1}{q}}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

To pokazuje da je $\psi(f) = (\eta_k)_k \in \ell_q$ i $\|\psi(f)\|_q \leq \|f\|$.

Za $f \in \ell_p'$ i $x = (\xi_n)_n \in \ell_p$ imamo

$$[(\varphi \circ \psi)(f)](x) = [(\varphi(\psi)(f))](x) = \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n \eta_n =$$

$$= \lim_n \sum_{k=1}^{n} \xi_k \eta_k = \lim_n f(\sum_{k=1}^{n} \xi_k e_k) = f(\lim_n \sum_{k=1}^{n} \xi_k e_k) = f(x).$$

To pokazuje da je $\varphi \circ \psi = I_{\ell_p'}$.

Za $y = (\eta_k)_k \in \ell_q$ imamo $[\varphi(y)](e_k) = \eta_k$, $\forall k \in \mathbb{N}$, a odatle slijedi $\psi(\varphi(y)) = (\eta_k)_k = y$. Dakle, $\psi \circ \varepsilon = I_{\ell_q}$.

Prema tome φ i ψ su međusobno inverzne bijekcije. Napokon, φ je izometrija, jer za $y \in \ell_q$ vrijedi $\|y\|_q = \|\psi(\varphi(y))\|_q \leq \|\varphi(y)\| \leq \|y\|_q$. $\square$

1 i ∞ se također nazivaju konjugirani eksponenti. Za $x = (\xi_k)_k \in \ell_1$ i $y = (\eta_k)_k \in \ell_\infty$ je očito $(\xi_n \eta_n)_n \in \ell_1$. Dakle, $\sum_{n=1}^\infty \xi_n \eta_n$ apsolutno konvergira, pa i konvergira. Stavimo

$$[\varphi(y)](x) = \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n \eta_n, \quad x = (\xi_k)_k \in \ell_1, y = (\eta_k)_k \in \ell_\infty.$$

Očito je $\varphi(y) \in \ell_1^\sharp$ i $|[\varphi(y)](x)| \leq \sum_{n=1}^\infty |\xi_n||\eta_n| \leq \|y\|_\infty \|x\|_1$. To pokazuje $\varphi(y) \in \ell_1'$ i $\|\varphi(y)\| \leq \|y\|_\infty$, $\forall y \in \ell_\infty$. $\varphi : \ell_\infty \to \ell_1'$ je očito linearan operator.

1.7.5. Teorem. *Preslikavanje $\varphi : \ell_\infty \to \ell_1'$ je izometrički izomorfizam.*

Dokaz: analogno kao u dokazu teorema 1.7.4. definiramo $\psi : \ell_1' \to \ell_\infty$. Za $f \in \ell_1'$ stavimo $\eta_k = f(e_k)$, $k \in \mathbb{N}$ i neka je $\psi(f) = (\eta_k)_k$. Očito je

$$|\eta_k| = |f(e_k)| \leq \|f\| \|e_k\| = \|f\|, \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Dakle, $\psi(f) \in \ell_\infty$ i $\|\psi(f)\|_\infty \leq \|f\|$, $\forall f \in \ell_1'$. Ostatak dokaza analogan je dokazu teorema 1.7.4. $\square$

1.7.6. Napomena. Prostor ℓ_1 je separabilan, a ℓ_∞ je neseparabilan prostor. Dakle, dual separabilnog prostora može biti neseparabilan.

1.7.7. Napomena. Moguće je definirati preslikavanje $\varphi : \ell_1 \to \ell_\infty'$. Stavimo

$$[\varphi(y)](x) = \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n \eta_n, \quad x = (\xi_k)_k \in \ell_\infty, y = (\eta_k)_k \in \ell_1.$$

Tada je $|[\varphi(y)](x)| \leq \|x\|_\infty \|y\|_1$, dakle $\varphi(y) \in \ell_\infty'$ i $\|\varphi(y)\| \leq \|y\|_1$. Preslikavanje φ je linearno i izometrija, tj. $\|\varphi(y)\| = \|y\|_1$, $\forall y \in \ell_1$. Doista, neka je $y = (\eta_k)_k \ell_1$. Za svaki $k \in \mathbb{N}$ izaberimo $\xi_k \in \mathbb{K}$ takav da je $|\xi_k| = 1$ i $\xi_k \eta_k = |\eta_k|$. Tada je $x = (\xi_k)_k \in \ell_\infty$ i $\|x\|_\infty = 1$. Imamo

$$[\varphi(y)](x) = \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n \eta_n = \sum_{n=1}^{\infty} |\eta_n| = \|y\|_1.$$

Dakle,

$$\|y\|_1 = [\varphi(y)](x) = |[\varphi(y)](x)| \leq \|\varphi(y)\| \|x\|_\infty = \|\varphi(y)\| \leq \|y\|_1.$$

Međutim, slika $\varphi(\ell_1)$ od φ je zatvoren potprostor od ℓ_∞' koji je različit od ℓ_∞'. To slijedi iz činjenice da je dual neseparabilnog prostora nužno neseparabilan, koju dokazujemo kasnije.

1.7.8. Zadatak. Neka je $c_0 = \{(\xi_n)_n; \xi_n \in \mathbb{K}, \lim_n \xi_n = 0\}$ prostor nulnizova u $\mathbb{K}$. To je zatvoren potprostor od ℓ_∞ i on je separabilan. Preslikavanje $y \mapsto \varphi(y)\big|_{c_0}$ je izometrički izomorfizam sa ℓ_1 na c_0'.

1.7.9. Zadatak. Neka je $c = \{(\xi_n)_n; \xi_n \in \mathbb{K}, \exists x = \lim_n \xi_n\}$ prostor konvergentnih nizova u $\mathbb{K}$. To je zatvoren potprostor od ℓ_∞ i on je separabilan. Preslikavanje $y \mapsto \varphi(y)\big|_c$ je izometrički izomorfizam sa ℓ_1 u c' čija je slika X zatvoren potprostor od c' kodimenzije 1. Neka je $\ell : c \to \mathbb{K}$, $\ell(x) = \lim_n x_n$. Tada je $c' = X \dot{+} \mathbb{K}\ell$.

Ponovo, neka su $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha < \beta$, i $C([\alpha, \beta])$ je vektorski prostor svih neprekidnih funkcija $f : [\alpha, \beta] \to \mathbb{K}$.

Na tom prostoru smo definirali norme:

$$\|f\|_1 = \int_\alpha^\beta |f(t)|dt,\ \|f\|_2 = \left[\int_\alpha^\beta |f(t)|^2 dt\right]^{\frac{1}{2}},\ \|f\|_\infty = \max\{|f(t)|; t \in [\alpha, \beta]\}.$$

Sada za svaki $p \in [1, \infty\rangle$ definiramo

$$\|f\|_p = \left(\int_\alpha^\beta |f(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}, \quad f \in C([\alpha, \beta]).$$

1.7.10. Lema. (Hölderova nejednakost) *Za $f, g \in C([\alpha, \beta])$ vrijedi*

$$\|fg\|_1 \le \|f\|_p \|g\|_q, \quad p > 1, q > 1, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1. \tag{1.20}$$

Pri tome za dane p, q vrijedi znak jednakosti ako i samo ako je ili $f = 0$ ili $g = 0$ ili postoji $\lambda > 0$ takav da vrijedi $|f(t)|^p = \lambda |g(t)|^q$, $\forall t \in [\alpha, \beta]$.

Dokaz: (1) Neka su $f \neq 0$ i $g \neq 0$. Stavimo

$$a(t) = \frac{|f(t)|}{\|f\|_p},\ b(t) = \frac{|g(t)|}{\|g\|_q},\ c(t) = \frac{a(t)^p}{p} + \frac{b(t)^q}{q} - a(t)b(t), \quad \forall t \in [\alpha, \beta].$$

Iz leme 1.7.1. slijedi $c(t) \ge 0$, $\forall t \in [\alpha, \beta]$. Odatle imamo

$$0 \le \int_\alpha^\beta c(t)dt = \frac{1}{p}\int_\alpha^\beta \frac{|f(t)|^p}{\|f\|_p^p}dt + \frac{1}{q}\int_\alpha^\beta \frac{|g(t)|^q}{\|g\|_q^q}dt - \int_\alpha^\beta \frac{|f(t)|}{\|f\|_p}\frac{|g(t)|}{\|g\|_q}dt =$$

$$= \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - \frac{\|fg\|_1}{\|f\|_p\|g\|_q} = 1 - \frac{\|fg\|_1}{\|f\|_p\|g\|_q} \Rightarrow \|fg\|_1 \le \|f\|_p\|g\|_q.$$

(2) Pretpostavimo da je $f \neq 0$ i $g \neq 0$ i neka postoji $\lambda > 0$ takav da je $|f(t)|^p = \lambda |g(t)|^q$, $\forall t \in [\alpha, \beta]$. Tada je $\|f\|_p^p = \lambda \|g\|_q^q$, odatle je

$$a(t)^p = \frac{|f(t)|^p}{\|f\|_p^p} = \frac{|g(t)|^q}{\|g\|_q^q} = b(t)^q, \quad \forall t \in [\alpha, \beta].$$

Sada po lemi 1.7.1. slijedi $c(t) = 0$, $\forall t \in [\alpha, \beta]$, a odatle je $\|fg\|_1 = \|f\|_p \|g\|_q$.

(3) Pretpostavimo da je $a(t_0)^p \neq b(t_0)^q$ za neko $t_0 \in [\alpha, \beta]$. Prema lemi 1.7.1. je $c(t_0) > 0$ pa je $\int_\alpha^\beta c(t)dt > 0$, što daje $\|fg\|_1 < \|f\|_p \|g\|_q$. Dakle, iz jednakosti $\|fg\|_1 = \|f\|_p \|g\|_q$ slijedi $a(t)^p = b(t)^q$, $\forall t \in [\alpha, \beta]$, a odatle je $|f(t)|^p = \lambda |g(t)|^q$, $\forall t \in [\alpha, \beta]$, gdje je $\lambda = \frac{\|f\|_p^p}{\|g\|_q^q}$. □

1.7.11. Lema. (Nejednakost Minkowskog) *Za $f, g \in C([\alpha, \beta])$ i $p \in [1, \infty\rangle$ vrijedi*

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p. \tag{1.21}$$

Ako je $p > 1$, $f \neq 0$, $g \neq 0$, jednakost vrijedi ako i samo ako postoji $\lambda > 0$ takav da je $f = \lambda g$.

Dokaz: (1) Za $p = 1$ (i $p = 2$) to već znamo.

(2) Neka je $p > 1$. Nejednakost je očita ako je $f + g = 0$ i tada vrijedi stroga nejednakost je $f \neq 0$ i $g \neq 0$.

Neka je $f + g \neq 0$ i $p > 1$. Imamo

$$\|f + g\|_p^p = \int_\alpha^\beta |f(t) + g(t)|^p dt = \int_\alpha^\beta |f(t) + g(t)||f(t) + g(t)|^{p-1} dt \leq$$

$$\int_\alpha^\beta (|f(t)| + |g(t)|)|f(t) + g(t)|^{p-1} dt = \||f||f + g|^{p-1}\|_1 + \||g||f + g|^{p-1}\|_1 \leq$$

$$\overset{(1.20)}{\leq} \|f\|_p \||f + g|^{p-1}\|_q + \|g\|_p \||f + g|^{p-1}\|_q = (\|f\|_p + \|g\|_p) \||f + g|^{p-1}\|_q =$$

$$= (\|f\|_p + \|g\|_p) \left(\int_\alpha^\beta |f(t) + g(t)|^{q(p-1)} dt \right)^{\frac{1}{q}} = (\|f\|_p + \|g\|_p) \|f + g\|_p^{\frac{p}{q}},$$

zbog $q(p - 1) = p$. Dakle, vrijedi

$$\|f + g\|_p^p \leq (\|f\|_p + \|g\|_p) \|f + g\|_p^{\frac{p}{q}},$$

a odatle je

$$\|f + g\|_p^{p - \frac{p}{q}} \leq \|f\|_p + \|g\|_p.$$

Napokon, iz $p - \frac{p}{q} = 1$ slijedi (1.21).

(3) Neka je $p > 1$ i neka vrijedi $\|f + g\|_p = \|f\|_p + \|g\|_p$, ali neka za neko $t_0 \in [\alpha, \beta]$ vrijedi $|f(t_0) + g(t_0)| < |f(t_0)| + |g(t_0)|$. Tada za neki segment $[\gamma, \delta]$, $\gamma < t_0 < \delta$, i za neko $\varepsilon > 0$ vrijedi

$$|f(t) + g(t)| \leq |f(t)| + |g(t)| - \varepsilon, \ \forall t \in [\gamma, \delta].$$

Odatle je

$$\|f + g\|_p^p \leq \int_{[\alpha,\beta]\setminus[\gamma,\delta]} (|f(t)| + |g(t)|)|f(t) + g(t)|^{p-1} dt +$$

$$+ \int_{[\gamma,\delta]} (|f(t)| + |g(t)| - \varepsilon)|f(t) + g(t)|^{p-1} dt \leq$$

$$\leq \int_{[\alpha,\beta]} (|f(t)| + |g(t)|)|f(t) + g(t)|^{p-1} dt - \varepsilon \int_{[\gamma,\delta]} |f(t) + g(t)|^{p-1} dt <$$

$$< (\|f\|_p + \|g\|_p)\|f + g\|_p^{\frac{p}{q}},$$

a odatle slijedi $\|f + g\|_p < \|f\|_p + \|g\|_p$.

(4) Dakle, ako je $\|f + g\|_p = \|f\|_p + \|g\|_p$, onda je nužno $|f(t) + g(t)| = |f(t)| + |g(t)|$, $\forall t \in [\alpha, \beta]$. Tada u Hölderovim nejednakostima korištenim u dokazu nejednakosti Minkowskog svagdje stoji jednakost, pa za neke $a > 0$ i $b > 0$ vrijedi $|f(t) + g(t)| = a|f(t)| = b|g(t)|$, $\forall t \in [\alpha, \beta]$. Ako je $f(t) + g(t) \neq 0$, iz $|f(t) + g(t)| = |f(t)| + |g(t)|$ slijedi postojanje $\lambda(t) > 0$ takav da je $f(t) = \lambda(t)g(t)$, $\forall t \in [\alpha, \beta]$. Očito je $\lambda(t) = \frac{b}{a}$, $\forall t \in [\alpha, \beta]$. Ako je $f(t) + g(t) = 0$, iz $|f(t) + g(t)| = |f(t)| + |g(t)|$ slijedi $f(t) = g(t) = 0$, pa je za takve t također $f(t) = \frac{b}{a}g(t)$. $\square$

1.7.12. Teorem. *Za $p \in [1, \infty\rangle$ stavimo $C_p[\alpha, \beta] = (C[\alpha, \beta], \|\cdot\|_p)$. Vrijedi*

(a) *$C_p[\alpha, \beta]$ je normiran prostor.*

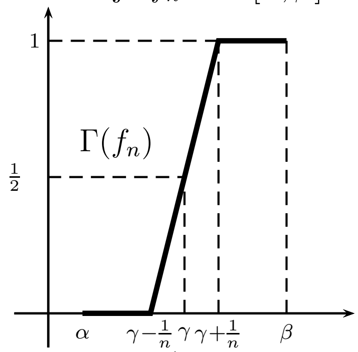
(b) *$C_p[\alpha, \beta]$ nije potpun.*

(c) *$C_p[\alpha, \beta]$ je separabilan.*

Dokaz: (a) Jedino je netrivijalno dokazati nejednakost trokuta, a to je upravo sadržaj leme 1.7.11.

(b) Za $(\beta-\alpha)n \geq 2$ i $2\gamma = \alpha+\beta$ definiramo funkcije $f_n \in C[\alpha,\beta]$ sa

$$f_n(t) = \begin{cases} 0 & ;\alpha \leq t \leq \gamma - \frac{1}{n}, \\ \frac{1}{2} + \frac{n}{2}(t-\gamma) & ;\gamma - \frac{1}{n} \leq t \leq \gamma + \frac{1}{n}, \\ 1 & ;\gamma + \frac{1}{n} \leq t \leq \beta. \end{cases}$$



Za $m \geq n$ vrijedi $\|f_m - f_n\|_p = \frac{2^{\frac{1}{p}}}{2(p+1)^{\frac{1}{p}}}(1-\frac{n}{m})\frac{1}{n^{\frac{1}{p}}} \leq \frac{2^{\frac{1}{p}}}{2(p+1)^{\frac{1}{p}}}\frac{1}{n^{\frac{1}{p}}} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Dakle, $(f_n)_n$ je Cauchyjev niz u $C_p[\alpha,\beta]$. Dokazat ćemo da taj niz nije konvergentan u $C_p[\alpha,\beta]$. Pretpostavimo suprotno i neka je $f \in C_p[\alpha,\beta]$ takva da je $\lim_n \|f - f_n\|_p = 0$. Neka je $\varepsilon > 0$ $(2\varepsilon < \beta - \alpha)$ po volji. Za $k \in \mathbb{N}$, $k\varepsilon > 1$, imamo

$$\|f - f_k\|_p^p = \int_\alpha^\beta |f(t) - f_k(t)|^p dt \geq \int_{\gamma+\varepsilon}^\beta |f(t) - 1|^p dt.$$

Budući da je $\lim_n \|f - f_n\|_p^p = 0$, odatle slijedi $f(t) = 1$, $\forall t \in [\gamma+\varepsilon, \beta]$. To vrijedi za svako $\varepsilon > 0$ pa imamo $f(t) = 1$, $\forall t \in \langle \gamma, \beta]$.

Analogno,

$$\|f - f_k\|_p^p = \int_\alpha^\beta |f(t) - f_k(t)|^p dt \geq \int_\alpha^{\gamma-\varepsilon} |f(t)|^p dt, \ \ \forall k > \frac{1}{\varepsilon},$$

daje $f(t) = 0$, $\forall t \in [\alpha, \gamma-\varepsilon]$, $\forall \varepsilon > 0$, odnosno $f(t) = 0$, $\forall t \in [\alpha, \gamma\rangle$. Dakle f ima prekid u točki $\gamma = \frac{\alpha+\beta}{2}$.

(c) Neka je S skup svih polinoma s koeficijentima iz $\mathbb{Q} + i\mathbb{Q}$. Skup S je prebrojiv. Dokazat ćemo da je S gust u svakom $C_p[\alpha,\beta]$, $p \in [1,\infty\rangle$. Kako je $\|f\|_p \leq (\beta-\alpha)^{\frac{1}{p}}\|f\|_\infty$, dokaz je dovoljno provesti u $C_\infty[\alpha,\beta]$.

Po Weierstrassovom teoremu prostor $P[\alpha,\beta]$ svih polinoma na $[\alpha,\beta]$ je gust u $C_\infty[\alpha,\beta]$, pa je dovoljno pokazati da je S gust u $P[\alpha,\beta]$.

Neka je $f \in P[\alpha,\beta]$ stupnja n, tj. $f(t) = a_n t^n + a_{n-1}t^{n-1} + \cdots + a_1 t + a_0$. Izaberimo $b_0, b_1, \ldots, b_n \in \mathbb{Q} + i\mathbb{Q}$ takve da je $|a_j - b_j| \leq \frac{\varepsilon}{(n+1)\delta^j}$, $\delta = \max\{|\alpha|, |\beta|\}$. Za $g(t) = b_n t^n + b_{n-1}t^{n-1} + \cdots + b_1 t + b_0$ imamo $g \in S$ i

$$|f(t) - g(t)| = |\sum_{j=0}^n (a_j - b_j)t^j| \leq \sum_{j=0}^n |a_j - b_j||t|^j \leq \varepsilon.$$

□

Za $p \in [1, \infty\rangle$ sa $L_p[\alpha, \beta]$ označavamo upotpunjenje normiranog prostora $C_p[\alpha, \beta]$. To je separabilan Banachov prostor u kojem je $C[\alpha, \beta]$ gust potprostor.

Definiramo $\mathrm{sgn} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ sa

$$\mathrm{sgn}(\lambda) = \begin{cases} \frac{|\lambda|}{\lambda} & ; \lambda \neq 0, \\ \\ 0 & ; \lambda = 0 \end{cases}$$

i vrijedi $\lambda \cdot \mathrm{sgn}(\lambda) = |\lambda|$.

1.7.13. Lema. *Neka je $p \in [1, \infty\rangle$ i $f \in C_p[\alpha, \beta]$. Postoji $\varphi \in C_p'[\alpha, \beta] = L_p'[\alpha, \beta]$ takav da je $\varphi(f) = \|f\|_p$ i $\|\varphi\| = 1$.*

Dokaz: Ako je $f \neq 0$ i $p = 1$, definiramo $\varphi : C_1[\alpha, \beta] \to \mathbb{K}$ sa

$$\varphi(g) = \int_\alpha^\beta \mathrm{sgn}(f(t))g(t)dt, \quad g \in C_1[\alpha, \beta].$$

φ je linearan funkcional na $C_1[\alpha, \beta]$ i $|\varphi(g)| \leq \displaystyle\int_\alpha^\beta |g(t)|dt = \|g\|_1$, dakle, $\|\varphi\| \leq 1$ i $\varphi \in C_1[\alpha, \beta]'$. Nadalje,

$$\varphi(f) = \int_\alpha^\beta \mathrm{sgn}(f(t))f(t)dt = \int_\alpha^\beta |f(t)|dt = \|f\|_1.$$

Posebno, $\|f\|_1 = \varphi(f) = |\varphi(f)| \leq \|\varphi\|\|f\|_1$, pa je $\|\varphi\| \geq 1$, odnosno, $\|\varphi\| = 1$.

Neka je sada $f \neq 0$ i $p > 1$. Definiramo $\varphi : C_p[\alpha, \beta] \to \mathbb{K}$ sa

$$\varphi(g) = \|f\|_p^{-\frac{p}{q}} \int_\alpha^\beta \mathrm{sgn}(f(t))|f(t)|^{p-1}g(t)dt, \quad g \in C_p[\alpha, \beta].$$

Tada je

$$|\varphi(g)| \leq \|f\|_p^{-\frac{p}{q}} \left(\int_\alpha^\beta |f(t)|^{q(p-1)}dt \right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_\alpha^\beta |g(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} =$$

$$= \|f\|_p^{-\frac{p}{q}} \left(\int_\alpha^\beta |f(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}\frac{p}{q}} \|g\|_p = \|f\|_p^{-\frac{p}{q}} \|f\|_p^{\frac{p}{q}} \|g\|_p = \|g\|_p.$$

Dakle, $\varphi \in C_p[\alpha, \beta]'$ i $\|\varphi\| \leq 1$. S druge strane je

$$\varphi(f) = \|f\|_p^{-\frac{p}{q}} \int_\alpha^\beta |f(t)|^p dt = \|f\|_p^{p-\frac{p}{q}} = \|f\|_p,$$

pa vrijedi $\|\varphi\| \geq 1$, tj. $\|\varphi\| = 1$. $\square$

1.7.14. Napomena. U dokazu leme 1.7.13. je mala nekorektnost. Naime, funkcija $t \mapsto \text{sgn}(f(t))g(t)$ nije nužno Riemann integrabilna, ali je Lebesgue integrabilna.

1.7.15. Napomena. Prostore $L_p[\alpha,\beta]$ je moguće konstruktivno definirati u okviru teorije Lebesgueovog integrala.

1.7.16. Lema. *Za $f \in C_p[\alpha,\beta]$ definiramo $\psi_f : C_p[\alpha,\beta]' \to \mathbb{K}$ sa*

$$\psi_f(\varphi) = \varphi(f), \ \ \forall \varphi \in C_p[\alpha,\beta]'.$$

Tada je $\psi_f \in C_p[\alpha,\beta]''$ i $\|\psi_f\| = \|f\|_p$, tj. $f \mapsto \psi_f$ je linearna izometrija sa $C_p[\alpha,\beta]$ u $C_p[\alpha,\beta]''$.

Dokaz: Vrijedi $|\psi_f(\varphi)| = |\varphi(f)| \leq \|\varphi\|\|f\|_p$, odatle je $\psi_f \in C_p[\alpha,\beta]''$ i $\|\psi_f\| \leq \|f\|_p$. Prema lemi 1.7.13. postoji $\varphi \in C_p[\alpha,\beta]'$ takav da je $\|\varphi\| = 1$ i $\varphi(f) = \|f\|_p$. Odatle je $\psi_f(\varphi) = \varphi(f) = \|f\|_p$, odnosno, $\|\psi_f\| \geq \|f\|_p$. □

Kako je $C_p[\alpha,\beta]$ gust u $L_p[\alpha,\beta]$, preslikavanje $f \mapsto \psi_f$ se proširuje do izometrije sa $L_p[\alpha,\beta]$ u $L_p[\alpha,\beta]'' = C_p[\alpha,\beta]''$ (naime $L_p[\alpha,\beta]' = C_p[\alpha,\beta]'$).

Za $g \in C[\alpha,\beta]$ definiramo $\varphi_g \in C[\alpha,\beta]^\sharp$ sa

$$\varphi_g(f) = \int_\alpha^\beta g(t)f(t)dt, \ \ \forall f \in C[\alpha,\beta].$$

Imamo

$$|\varphi_g(f)| = |\int_\alpha^\beta g(t)f(t)dt| \leq \int_\alpha^\beta |g(t)||f(t)|dt \leq \|g\|_\infty \int_\alpha^\beta |f(t)|dt = \|g\|_\infty \|f\|_1.$$

Dakle, $\varphi_g \in C_1[\alpha,\beta]' = L_1[\alpha,\beta]'$ i $\|\varphi_g\|_{L_1'} \leq \|g\|_\infty$.

Nadalje, ako je $p \in \langle 1,\infty\rangle$ i $q = \frac{p}{p-1}$ (konjugirani eksponent) prema Hölderovoj nejednakosti je $|\varphi_g(f)| \leq \|g\|_q\|f\|_p$, a odatle je $\varphi_g \in C_p[\alpha,\beta]' = L_p[\alpha,\beta]'$ i $\|\varphi_g\|_{L_p'} \leq \|g\|_q$.

Prema tome, $\Phi : g \mapsto \varphi_g$ je neprekidan linearan operator $\Phi : C_q[\alpha,\beta] \to L_p[\alpha,\beta]'$ koji se po neprekidnost proširuje do $\Phi : L_q[\alpha,\beta] \to L_p[\alpha,\beta]'$.

Nadalje, $\|\Phi(g)\| \leq \|g\|_q$, $\forall g \in C_q[\alpha,\beta]$, dakle i $\forall g \in L_q[\alpha,\beta]$.

Neka je $g \in C_q[\alpha,\beta] = C[\alpha,\beta]$, $g \neq 0$. Stavimo

$$f(t) = \text{sgn}(g(t))|g(t)|^{q-1}, \ \ \forall f \in L_p[\alpha,\beta] \text{ (Lebesgue integrabilne)}.$$

Tada, zbog $q = p(q-1)$, imamo $\|f\|_p = \left(\int_\alpha^\beta |g(t)|^{p(q-1)}dt\right)^{\frac{1}{p}} = \|g\|_q^{\frac{q}{p}}$.

Nadalje,

$$[\Phi(g)](\frac{f}{\|f\|_p}) = \|g\|_q^{-\frac{q}{p}}\varphi_g(f) = \|g\|_q^{-\frac{q}{p}}\int_\alpha^\beta |g(t)|^q dt = \|g\|_q^{-\frac{q}{p}}\|g\|_q^q = \|g\|_q.$$

Odatle slijedi $|\Phi(g)| \geq \|g\|_q$, $\forall g \in C_q[\alpha,\beta]$, odnosno, $\forall g \in L_q[\alpha,\beta]$. Prema tome je $|\Phi(g)| = \|g\|_q$, $\forall g \in L_q[\alpha,\beta]$, tj. Φ je izometrija sa $L_q[\alpha,\beta]$ u $L_p[\alpha,\beta]'$. Može se dokazati (u okviru Lebesgueove teorije integrala) da je to preslikavanje surjektivno. Vrijedi slijedeća tvrdnja:

1.7.17. Teorem. *Za $p \in [1,\infty\rangle$ je $L_p[\alpha,\beta]$ izometrički izomorfan sa $L_q[\alpha,\beta]'$ i to je refleksivan separabilan Banachov prostor. $L_1[\alpha,\beta]$ je separabilan, ali nije refleksivan. $L_1[\alpha,\beta]' \overset{def}{=} L_\infty[\alpha,\beta]$ nije separabilan.*

1.7.18. Napomena. $C[\alpha,\beta]$ nije gusto u $L_\infty[\alpha,\beta]$ nego je to pravi zatvoreni potprostor. Njegov dual je izometrički izomorfan sa $L_1[\alpha,\beta]$.

1.8 Kvocijentni prostor normiranog prostora

Neka je X vektorski prostor nad poljem $\mathbb{K}$ i neka je Y njegov potprostor. Na X definiramo relaciju ekvivalencije $\sim$ tako da za $u, v \in X$ stavimo $u \sim v$ ako i samo ako je $u - v \in Y$. Klasa ekvivalencije vektora $x \in X$ je skup $[x] = x + Y = \{x + y; y \in Y\}$. Operacije na kvocijentnom skupu $X/Y = \{x + Y; x \in X\}$ se definiraju na slijedeći način:

$$(x_1 + Y) + (x_2 + Y) = (x_1 + x_2) + Y,\ \forall x_1, x_2 \in X,$$

$$\lambda(x + Y) = (\lambda x) + Y,\ \forall x \in X,\ \forall \lambda \in \mathbb{K}.$$

Lako je vidjeti da su operacije dobro definirane, tj. da ne zavise o izboru reprezentanata klasa.

Vektorski prostor X/Y nad poljem $\mathbb{K}$ sa gore definiranim operacijama nazivamo **kvocijentni prostor** prostora X po potprostoru Y.

Za normirane prostore imamo slijedeći rezultat.

1.8.1. Teorem. *Neka je X normiran prostor i $Y \leq X$ zatvoren potprostor.*

(*a*) *X/Y je normiran prostor s normom*

$$\|x + Y\| = \inf\{\|x + y\|; y \in Y\},\ \forall x \in X. \tag{1.22}$$

(b) *Kanonska surjekcija* $\pi : X \to X/Y$ *definirana sa*

$$\pi(x) = x + Y,\ \forall x \in X, \tag{1.23}$$

je neprekidan linearan operator i $\|\pi\| = 1$ *(ako je* $Y \neq X$*).* π *je otvoreno preslikavanje, tj. za svaki otvoreni skup* $U \subseteq X$ *je* $\pi(U)$ *otvoren skup u* X/Y*.*

(c) *Ako je* Z *normiran prostor i* $A \in B(X, Z)$ *takav da je* $Y \subseteq N(A)$*, onda postoji jedinstven* $\tilde{A} : X/Y \to Z$ *takav da je* $Ax = \tilde{A}\pi(x)$*,* $\forall x \in X$*. Vrijedi* $\|\tilde{A}\| = \|A\|$*.*

Dokaz: (a) Iz (1.22) i (1.23) slijedi da je $\|x + Y\| \leq \|x\|$, tj.

$$\|\pi(x)\| \leq \|x\|,\ \forall x \in X. \tag{1.24}$$

Neka su $u, v \in X$ bilo koji. Za $\varepsilon > 0$ po volji postoje vektori $u_1 \in u + Y$ i $v_1 \in v + Y$ takvi da je $\|u_1\| \leq \|\pi(u)\| + \varepsilon$ i $\|v_1\| \leq \|\pi(v)\| + \varepsilon$. Odatle, pomoću (1.24) dobijemo

$$\|\pi(u_1 + v_1)\| \leq \|u_1 + v_1\| \leq \|u_1\| + \|v_1\| \leq \|\pi(u)\| + \|\pi(v)\| + 2\varepsilon.$$

Budući da vrijedi $\pi(u_1 + v_1) = \pi(u + v)$, to imamo

$$\|\pi(u + v)\| \leq \|\pi(u)\| + \|\pi(v)\|.$$

Ako je $\lambda \neq 0$, onda $\|\lambda\pi(x)\| = \|\lambda x + Y\| = \inf\{\|\lambda x + y; y \in Y\|\} = |\lambda| \inf\{\|x + \frac{y}{\lambda}; y \in Y\|\} = |\lambda|\|x + Y\|$ povlači $\|\lambda\pi(x)\| = |\lambda|\|\pi(x)\|$.

Ako je $\|\pi(x)\| = 0$, onda postoji niz $(y_n)_n$ u Y takav da je $\lim_n \|x + y_n\| = 0$. Tada je $\lim_n y_n = -x$, pa je $x \in Y$ zbog zatvorenosti potprostora Y. Tada je $\pi(x) = x + Y = Y$, a to je neutralni element za zbrajanje u X/Y. Ovime smo dokazali da je preslikavanje $\pi(x) \mapsto \|\pi(x)\|$ norma na prostoru X/Y.

(b) Iz (1.24) slijedi ograničenost operatora π i $\|\pi\| \leq 1$. Ako je $Y \neq X$, onda za $\varepsilon > 0$ po Rieszovoj lemi 1.3.15. postoji jedinični vektor $x_\varepsilon \in X$ takav da je

$$1 - \varepsilon \leq d(x_\varepsilon, Y) = \inf\{\|x_\varepsilon - y\|; y \in Y\} = \|\pi(x_\varepsilon)\|.$$

Odavde je $1 - \varepsilon \leq \|\pi\|$, što daje $\|\pi\| = 1$.

Sada ćemo pokazati da preslikavanje π kuglu $K(0, r) \subset X$ prevodi na kuglu $\tilde{K}(\pi(0), r) \subset X/Y$.

Neka je $\pi(x) \in \tilde{K}(\pi(0), r)$, tj. $\|\pi(x)\| < r$. Tada postoji $\varepsilon > 0$ takav da je $\|\pi(x)\| + \varepsilon < r$. Neka je $x_1 \in \pi(x)$ takav da je $\|x_1\| \leq \|\pi(x)\| + \varepsilon < r$. Sada je $\pi(x_1) = \pi(x)$ i $x_1 \in K(0, r)$, tj. $\pi(x) \in \pi(K(0, r))$. Dakle, vrijedi $\tilde{K}(\pi(0), r) \subseteq \pi(K(0, r))$.

Ako je $x \in K(0,r)$, tj. $\|x\| < r$, onda je $\|\pi(x)\| < r$, tj. $\pi(x) \in \tilde{K}(\pi(0),r)$. Dakle, vrijedi $\pi(K(0,r)) \subseteq \tilde{K}(\pi(0),r)$, te je konačno $\pi(K(0,r)) = \tilde{K}(\pi(0),r)$.

(c) Zbog $N(\pi) = Y \subseteq N(A)$ je preslikavanje $\tilde{A} : X/Y \to Z$ takvo da je $Ax = \tilde{A}\pi(x)$, $\forall x \in X$, dobro definirano. Naime, ako je $\pi(x_1) = \pi(x_2)$ onda je $x_1 - x_2 \in Y \subseteq N(A)$, pa je $Ax_1 = Ax_2$. Linearnost preslikavanja $\tilde{A}$ slijedi iz linearnosti operatora A i π.

Ako je V otvorena kugla oko nule u prostoru Z, onda zbog neprekidnosti operatora A postoji kugla U oko nule u X tako da je $AU \subseteq V$. S druge strane je $\tilde{U} = \pi(U)$ kugla oko $\pi(0)$ u prostoru X/Y za koju vrijedi $\tilde{A}\tilde{U} = (\tilde{A} \circ \pi)U = AU \subset V$, pa je $\tilde{A}$ neprekidan operator.

Nadalje, za $\pi(x) \in X/Y$ i $\varepsilon > 0$ po volji, postoji $x_\varepsilon \in \pi(x)$ takav da je $\|x_\varepsilon\| \leq \|\pi(x)\| + \varepsilon$. Odatle je

$$\|\tilde{A}\pi(x)\| = \|\tilde{A}\pi(x_\varepsilon)\| = \|Ax_\varepsilon\| \leq \|A\|\|x_\varepsilon\| \leq \|A\|(\|\pi(x)\| + \varepsilon),$$

što daje $\|\tilde{A}\| \leq \|A\|$. S druge strane je $\|A\| = \|\tilde{A} \circ \pi\| \leq \|\tilde{A}\|\|\pi\| = \|\tilde{A}\|$. Dakle, vrijedi $\|A\| = \|\tilde{A}\|$. □

1.8.2. Propozicija. *Neka je X normiran prostor i Y zatvoren potprostor.*

(a) *Ako je X Banachov prostor onda je X/Y Banachov prostor.*

(b) *Ako su X/Y i Y Banachovi prostori, onda je X Banachov prostor.*

Dokaz: (a) Neka je X Banachov prostor i neka red $\sum_n \|\pi(x_n)\|$ konvergira. Iz (1.22) slijedi da za svaki $n \in \mathbb{N}$ postoji $x_n' \in \pi(x_n)$ tako da vrijedi $\|x_n'\| \leq \|\pi(x_n)\| + \frac{1}{n^2}$. Tada red $\sum_n \|x_n'\|$ konvergira. Zbog potpunosti prostora X, postoji $x \in X$ takav da je $x = \sum_n x_n'$. Neprekidnost operatora π povlači $\pi(x) = \sum_n \pi(x_n') = \sum_n \pi(x_n)$, pa je potpunost prostora X/Y dokazana.

(b) Neka su X/Y i Y Banachovi prostori i neka red $\sum_n \|x_n\|$ konvergira, gdje su $x_n \in X$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Zbog (1.24) konvergira i red $\sum_n \|\pi(x_n)\|$. Zbog potpunosti prostora X/Y red $\sum_n \pi(x_n)$ konvergira k nekom $\pi(x) \in X/Y$, tj. $\lim_n \pi\left[x - \sum_{k=1}^n x_k\right] = 0.$

Iz (1.22), za svaki $n \in \mathbb{N}$ slijedi postojanje $y_n \in Y$ tako da je

$$\|y_n + \left[x - \sum_{k=1}^n x_k\right]\| \leq \|\pi\left[x - \sum_{k=1}^n x_k\right]\| + \frac{1}{2^n}. \tag{1.25}$$

Odavde imamo

$$\|y_{n+p} - y_n\| \leq \|y_{n+p} + \left[x - \sum_{k=1}^{n+p} x_k\right]\| + \|y_n + \left[x - \sum_{k=1}^{n} x_k\right]\| + \|\sum_{k=n+1}^{n+p} x_k\| \leq$$

$$\leq \|\pi\left[x - \sum_{k=1}^{n+p} x_k\right]\| + \|\pi\left[x - \sum_{k=1}^{n} x_k\right]\| + \frac{1}{2^{n+p}} + \frac{1}{2^n} + \sum_{k=n+1}^{\infty} \|x_k\|,$$

što povlači da je $(y_n)_n$ Cauchyjev niz. Zbog potpunosti prostora Y, niz $(y_n)_n$ konvergira u Y k nekom vektoru $y \in Y$. Iz $\lim_n(x + y_n) = x + y$ i (1.25) dobivamo $x+y = \lim_n \sum_{k=1}^{n} x_k = \sum_{n=1}^{\infty} x_n$, pa je potpunost prostora X dokazana. $\square$

1.9 Hahn-Banachov teorem i neke primjene

1.9.1 Hahn-Banachov teorem

1.9.1. Teorem. *Neka je X normiran prostor, $Y \leq X$ i $f \in Y'$. Postoji $g \in X'$ takav da je $g|_Y = f$ i $\|g\| = \|f\|$.*

Dokaz: (1) X je realan i $\dim X/Y = 1$.

Neka je $z \in X \setminus Y$. Svaki $x \in X$ ima jedinstven prikaz u obliku $x = \lambda z + y$ za neke $\lambda \in \mathbb{R}$ i $y \in Y$.

Za bilo koje $y_1, y_2 \in Y$ vrijedi

$$f(y_1) - f(y_2) = f(y_1 - y_2) \leq \|f\|\|y_1 - y_2\| = \|f\|\|y_1 + z - (y_2 + z)\| \leq \|f\|\|y_1 + z\| + \|f\|\|y_2 + z\|,$$

a odatle imamo

$$-f(y_2) - \|f\|\|z + y_2\| \leq -f(y_1) + \|f\|\|z + y_1.\| \tag{1.26}$$

Stavimo

$$\begin{aligned} \alpha &= \sup\{-f(y) - \|f\|\|z + y\|; y \in Y\} \\ \beta &= \inf\{-f(y) + \|f\|\|z + y\|; y \in Y\} \end{aligned}$$

pa imamo $\alpha \leq \beta$.

Neka je $\gamma \in [\alpha, \beta]$. Definiramo $g : X \to \mathbb{R}$ sa

$$g(\lambda z + y) = \lambda\gamma + f(y), \ \lambda \in \mathbb{R}, y \in Y.$$

Tada je g linearan funkcional i $g|_Y = f$. Za $\lambda > 0$ i $y \in Y$ je

$$g(\lambda z + y) = \lambda\gamma + f(y) = \lambda(\gamma + f(\frac{1}{\lambda}y)) \leq$$

$$\leq \lambda(\gamma + \|f\|\|z + \frac{1}{\lambda}y\| - \beta) \leq \lambda\|f\|\|z + \frac{1}{\lambda}y\| \leq \|f\|\|\lambda z + y\|.$$

Nadalje,

$$g(\lambda z + y) = \lambda\gamma + f(y) = \lambda(\gamma + f(\frac{1}{\lambda}y)) \geq$$

$$\geq \lambda(\gamma - \|f\|\|z + \frac{1}{\lambda}y\| - \alpha) \geq -\lambda\|f\|\|z + \frac{1}{\lambda}y\| \geq -\|f\|\|\lambda z + y\|.$$

Dakle,

$$|g(\lambda z + y)| \leq \|f\|\|\lambda z + y\|, \ \ \forall \lambda > 0, \ \forall y \in Y.$$

Neka je sada $\lambda < 0$ i $y \in Y$. Imamo

$$g(\lambda z + y) = \lambda\gamma + f(y) = \lambda(\gamma + f(\frac{1}{\lambda}y)) \geq$$

$$\geq \lambda(\gamma + \|f\|\|z + \frac{1}{\lambda}y\| - \beta) \geq \lambda\|f\|\|z + \frac{1}{\lambda}y\| \geq -\|f\|\|\lambda z + y\|.$$

Također,

$$g(\lambda z + y) = \lambda\gamma + f(y) = \lambda(\gamma + f(\frac{1}{\lambda}y)) \leq$$

$$\leq \lambda(\gamma - \|f\|\|z + \frac{1}{\lambda}y\| - \beta) \leq -\lambda\|f\|\|z + \frac{1}{\lambda}y\| \leq \|f\|\|\lambda z + y\|,$$

što povlači $|g(x)| \leq \|f\|\|x\|, \ \ \forall x \in X$, odnosno $\|g\| = \|f\|$.

(2) Neka je X realan normiran prostor. S $\mathcal{F}$ označimo skup svih uređenih parova (Z, h) takvih da je Z potprostor, $Y \leq Z \leq X$, i $h \in Z'$ funkcional za kojeg je $h|_Y = f$ i $\|h\| = \|f\|$. Skup $\mathcal{F}$ je parcijalno uređen s uređajem

$$(Z_1, h_1) \preceq (Z_2, h_2) \Leftrightarrow Z_1 \leq Z_2, \ \ h_2|_{Z_1} = h_1.$$

Neka je $\mathcal{G}$ linearno uređen podskup (lanac) od $\mathcal{F}$. Tada je $Z_0 = \bigcup_{(Z,h)\in\mathcal{G}} Z$ potprostor koji sadrži Y. Na Z_0 definiramo h_0 sa $h_0|_Z = h$, za svaki $(Z, h) \in \mathcal{G}$. Tada je h_0 linearan funkcional i $h_0|_Y = f$. Za svaki $y \in Z_0$ postoji $(Z, h) \in \mathcal{G}$ takav da je $y \in Z$. Tada vrijedi $|h_0(y)| = |h(y)| \leq \|f\|\|y\|$, tj. $\|h_0\| = \|f\|$, pa je $(Z_0, h_0) \in \mathcal{F}$ očigledno gornja međa za $\mathcal{G}$.

Po Zornovoj lemi $\mathcal{F}$ ima barem jedan maksimalan element (V, g). Želimo dokazati da je $V = X$. U suprotnom bi postojao $x \in X \setminus V$. Neka je $W = \mathbb{R}x + V$. Prema (1) postoji $h \in W'$ takav da vrijedi $h|_V = g$ i $\|h\| = \|g\|$. Tada je $h|_Y = g|_Y = f$ i $\|h\| = \|f\|$, dakle $(V, g) \preceq (W, h)$ i $W \neq V$ (kontradikcija s maksimalnošću od (V, g)).

(3) Neka je X kompleksan normiran prostor. S X_r označimo X promatran kao vektorski prostor nad $\mathbb{R}$, a s Y_r potprostor Y kao vektorski prostor nad $\mathbb{R}$. Neka su $f_1, f_2 : Y_r \to \mathbb{R}$ zadani sa

$$\begin{aligned} f_1(y) &= \operatorname{Re} f(y), \\ f_2(y) &= \operatorname{Im} f(y). \end{aligned}$$

Tada su f_1, f_2 linearni funkcionali. Zbog $f(iy) = if(y)$ vrijedi $f_1(iy) + if_2(iy) = if_1(y) - f_2(y)$, odnosno

$$\begin{aligned} f_2(y) &= -f_1(iy), \\ f_1(y) &= f_2(iy). \end{aligned}$$

Prema tome je f određen svojim realnim dijelom f_1, tj. $f(y) = f_1(y) - if_1(iy)$, $\forall y \in Y$. Vrijedi $|f_1(y)| \leq (|f_1(y)|^2 + |f_2(y)|^2)^{\frac{1}{2}} = |f(y)| \leq \|f\|\|y\|$, tj. $f_1 \in Y_r'$.

Prema (2) postoji $F_1 \in X_r'$ takav da je $F_1|_{Y_r} = f_1$ i $\|F_1\| = \|f_1\|$. Sada definiramo $F : X \to \mathbb{C}$ sa

$$F(x) = F_1(x) - iF_1(ix), \ \ \forall x \in X.$$

Očito je F linearan funkcional na X. Nadalje je $F(ix) = F_1(ix) - iF_1(-x) = iF_1(x) + F_1(ix) = i(F_1(x) - iF_1(ix)) = iF(x)$, pa je F linearan nad $\mathbb{C}$. Također je $F|_Y = f$.

Za svaki $x \in X$ postoji $\lambda \in \mathbb{C}$, $|\lambda| = 1$, takav da vrijedi $|F(x)| = \lambda F(x)$. Tada je

$$|F(x)| = \lambda F(x) = F(\lambda x) = F_1(\lambda x) = |F_1(\lambda x)| \leq \|f_1\|\|\lambda x\| \leq \|f\|\|x\|,$$

tj. $\|F\| = \|f\|$. □

1.9.2 Neke posljedice Hahn-Banachovog teorema

1.9.2. Teorem. *Neka je $X \neq \{0\}$ normiran prostor i $x \in X$. Postoji $f \in X'$ takav da je $\|f\| = 1$ i $f(x) = \|x\|$.*

Dokaz: Na potprostoru $Y = \mathbb{K}x$ definiramo linearan funkcional $g(\lambda x) = \lambda\|x\|$. Vrijedi $g(x) = \|x\|$ i $\|g\| = 1$, pa tvrdnja slijedi primjenom teorema 1.9.1.. □

1.9.3. Korolar. *Za normiran prostor X i za svaki $x \in X$ vrijedi*

$$\|x\| = \max\{|f(x)| \ ; \ f \in X', \ \|f\| = 1\} \tag{1.27}$$

Dokaz: Za svaki $f \in X'$, $\|f\| = 1$, je $|f(x)| \leq \|x\|$, a za f iz teorema 1.9.2. vrijedi $\|x\| = f(x) = |f(x)|$. □

1.9.4. Teorem. *Neka je X normiran prostor, $Y \leq X$ i $x \in X$ takav da vrijedi*

$$d = d(x, Y) = \inf\{\|x - y\|; \, y \in Y\} > 0. \tag{1.28}$$

Postoji $f \in X'$ takav da je $\|f\| = 1$, $f(x) = d$ i $f|_Y = 0$.

Dokaz: Neka je $Z = \mathbb{K}x + Y$. Definiramo $g : Z \to \mathbb{K}$ sa

$$g(\lambda x + y) = \lambda d, \ \forall \lambda \in \mathbb{K}, \ y \in Y.$$

Za $\lambda \neq 0$ i $y \in Y$ imamo $\|\lambda x + y\| = |\lambda| \|x - \frac{y}{-\lambda}\| \geq |\lambda| d$, odakle slijedi $|g(\lambda x + y)| = |\lambda| d \leq \|\lambda x + y\|$, pa imamo $\|g\| \leq 1$ i $g(x) = d$.

Dokažimo još da vrijedi $\|g\| \geq 1$. Neka je $\varepsilon > 0$ po volji. Tada postoji $y \in Y$ takav da je $\|x - y\| < d + \varepsilon$. Stavimo $z = \frac{1}{\|x-y\|}(x - y)$. Tada je $\|z\| = 1$ i $g(z) = \frac{d}{\|x-y\|} > \frac{d}{d+\varepsilon}$, dakle, $\|g\| = 1$.

Sada primijenimo teorem 1.9.1.. : $\exists f \in X'$, $\|f\| = \|g\| = 1$, $f|_Z = g$. Tada je $f(x) = g(x) = d$ i $f(y) = g(y) = 0$, $\forall y \in Y$. □

1.9.5. Teorem. *Neka je X normiran prostor i $Y \leq X$. Y je gust u X ako i samo ako iz $f \in X'$, $f|_Y = 0$ slijedi $f = 0$.*

Dokaz: Jasno, ako je Y gust onda implikacija vrijedi.

Pretpostavimo da implikacija vrijedi. Neka je $x \in X \setminus \overline{Y}$. Sada teorem 1.9.4. daje kontradikciju. Stoga vrijedi $X = \overline{Y}$. □

1.9.6. Teorem. *Neka je X beskonačno dimenzionalan normiran prostor. Tada postoje nizovi $(x_n)_n$ u X i $(f_n)_n$ u X' takvi da je $\|x_n\| = 1$ i $f_n(x_m) = \delta_{n,m}$, $\forall n, m \in \mathbb{N}$.*

Dokaz: Uzmimo $x_1 \in X$ i $f_1 \in X'$ tako da je $\|x_1\| = 1$ i $f_1(x_1) = 1$ što je moguće prema teoremu 1.9.2.. Pretpostavimo da imamo $x_1, \ldots, x_n \in X$ i $f_1, \ldots, f_n \in X'$ takve da vrijedi $\|x_k\| = 1$ $(k = 1, \ldots, n)$ i $f_i(x_j) = \delta_{i,j}$ $(i, j = 1, \ldots, n)$.

Pošto je X beskonačno dimenzionalan prostor to postoji $y \in X \backslash [\{x_1, \ldots, x_n\}]$ i neka je $z = y - \sum_{k=1}^{n} f_k(y)x_k \neq 0$. Vrijedi $f_k(z) = f_k(y) - f_k(y) = 0$ $(k = 1, \ldots, n)$. Prema teoremu 1.9.2. postoji funkcional $g \in X'$ takav da je $g(z) = \|z\|$. Stavimo $x_{n+1} = z/\|z\|$ i $f_{n+1} = g - \sum_{k=1}^{n} g(x_k)f_k$ te imamo $f_{n+1}(x_k) = 0$ $(k = 1, \ldots, n)$. Tada vrijedi $f_k(x_{n+1}) = 0$ i $f_{n+1}(x_k) = g(x_k) - g(x_k) = 0$ $(k = 1, \ldots, n)$. Nadalje $f_{n+1}(x_{n+1}) = f_{n+1}(z)/\|z\| = g(z)/\|z\| = 1$. □

Kažemo da su nizovi iz prethodnog teorema **biortogonalni**.

1.9.7. Teorem. *Neka je X normiran prostor takav da je X' separabilan. Tada je X separabilan.*

Dokaz: Neka je $\{f_n;\, n \in \mathbb{N}\}$ gust u $\{f \in X';\, \|f\| = 1\}$. Tada $\forall n \in \mathbb{N}$ $\exists x_n \in X$, takav da je $\|x_n\| = 1$, i $f_n(x_n) \geq \frac{1}{2}$. Neka je Y najmanji zatvoren potprostor koji sadrži $\{x_n;\, n \in \mathbb{N}\}$. Tada je Y separabilan. Tvrdimo da je $Y = X$. U suprotnom, tj. ako bi bilo $Y \neq X$, postojao bi $x \in X$, $d(x, Y) > 0$, a onda bi prema teoremu 1.9.4. postojao i $f \in X'$, $\|f\| = 1$, $f|_Y = 0$. Posebno bi $f(x_n) = 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$ povlačilo

$$\frac{1}{2} \leq f_n(x_n) = |f_n(x_n) - f(x_n)| \leq \|f_n - f\|\|x_n\| = \|f_n - f\|,$$

a to je kontradikcija s gustoćom skupa $\{f_n;\, n \in \mathbb{N}\}$. □

1.9.8. Napomena. $\ell_1' = \ell_\infty$ pokazuje da dualni prostor separabilnog prostora ne mora biti separabilan.

1.9.9. Teorem. *Za normirani prostor X definiramo $\kappa : X \to X''$ sa*

$$[\kappa(x)](f) = f(x), \;\; f \in X', \;\; x \in X.$$

κ je linearna izometrija.

Dokaz: Linearnost κ je očita. Nadalje, za $x \in X$ i za svaki $f \in X'$ je

$$|[\kappa(x)](f)| = |f(x)| \leq \|x\|\|f\|.$$

Odatle je $\|\kappa(x)\| \leq \|x\|$, $\forall x \in X$. Za $x \in X$ izaberemo po teoremu 1.9.2. funkcional $f \in X'$, $\|f\| = 1$, $f(x) = \|x\|$. Tada je $\|\kappa(x)\| \geq |[\kappa(x)](f)| = |f(x)| = \|x\|$. Dakle, κ je izometrija. □

Za normiran prostor X kažemo da je **refleksivan** ako vrijedi $\kappa(X) = X''$.

1.10 Hamelove baze

Slijedeće definicije dobro su poznate iz teorije konačno dimenzionalnih vektorskih prostora. One imaju smisla i za prostore koji nisu konačne dimenzije.

1.10.1. Definicija. Neprazan podskup S vektorskog prostora X je **linearno nezavisan** ako linearna kombinacija njegovih elemenata iščezava jedino na trivijalan način, tj. $x_1, \ldots, x_n \in S$ i $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k = 0$ za neke $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ povlači $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$.

1.10.2. Definicija. Linearno nezavisan podskup S vektorskog prostora X zovemo **Hamelova** ili **algebarska baza** prostora X ako se svaki element $x \in X$ može napisati kao linearna kombinacija međusobno različitih elemenata skupa S.

Prikaz vektora $x \in X$ pomoću različitih elemenata Hamelove baze je jedinstven. Naime, neka je $x = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k y_k = \sum_{j=1}^{m} \mu_j z_j$, gdje su $y_1, \ldots, y_n$ međusobno različiti, i $z_1, \ldots, z_m$ međusobno različiti elementi od S, a također $\lambda_k \neq 0$ $(k = 1, \ldots, n)$ i $\mu_j \neq 0$ $(j = 1, \ldots, m)$. Tada očito vrijedi

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k y_k + \sum_{j=1}^{m} (-\mu_j) z_j = 0.$$

Kada bi u skupu $\{y_1, \ldots, y_n, z_1, \ldots, z_m\}$ svi elementi bili međusobno različiti imali bi konačan linearno nezavisan skup pa bi svi koeficijenti o prethodnoj linearnoj kombinaciji bili jednaki 0, što je suprotno pretpostavci. Dakle, mora vrijedit $y_{k_0} = z_{j_0}$ za točno jedan par $k_0 \in \{1, \ldots, n\}$ i $j_0 \in \{1, \ldots, m\}$, tako da je $y_{k_0} \neq z_j$ $(j \neq j_0)$ i $z_{j_0} \neq y_k$ $(k \neq k_0)$. Sada imamo

$$(\lambda_{k_0} - \mu_{j_0}) y_{k_0} + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq k_0}}^{n} \lambda_k y_k + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq j_0}}^{m} (-\mu_j) z_j = 0.$$

$y_{k_0} = z_{j_0}$ ja sada različit od svih preostalih elemenata pa je od njih linearno nezavisan, što odmah daje $\lambda_{k_0} = \mu_{j_0}$. Na ovaj način u konačno koraka zaključujemo da vrijedi $n = m$, te da su elementi $z_1, \ldots, z_n$ permutacija od $y_1, \ldots, y_n$ i $\mu_1, \ldots, \mu_n$ ista permutacija od $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$.

1.10.3. Teorem. *Svaki vektorski prostor X ima Hamelovu bazu.*

Dokaz: Neka je $\mathcal{S}$ familija linearno nezavisnih podskupova od X parcijalno uređena inkluzijom. Pokažimo da svaki lanac $\mathcal{L} = \{S_\alpha; \alpha \in I\}$ u $\mathcal{S}$ ima gornju među. Pokažimo da je $S = \bigcup_{\alpha \in I} S_\alpha$ linearno nezavisan skup u X.

U tu svrhu uzmimo bilo koji konačan skup $\{x_1, \ldots, x_n\} \subset S$ i pokažimo da su njegovi elementi linearno nezavisni. Naime, postoje $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in I$ takvi da je $x_i \in S_{\alpha_i}$ $(i = 1, \ldots, n)$. Zbog linearnosti uređaja na $\mathcal{L}$ postoji $S_0 = \max\{S_{\alpha_i}; i = 1, \ldots, n\} \in \mathcal{L}$ i onda je $x_i \in S_0$ $(i = 1, \ldots, n)$ i S_0 je linearno nezavisan skup. Dakle S je gornja međa lanca $\mathcal{L}$ u $\mathcal{S}$.

Prema Zornovoj lemi skup $\mathcal{S}$ ima barem jedan maksimalan element S_M. Pokažimo da je S_M Hamelova baza od X. U suprotnom, postojao bi $x \in X$, $x \neq 0$, koji nije moguće napisati kao linearnu kombinaciju od konačnog broja elemenata iz S_M, tj. skup $S_N = S_M \cup \{x\}$ je linearno nezavisan skup i vrijedi $S_M \subset S_N$, što je kontradikcija s maksimalnošću skupa S_M. $\square$

1.10.4. Korolar. *Linearno nezavisan skup u vektorskom prostoru X je Hamelova baza ako i samo ako je maksimalan u smislu inkluzije. Svaki linearno nezavisan skup u X može se nadopuniti do Hamelove baze.*

Dokaz: Prva tvrdnja slijedi kao u dokazu prethodnog teorema. Za dokaz druge tvrdnje promatra se familija svih linearno nezavisnih skupova koji sadrže zadani linearno nezavisan skup i primjeni se Zornova lema kao u teoremu. $\square$

1.10.5. Teorem. *Sve Hamelove baze vektorskog prostora X imaju jednak kardinalni broj.*

Dokaz: Smatramo da je tvrdnja dokazana za konačno dimenzionalne vektorske prostore. Neka su E i E' dvije Hamelove baze pretpostavimo da vrijedi $\operatorname{card} E \geq \aleph_0$. Tada je i $\operatorname{card} E' \geq \aleph_0$. Za svaki $e' \in E'$ imamo

$$e' = \sum_{e \in E} \lambda(e, e')e,$$

gdje je $\lambda(e, e') \neq 0$ za najviše konačno mnogo vektora $e \in E$, tj. skup $E(e') = \{e \in E; \lambda(e, e') \neq 0\}$ je konačan. Tvrdimo da vrijedi

$$E = \bigcup_{e' \in E'} E(e'). \tag{1.29}$$

U suprotnom bi postojao $e_0 \in E$ koji nije niti u jednom od skupova $E(e')$, $e' \in E'$. Nadalje, vrijedi $e_0 = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e'_i$ za neko $n \in \mathbb{N}$ i neke vektore $e'_1, \ldots, e'_n \in E'$. No vektori $e'_1, \ldots, e'_n \in E'$ su linearne kombinacije vektora iz $E \setminus \{e_0\}$, pa je onda i vektor $e_0 \in E$ linearna kombinacija takvih vektora, što je kontradikcija s činjenicom da je baza E linearno nezavisan skup. Dakle, vrijedi (1.29).

Iz jednakosti (1.29) slijedi $\operatorname{card} E \leq \aleph_0 \cdot \operatorname{card} E' = \operatorname{card} E'$. Obratna nejednakost dobije se zamjenom uloge baza E i E', dakle vrijedi $\operatorname{card} E' = \operatorname{card} E$. □

1.10.6. Definicija. Kardinalni broj Hamelove ili algebarske baze vektorskog prostora X nazivamo Hamelova ili algebarska dimenzija prostora i označavamo s $\dim X$.

1.10.7. Teorem. *Dva vektorska prostora nad istim poljem su linearno izomorfna ako i samo ako imaju jednake Hemelove dimenzije.*

Dokaz: Lako je pokazati da linearna bijekcija prostora preslikava Hamelovu bazu na Hamelovu bazu, odakle slijedi jednakost dimenzija. Obratno, bijektivno preslikavanje među Hamelovim bazama prostora na jedinstven način se po linearnosti proširuje do linearne bijekcije vektorskih prostora. □

1.10.8. Teorem. *Svaki beskonačno dimenzionalan Banachov prostor ima Hamelovu dimenziju strogo veću od $\aleph_0$.*

Dokaz: U suprotnom slučaju postojala bi prebrojiva Hamelova baza $\mathcal{B} = \{z_1, z_2, \ldots\}$ od X. Novu Hamelovu bazu konstruiramo na slijedeći način. Stavimo $e_1 = \frac{z_1}{\|z_1\|}$. Ako smo definirali vektore nove baze $e_1, \ldots, e_n$, onda po Rieszovoj lemi 1.3.15. izaberemo $e_{n+1} \in [\{z_1, \ldots, z_{n+1}\}]$ takav da je $\|e_{n+1}\| = 1$ i $\|e_{n+1} - x\| > \frac{1}{2}$ za sve $x \in [\{e_1, \ldots, e_n\}]$. Pošto je $[\{e_1, \ldots, e_n\}] = [\{z_1, \ldots, z_n\}]$, tada je i $\mathcal{B}' = \{e_1, e_2, \ldots\}$ Hamelova baza od X.

Neka je $y = \sum_{k=1}^{\infty} 4^{-k} e_k$. Red je apsolutno konvergentan, pa je zbog potpunosti prostora X i konvergentan, tj. $y \in X$. Pošto je $\mathcal{B}'$ Hamelova baza, postoje vektori $e_1, \ldots, e_n$ i skalari $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ takvi da je $y = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k$. Odatle imamo

$$0 = y - y = \sum_{k=1}^{n} (\alpha_k - 4^{-k}) e_k - 4^{-(n+1)} e_{n+1} - \sum_{k=n+2}^{\infty} 4^{-k} e_k.$$

Odatle je

$$\| \sum_{k=1}^{n} (\alpha_k - 4^{-k}) e_k - 4^{-(n+1)} e_{n+1} \| = \| \sum_{k=n+2}^{\infty} 4^{-k+n+1} e_k \|$$

ili

$$\| \sum_{k=1}^{n} 4^{(n+1)} (\alpha_k - 4^{-k}) e_k - e_{n+1} \| = \| \sum_{k=n+2}^{\infty} 4^{-k+n+1} e_k \|.$$

Zbog $\sum_{k=1}^{n} 4^{(n+1)}(\alpha_k - 4^{-k})e_k \in [\{e_1, \ldots, e_n\}]$ lijeva strana je veća od $\frac{1}{2}$ pa imamo kontradikciju

$$\frac{1}{2} \leq \| \sum_{k=n+2}^{\infty} 4^{-k+n+1} e_k \| \leq \sum_{k=n+2}^{\infty} 4^{-k+n+1} \|e_k\| = \sum_{k=1}^{\infty} 4^{-k} = \frac{1}{3}.$$

Dakle, beskonačno dimenzionalan Banachov prostor ne može imati prebrojivu Hamelovu bazu. $\square$

U dokazu slijedećeg rezultata važna nam je činjenica da se svaki prebrojivi skup može napisati kao unija od neprebrojivo mnogo prebrojivih skupova koji međusobno imaju konačne presjeke. To je dovoljno pokazati za skup $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Za svaki $t \in \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$ definiramo skup $S_t = \{(n,m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}; |m - n \operatorname{tg} t| \leq \frac{1}{2}\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 t}\}$, a to je skup elemenata koji leže u simetričnoj pruzi oko pravca $y = x \operatorname{tg} t$ širine 1. Svaka takva pruga sadrži prebrojivo elemenata skupa $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, a presjek dvije pruge je ograničen skup (podskup paralelograma) pa sadrži samo konačno elemenata.

1.10.9. Teorem. *Svaki beskonačno dimenzionalan separabilan Banachov prostor ima Hamelovu dimenziju c.*

Dokaz: Neka je X beskonačno dimenzionalan Banachov prostor. Dovoljno je dokazati da on sadrži linearno nezavisan skup kardinaliteta c. Iz Hahn-Banachovog teorema i činjenice da je X beskonačno dimenzionalan, slijedi postojanje nizova $(x_n)_n$ u X i $(x'_n)_n$ u X' takvi da je $x'_n(x_m) = \delta_{m,n}$. Skup $\{x_n; n \in \mathbb{N}\}$ je linearno nezavisan skup i za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi $x_n \notin [\{x_m; m \in \mathbb{N}, m \neq n\}]$. Neka je $\{N_t \subset \mathbb{N}; 0 < t < 1\}$ familija beskonačnih skupova sa svojstvom da za $t \neq t'$ vrijedi $\operatorname{card}(N_t \cap N_{t'}) < \aleph_0$. Za svaki $t \in \langle 0, 1 \rangle$ stavimo $e_t = \sum_{n \in N_t} \frac{1}{2^n} x_n \in X$. Skup $\{e_t; 0 < t < 1\}$ je linearno nezavisan u X. Naime, neka je $\sum_{k=1}^{m} \lambda_k e_{t_k} = 0$. Za svako $j \in \{1, \ldots, m\}$, zbog svojstava skupova N_{t_k} $(k = 1, \ldots, m)$ i $N_{t_j} \bigcap (\bigcup_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{m} N_{t_i}) = \bigcup_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{m} (N_{t_j} \bigcap N_{t_i})$, postoji indeks $p \in N_{t_j} \setminus (\bigcup_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{m} N_{t_i})$. Tada je $0 = x'_p(\sum_{k=1}^{m} \lambda_k e_{t_k}) = \sum_{k=1}^{m} \lambda_k x'_p(e_{t_k}) = \lambda_j \frac{1}{2^p}$, pa je $\lambda_j = 0$.

Iz prethodnog slijedi da X ima Hamelovu bazu kardinalnog broja $\geq c$. S druge strane, zbog separabilnosti, sam prostor X ima kardinalni broj jednak c. Odatle je njegova Hamelova dimenzija jednaka c. $\square$

1.11 Hilbertovi prostori

1.11.1 Ortonormirane baze

U ovoj točki X je unitaran prostor.

1.11.1. Lema. *Neka su $e_1, \ldots, e_n \in X$ ortonormirani vektori i $x \in X$. Tada je*

$$\|x - \sum_{k=1}^{n} (x|e_k)e_k\| < \|x - y\|, \quad \forall y \in [\{e_1, \ldots, e_n\}],\ y \neq \sum_{k=1}^{n} (x|e_k)e_k. \tag{1.30}$$

Dokaz: Neka je $y \in [\{e_1, \ldots, e_n\}]$, $y \neq \sum_{k=1}^{n} (x|e_k)e_k$. Možemo pisati $y = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k$ pri čemu je $\alpha_k \neq (x|e_k)$ za neko $k \in \{1, \ldots, n\}$. Slijedi

$$\|x - y\|^2 = (x - y|x - y) = (x - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k | x - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k) =$$

$$= \|x\|^2 - \sum_{k=1}^{n} \overline{\alpha_k}(x|e_k) - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k (e_k|x) + \sum_{k=1}^{n} |\alpha_k|^2 =$$

$$= \|x\|^2 - \sum_{k=1}^{n} |(x|e_k)|^2 + \sum_{k=1}^{n} |(x|e_k)|^2 - \sum_{k=1}^{n} \overline{\alpha_k}(x|e_k) - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \overline{(x|e_k)} + \sum_{k=1}^{n} |\alpha_k|^2 =$$

$$= \|x\|^2 - \sum_{k=1}^{n} |(x|e_k)|^2 + \sum_{k=1}^{n} |(x|e_k) - \alpha_k|^2 > \|x\|^2 - \sum_{k=1}^{n} |(x|e_k)|^2.$$

Isti račun za $y = \sum_{k=1}^{n} (x|e_k)e_k$, tj. $\alpha_k = (x|e_k)$, $\forall k \in \mathbb{N}$, daje

$$\|x - \sum_{k=1}^{n} (x|e_k)e_k\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{k=1}^{n} |(x|e_k)|^2.$$

Prema tome, $\|x - \sum_{k=1}^{n} (x|e_k)e_k\|^2 < \|x - y\|^2$. $\square$

1.11.2. Propozicija. *Ako je $e_1, e_2, \ldots, e_n, \ldots$ konačan ili prebrojiv ortonormiran niz u unitarnom prostoru X, tada za svaki $x \in X$ vrijedi tzv.* **Besselova nejednakost**

$$\sum_{k} |(x|e_k)|^2 \leq \|x\|^2. \tag{1.31}$$

Dokaz: Iz dokaza leme 1.11.1. vidi se da za svako $n \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$0 \le \|x - \sum_{k=1}^{n} (x|e_k)e_k\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{k=1}^{n} |(x|e_k)|^2.$$

Dakle,

$$\sum_{k=1}^{n} |(x|e_k)|^2 \le \|x\|^2, \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

U slučaju da je niz beskonačan pustimo $n \to \infty$. $\square$

U daljnjem je X separabilan unitaran prostor.

1.11.3. Propozicija. *U separabilnom unitarnom prostoru X svaki je ortonormiran skup konačan ili prebrojiv.*

Postoji ortonormiran skup E takav da je $\overline{[E]} = X$.

Dokaz: Neka je $\{e_j; j \in J\}$ ortonormiran skup u X. Neka je $K_j = K(e_j, \frac{\sqrt{2}}{2})$, $j \in J$. Za $i \neq j$ je $\|e_i - e_j\|^2 = (e_i|e_i) - (e_i|e_j) - (e_j|e_i) + (e_j|e_j) = 2$. Dakle, $K_i \cap K_j = \emptyset$ za $i \neq j$.

Neka je sada $\{x_n; n \in \mathbb{N}\}$ gust skup u X. Tada $\forall j \in J$ postoji $n \in \mathbb{N}$ takav da je $x_n \in K_j$. Funkcija $j \mapsto \min\{n \in \mathbb{N}; x_n \in K_j\}$, $\forall j \in J$, je injekcija sa J u $\mathbb{N}$, pa je $\operatorname{card}(J) \le \aleph_0$.

Za dokaz druge tvrdnje uočimo da je iz skupa $\{x_n; n \in \mathbb{N}\}$ moguće induktivno izdvojiti podskup S koji se sastoji od linearno nezavisnih vektora. Tada pomoću Gram-Schmidtovog postupka dođemo do traženog ortonormiranog skupa E, takvog da je $[E] = [S]$, a onda i $\overline{[E]} = \overline{[S]}$. $\square$

1.11.4. Teorem. *Neka je X beskonačno dimenzionalan separabilan unitaran prostor i $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ortonormiran niz u X. Slijedeća svojstva tog niza su međusobno ekvivalentna:*

(*a*) $\forall x \in X$ *je* $x = \sum_{k=1}^{\infty} (x|e_k)e_k$.

(*b*) $\overline{[\{e_k; k \in \mathbb{N}\}]} = X$.

(*c*) $\forall x \in X$ *je* $\|x\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |(x|e_k)|^2$.

(*d*) $\forall x, y \in X$ *je* $(x|y) = \sum_{k=1}^{\infty} (x|e_k)(e_k|y)$.

U tom slučaju red u (d) konvergira apsolutno $\forall x, y \in X$.

Niz $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *nazivamo* **ortonormirana baza** *od* X*, a (c) i (d) se zovu* **Parsevalove jednakosti**.

Dokaz: ($(a) \Rightarrow (b)$) Zbog $\sum_{k=1}^n (x|e_k)e_k \in [\{e_k; k \in \mathbb{N}\}]$, $\forall x \in X$, $\forall n \in \mathbb{N}$, slijedi $x \in \overline{[\{e_k; k \in \mathbb{N}\}]}$, $\forall x \in X$.

($(b) \Rightarrow (c)$) Neka je $x \in X$ bilo koji vektor i $\varepsilon > 0$ po volji. Postoji $y \in [\{e_k; k \in \mathbb{N}\}]$ takav da je $\|x - y\| \leq \varepsilon$. Imamo $y \in [\{e_k; 1 \leq k \leq n\}]$ za neko $n \in \mathbb{N}$. Prema lemi 1.11.1. je

$$0 \leq \|x\|^2 - \sum_{k=1}^n |(x|e_k)|^2 = \|x - \sum_{k=1}^n (x|e_k)e_k\|^2 \leq \varepsilon^2,$$

pa zbog (1.31) slijedi $\|x\|^2 = \lim_n \sum_{k=1}^n |(x|e_k)|^2$.

($(c) \Rightarrow (a)$) Neka je $x \in X$ bilo koji vektor $\varepsilon > 0$ po volji. Tada postoji $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ takav da $n \geq n_\varepsilon$ povlači

$$0 \leq \|x - \sum_{k=1}^n (x|e_k)e_k\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{k=1}^n |(x|e_k)|^2 \leq \varepsilon^2.$$

($(a) \Rightarrow (d)$)Za svaki $x, y \in X$ imamo

$$(x|y) = (\lim_n \sum_{k=1}^n (x|e_k)e_k|y) = \lim_n \sum_{k=1}^n (x|e_k)(e_k|y).$$

($(d) \Rightarrow (c)$) Stavimo $x = y$.

U tom slučaju je $((x|e_n))_{n\in\mathbb{N}} \in \ell_2$ pa red u (d) apsolutno konvergira po teoremu 1.4.5. $\square$

1.11.5. Primjer. Prostor $C_{2,0}([-\pi, \pi]) = \{f \in C_2([-\pi, \pi]); f(-\pi) = f(\pi)\}$ ima ortonormiranu bazu

$$E = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos(nt), \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin(nt); n \in \mathbb{N} \right\}.$$

1.11.6. Teorem. *Ako je* E *maksimalan ortonormiran skup u separabilnom Hilbertovom prostoru* X*, onda je* E *ortonormirana baza u* X.

Dokaz: Neka je $E = \{e_n; n \in \mathbb{N}\}$ maksimalan ortonormiran skup i $x \in X$ bilo koji. Stavimo $x_n = \sum_{k=1}^n (x|e_k)e_k$, $\forall n \in \mathbb{N}$, pa za $m \geq n$ imamo $\|x_m - x_n\|^2 = \sum_{k=n+1}^m |(x|e_k)|^2$. Zbog Besselove nejednakosti (1.31) $(x_n)_n$ je Cauchyjev niz, pa konvergira k nekom $x_0 \in X$, tj. $x_0 = \lim_n x_n = \sum_{k=1}^\infty (x|e_k)e_k$. Sada je $(x - x_0|e_k) = (x|e_k) - (x|e_k) = 0$, $\forall k \in \mathbb{N}$, pa zbog maksimalnosti od E slijedi $x - x_0 = 0$. $\square$

1.11.7. Teorem. (*a*) *Neka je X beskonačno dimenzionalan separabilan unitaran prostor. Postoji izometrički izomorfizam sa X na gusti potprostor od ℓ_2.*

(*b*) *Neka je X beskonačno dimenzionalan separabilan Hilbertov prostor. Postoji izometrički izomorfizam sa X na ℓ_2.*

Dokaz: (a) Neka je $(e_n)_n$ ortonormirana baza od X. Definiramo preslikavanje $\varphi : X \to \ell_2$ sa $\varphi(x) = ((x|e_n))_n$, $\forall x \in X$.

Vrijedi $\|\varphi(x)\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |(x|e_k)|^2 = \|x\|^2$, $\forall x \in X$, tj. φ je izometrija.

Zbog $\varphi(e_j) = ((\delta_{j,n})_n)$ ($\delta_{j,n}$ je Kroneckerov simbol) φ preslikava bazu od X na kanonsku bazu od ℓ_2, pa je slika od φ gusta u ℓ_2.

(b) Ako je X Hilbertov prostor, onda je $\varphi(X)$ zatvoren u ℓ_2, pa iz (a) slijedi $\varphi(X) = \ell_2$. □

1.11.8. Primjer. U nepotpunom unitarnom prostoru maksimalan ortonormiran skup ne mora biti ortonormirana baza. Npr. neka je X potprostor od ℓ_2 svih linearnih kombinacija vektora e_k, $k \geq 2$, kanonske baze i vektora $e = (\frac{1}{n})_{n\in\mathbb{N}}$ (ne zatvarač toga skupa). Tada je $E = \{e_k; k \geq 2\}$ maksimalan ortonormiran skup u X.

Doista, ako je $x \in X$, onda je $x = \alpha e + \sum_{k=2}^{n} \alpha_k e_k$ za neko $n \in \mathbb{N}$ i neke α i α_k, $k \geq 2$. Uvjet ortogonalnosti $(x|e_k) = 0$, $k \geq 2$, tada daje

$$\begin{aligned} 0 &= (x|e_k) = \frac{\alpha}{k} + \alpha_k\ ; \quad (2 \leq k \leq n), \\ 0 &= (x|e_k) = \frac{\alpha}{k}\ ; \qquad\quad (k > n). \end{aligned}$$

Iz druge jednakost slijedi $\alpha = 0$, a iz prve $\alpha_k = 0$ za $2 \leq k \leq n$. Dakle $x = 0$, tj. E je maksimalan ortonormiran skup u X.

No, E nije ortonormirana baza od X jer $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty}(e|e_k) = (0, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots) \neq e$.

1.11.2 Rieszov teorem o projekciji

Slijedeći teorem je poopćenje ranije dokazanog teorema o najboljoj aproksimaciji.

1.11.9. Teorem. *Neka je X Hilbertov prostor i K neprazan zatvoren konveksan skup u X. Za svaki $x \in X$ postoji jedinstven vektor $y_0 \in K$ tako da vrijedi*

$$\|x - y_0\| = \inf\{\|x - y\|;\ y \in K\}. \tag{1.32}$$

Dokaz: U slučaju $x \in K$ možemo uzeti $y_0 = x$. Ako je $x \notin K$, označimo

$$d = d(x, K) = \inf\{\|x - y\|;\ y \in K\}. \tag{1.33}$$

Iz (1.33) slijedi da za svaki $n \in \mathbb{N}$ postoji vektor $y_n \in K$ takav da je

$$\|x - y_n\| \leq d_n,\ d_n = d + \frac{1}{n}. \tag{1.34}$$

Pokažimo da je $(y_n)_n$ Cauchyjev niz. U tu svrhu primjenom relaciju paralelograma na vektore $x - y_m$ i $x - y_n$ dobijemo

$$\|(x - y_m) + (x - y_n)\|^2 + \|(x - y_m) - (x - y_n)\|^2 = 2\|x - y_m\|^2 + 2\|x - y_n\|^2,$$

odnosno

$$\|x - \frac{y_m + y_n}{2}\|^2 + \frac{1}{4}\|y_n - y_m\|^2 = \frac{1}{2}\|x - y_m\|^2 + \frac{1}{2}\|x - y_n\|^2.$$

Zbog $y_n, y_m \in K$ povlači $\frac{1}{2}(y_n + y_m) \in K$, pa je $d \leq \|x - \frac{1}{2}(y_n + y_m)\|$. To daje

$$d^2 + \frac{1}{4}\|y_n - y_m\|^2 \leq \frac{1}{2}(d_n^2 + d_m^2),$$

pa imamo

$$\|y_n - y_m\|^2 \leq 2(2\frac{d}{n} + \frac{1}{n^2}) + 2(2\frac{d}{m} + \frac{1}{m^2}). \tag{1.35}$$

Iz (1.35) slijedi da je $(y_n)_n$ Cauchyjev niz u X. Tada postoji jedinstven $y_0 \in X$ takav da je $y_0 = \lim y_n$. Zbog zatvorenosti skupa K je $y_0 \in K$. Za $n \to \infty$ u (1.34) dobijemo $\|x - y_0\| \leq d$, što s $y_0 \in K$ daje $\|x - y_0\| = d$.

Za dokaz jedinstvenosti vektora $y_0 \in K$ za kojeg vrijedi $\|x - y_0\| = d$ pretpostavimo da postoji i $v_0 \in K$ takav da vrijedi $\|x - v_0\| = d$. Tada vrijedi

$$\|(x - y_0) + (x - v_0)\|^2 + \|(x - y_0) - (x - v_0)\|^2 = 2\|x - y_0\|^2 + 2\|x - v_0\|^2 = 4d^2,$$

odakle imamo

$$4d^2 + \|y_0 - v_0\|^2 \leq 4\|x - \frac{y_0 + v_0}{2}\|^2 + \|y_0 - v_0\|^2 = 4d^2,$$

što povlači $\|y_0 - v_0\| = 0$. $\square$

Slijedeći rezultat daje karakterizaciju najbolje aproksimacije vektora $x \in X$ pomoću vektora iz K.

1.11.10. Lema. *Neka su X i K kao u teoremu 1.11.9. Vektor $y_0 \in K$ je najbolja aproksimacija od x u K ako i samo ako vrijedi*

$$\operatorname{Re}(x - y_0|y_0 - y) \geq 0, \ \forall y \in K. \tag{1.36}$$

Dokaz: Za $y \in K$, $y \neq y_0$ i $t \in \mathbb{R}$ označimo:

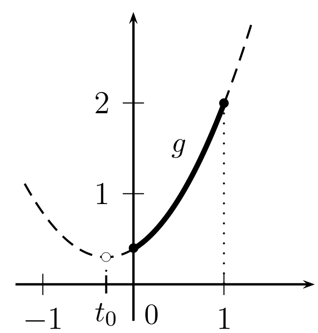
$$f(t) = \|x - [(1-t)y_0 + ty]\|^2 = \|(x - y_0) - t(y - y_0)\|^2 =$$

$$= t^2\|y - y_0\|^2 - 2t\operatorname{Re}(x - y_0|y - y_0) + \|x - y_0\|^2.$$

Funkcija f ima minimum u

$$t_0 = \frac{\operatorname{Re}(x - y_0|y - y_0)}{\|y - y_0\|^2}. \tag{1.37}$$

Neka je g restrikcija funkcije f na segment $[0, 1]$. Ako je y_0 najbolja aproksimacija od x na K, onda funkcija g ima minimum jednak $\|x - y_0\|^2$ koji se postiže u točki $t = 0$. To je moguće samo tako da je $t_0 \leq 0$, što povlači (1.36).
Ako vrijedi (1.36), onda funkcija g ima minimum u $t = 0$, pa je $g(0) \leq g(1)$, tj. $\|x - y_0\|^2 \leq \|x - y\|^2$. $\square$



Operator $P : X \to K$ koji vektoru $x \in X$ pridružuje njegovu najbolju aproksimaciju u K nazivamo **projekcija** sa X na K.

1.11.11. Propozicija. *Neka je $K \neq \emptyset$ zatvoren konveksan skup u Hilbertovom prostoru X i neka je $P : X \to K$ projekcija sa X na K. Tada je P neprekidan operator na X i vrijedi*

$$\|P(x) - P(y)\| \leq \|x - y\|, \ \forall x, y \in X.$$

Dokaz: Vrijedi $x - y = (P(x) - P(y)) + (x - P(x)) + (P(y) - y)$ i odatle dobijemo

$$\|x - y\|^2 = \|P(x) - P(y)\|^2 + \|(x - P(x)) + (P(y) - y)\|^2 +$$

$$+2\operatorname{Re}(x - P(x) + P(y) - y|P(x) - P(y)) \geq$$

$$\geq \|P(x) - P(y)\|^2 + 2\operatorname{Re}(x - P(x)|P(x) - P(y)) + 2\operatorname{Re}(y - P(y)|P(y) - P(x)) \geq$$

(zbog leme (1.11.10.))$\geq \|P(x) - P(y)\|^2$. $\square$

1.11.12. Teorem (Rieszov teorem o projekciji)**.** *Neka je X Hilbertov prostor i Y zatvoren potprostor od X.*

Svaki vektor $x \in X$ ima jedinstven prikaz oblika

$$x = y + z, \ (y \in Y, \, z \perp Y). \tag{1.38}$$

Vektor y u prikazu (1.38) *nazivamo* **ortogonalna projekcija vektora** *x na potprostor Y. Operator $P : X \to X$, $P(x) = y$, $\forall x \in X$, je linearan, $P^2 = P$ i $\|P\| = 1$ ako je $Y \neq \{0\}$. Operator P nazivamo* **ortogonalni projektor** *prostora X na Y.*

Dokaz: Za $x \in X$ prema teoremu 1.11.9.. postoji jedinstven vektor $y \in Y$ tako da je $\|x - y\| = d(x, Y)$. Dokažimo da je vektor $z = x - y$ okomit na Y. Za $\lambda \in \mathbb{K}$ i $u \in Y$ imamo $y + \lambda u \in Y$, pa je

$$\|z\| = \|x - y\| \leq \|x - (y + \lambda u)\| = \|z - \lambda u\|,$$

pa odatle imamo

$$\|z\| \leq \|z - \lambda u\|, \ \forall \lambda \in \mathbb{K}. \tag{1.39}$$

Uvrštavanjem $\lambda = -\frac{(z|u)}{\|u\|^2}$ u (1.39) dobijemo $|(z|u)|^2 \leq 0$, pa je $(z|u) = 0$, $\forall u \in Y$, tj. $z \perp Y$. Time je dokazana egzistencija rastava (1.38).

Za dokaz jedinstvenosti pretpostavimo da vrijedi $y + z = y_1 + z_1$, za $y, y_1 \in Z$ i $z, z_1 \perp Y$. Tada je $y - y_1 = z_1 - z \perp Y$ i $y_1 - y \in Y$, dakle, $y - y_1 = z_1 - z = 0$ tj. $y = y_1$ i $z = z_1$.

Ako je $x_1 = y_1 + z_1$ i $x_2 = y_2 + z_2$ za neke $y_1, y_2 \in Y$, $z_1, z_2 \perp Y$, onda $\forall \lambda \in \mathbb{K}$ imamo $\lambda x_1 + x_2 = (\lambda y_1 + y_2) + (\lambda z_1 + z_2)$. Odatle, iz $\lambda y_1 + y_2 \in Y$ i $\lambda z_1 + z_2 \perp Y$ i jedinstvenosti prikaza u (1.38) zaključujemo da je $\lambda y_1 + y_2$ ortogonalna projekcija vektora $\lambda x_1 + x_2$ na Y, odnosno, $P(\lambda x_1 + x_2) = \lambda P(x_1) + P(x_2)$, tj. P je linearan operator. Nadalje, $\|Px\|^2 = \|y\|^2 \leq \|y\|^2 + \|z\|^2 = \|x\|^2$, pa je $\|P\| \leq 1$. Ako je $x \in Y$, $x \neq 0$, onda je $Px = x$, pa je $\|Px\| = \|x\|$ što povlači $\|P\| = 1$. $\square$

Za neprazan skup S iz unitarnog prostora X sa $S^\perp$ označavamo skup svih vektora iz X koji su okomiti na S, tj. $S^\perp = \{x \in X;\ x \perp S\}$. Očito je $S^\perp$ potprostor od X. Da bi dokazali zatvorenost skupa $S^\perp$, uzmimo niz $(x_n)_n$ u $S^\perp$ koji konvergira k $x_0 \in X$. Zbog neprekidnosti skalarnog produkta za svako $y \in S$ vrijedi $(x_0|y) = (\lim_n x_n|y) = \lim_n (x_n|y) = 0$, tj. $x_0 \in S^\perp$.

Specijalno, svaki zatvoren potprostor Y od X ima direktni komplement i vrijedi $X = Y \oplus Y^\perp$.

1.11.3 Neprekidni linearni funkcionali na Hilbertovom prostoru

Normirani, pa i Banachov prostor X općenito nije izomorfan sa svojim dualom X' ili drugim i višim dualima X'', X''', itd. Slučaj Hilbertovog prostora X rješava slijedeći teorem.

1.11.13. Teorem. *Neka je X Hilbertov prostor i X' njegov dual.*
Za svaki $f \in X'$ postoji jedinstven vektor $v \in X$ takav da je

$$f(x) = (x|v), \ \forall x \in X. \tag{1.40}$$

Funkcija $\varphi : X' \to X$ koja funkcionalu $f \in X'$ pridružuje vektor $v \in X$ za koji vrijedi (1.40) *ima svojstva:*

1. $\|\varphi(f)\| = \|f\|$ *(izometričnost),*
2. $\varphi(X') = X$ *(surjektivnost),*
3. $\varphi(\alpha f + \beta g) = \overline{\alpha}\varphi(f) + \overline{\beta}\varphi(g)$*, tj. φ je antilinearan izometrički izomorfizam prostora X' i X.*

Dokaz: Neka je $f \in X'$ i $Y = \ker(f) = \{x \in X;\ f(x) = 0\}$ njegova jezgra. Potprostor Y je zatvoren zbog neprekidnosti funkcionala f. Ako je $Y = X$, onda je $f = 0$, pa (1.40) vrijedi za $v = 0$.

Ako je $Y \neq X$, onda prema teoremu 1.11.12.. postoji vektor $u \in X$, $\|u\| = 1$, takav da je $u \perp Y$. Neka je $v = \overline{f(u)}u$. Za $x \in X$ stavimo $x_1 = x - \frac{f(x)}{f(u)}u$. Vrijedi

$$f(x_1) = 0 \Rightarrow x_1 \in Y \Rightarrow (x_1|u) = 0 \Rightarrow (x|u) - \frac{f(x)}{f(u)}(u|u) = 0 \Rightarrow f(x) = (x|v).$$

Jedinstvenost vektora v u (1.40) je očita.

Pomoću (1.40) i Cauchyjeve nejednakosti imamo:

$$\|f\| = \sup\{|f(x)|;\ \|x\| \le 1\} = \sup\{|(x|v)|;\ \|x\| \le 1\} \le$$

$$\le \sup\{\|x\|\|v\|;\ \|x\| \le 1\} \le \|v\|.$$

Za $v \neq 0$ imamo $f(\frac{v}{\|v\|}) = (\frac{v}{\|v\|}|v) = \|v\|$ što povlači $\|f\| = \|v\|$, tj. preslikavanje $f \mapsto \varphi(f) = v$ je izometrično.

Neka je $\varphi(f) = v$ i $\varphi(g) = u$. Za svako $x \in X$ vrijedi

$$(\alpha f + \beta g)(x) = \alpha f(x) + \beta g(x) \Rightarrow$$

$$(x|\varphi(\alpha f+\beta g)) = \alpha(x|\varphi(f)) + \beta(x|\varphi(g)) = (x|\overline{\alpha}\varphi(f) + \overline{\beta}\varphi(g)),$$

što povlači antilinearnost preslikavanja φ. $\square$

Prethodni teorem o reprezentaciji funkcionala, a također i teorem o otogonalnoj projekciji, ne vrijede u unitarnim prostorima koji nisu potpuni.

1.11.14. Propozicija. *Neka je X unitaran prostor.*

(a) X je potpun ako i samo ako u njemu vrijedi Rieszov teorem o funkcionalima, tj. $\forall f \in X'$ $\exists y \in X$ tako da je $f(x) = (x|y)$, $\forall x \in X$.

(b) X je potpun ako i samo ako u njemu vrijedi Rieszov teorem o projekciji, tj. za svaki zatvoren potprostor $Y \leq X$ je $X = Y \oplus Y^\perp$.

Dokaz: (a) Ako u X vrijedi Rieszov teorem o funkcionalima, onda je $\varphi : X' \to X$, $[\varphi(y)](x) = (x|y)$, izometrički antiizomorfizam, pa je X potpun jer je X' potpun.

(b) Pretpostavimo da u X vrijedi Rieszov teorem o projekciji. Neka je $f \in X'$, $f \neq 0$. Tada je $Y = N(f)$ zatvoren pravi potprostor od X, pa je $Y^\perp \neq \{0\}$, odnosno, $\dim Y^\perp = 1$. Kao u dokazu teorema 1.11.12. za jedinični $u \in Y^\perp$ i za $y = \overline{f(u)}u$ slijedi $f(x) = (x|y)$, $\forall x \in X$. Dakle, u X vrijedi Rieszov teorem o funkcionalima, pa je prema (a) X potpun. $\square$

1.11.15. Napomena. U (b) je dovoljno pretpostaviti da za svaki zatvoren potprostor $Y \leq X$ kodimenzije 1 vrijedi $X = Y \oplus Y^\perp$.

1.11.16. Korolar. *Separabilan unitaran prostor X je potpun ako i samo ako je svaki maksimalan ortonormiran niz u X ujedno ortonormirana baza od X.*

Dokaz: Prema teoremu 1.11.6. svaki maksimalan ortonormiran niz u Hilbertovom prostoru X je ortonormirana baza od X.

Obratno, pretpostavimo da je svaki maksimalan ortonormiran niz u unitarnom prostoru X ujedno ortonormirana baza od X. Neka je $f \in X'$, $f \neq 0$. Tada je $Y = \ker(f) = N(f) \neq X$ zatvoren potprostor kodimenzije 1 i Y je separabilan. Neka je $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ortonormirana baza u Y. Tvrdimo da $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nije maksimalan ortonormiran niz u X. U suprotnom bi to bila ortonormirana baza od X, pa bi svaki $x \in X$ imao prikaz $x = \sum_{k=1}^{\infty}(x|e_k)e_k$, a to bi povlačilo $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty}(x|e_k)f(e_k) = 0$, dakle, $f = 0$, što je suprotno pretpostavci. Stoga postoji $u \in X$, $\|u\| = 1$, $(u|e_k) = 0$, $\forall k \in \mathbb{N}$. Odatle je $(u|y) = 0$, $\forall y \in Y$ zato što je $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ baza od Y. Zbog $u \notin Y$ vrijedi $f(u) \neq 0$. Sada, kao u dokazu teorema 1.11.13.., za bilo koji $x \in X$ stavimo $x_1 = x - \frac{f(x)}{f(u)}u$, pa vrijedi $f(x_1) = 0$, a odatle zaključujemo $x_1 \in Y$. Stoga, za $y = \overline{f(u)}u$ vrijedi $f(x) = (x|y)$. Dakle, u X vrijedi Rieszov teorem o reprezentaciji funkcionala. Prema propoziciji 1.11.14.. (b) X je potpun. $\square$

1.11.4 Slaba konvergencija niza vektora u Hilbertovom prostoru

Jedna od mnogih posljedica Hahn-Banachovog teorema je da dualni prostor normiranog prostora ima puno elemenata. Posebno, za svaki od nule različit vektor $x_0 \in X$, $x_0 \neq 0$, postoji netrivijalan funkcional $f \in X'$ takav da je $f(x_0) \neq 0$. To nam omogućuje da na normiranom prostoru zadamo različite vrste topologija.

1.11.17. Definicija. Za niz $(x_n)_n$ vektora iz normiranog prostora X kažemo da **slabo konvergira** k vektoru $x_0 \in X$ ako za svaki funkcional $f \in X'$ niz $(f(x_n))_n$ skalara konvergira k skalaru $f(x_0)$ tj.

$$\lim_n f(x_n) = f(x_0),\ \forall f \in X'.$$

To pišemo u obliku $x_n \stackrel{w}{\to} x_0$ ili $w - \lim x_n = x_0$.

Specijalno, u svjetlu teorema 1.11.13., u Hilbertovom prostoru to znači

$$\lim_n (x_n|y) = (x_0|y),\ \forall y \in X.$$

Da bi lakše razlikovali slabi limes od limesa u normi, često ćemo za potonji koristiti naziv **jaki limes**.

Slabi limes niza vektora u normiranom prostoru je jedinstven. Naime, ako niz $(x_n)_n$ konvergira k vektoru x_0 i vektoru y_0 u X, onda za svaki funkcional $f \in X'$ vrijedi $f(x_0) = \lim f(x_n) = f(y_0)$, tj. $f(x_0 - y_0) = 0$. No, tada je $x_0 - y_0 = 0$.

Također je očito da je slabi limes u skladu sa operacijama u normiranom prostoru, tj. u slučaju kada $w - \lim x_n = x_0$ i $w - \lim y_n = y_0$, onda za bilo koje skalare λ i μ vrijedi $w - \lim(\lambda x_n + \mu y_n) = \lambda x_0 + \mu y_0$. S obzirom na svojstva jakog limesa, može se postaviti pitanje ograničenosti slabo konvergentnog niza u normiranom prostoru. Odgovor je potvrdan, ali je dokaz te činjenice zasnovan na netrivijalnom teoremu iz funkcionalne analize, tzv. principu uniformne ograničenosti, koji dokazujemo kasnije. U slučaju Hilbertovih prostora postoji elementaran dokaz.

1.11.18. Propozicija. *Slabo konvergentan niz u Hilbertovom prostoru je ograničen.*

Dokaz: Neka vrijedi $w - \lim x_n = x_0$, tj. za svaki $y \in X$ je $\lim_n (x_n|y) = (x_0|y)$. Tada, za svaki $y \in X$ je skup skalara $\{(x_n|y);\, n \in \mathbb{N}\}$ ograničen, tj. uz oznaku $S = \{x_n \in X;\, n \in \mathbb{N}\} \subset X$

$$\forall y \in X,\ \exists \alpha(y) > 0,\ \alpha(y) = \sup\{|(x|y)|;\ x \in S\}. \qquad (1.41)$$

Želimo dokazati da je skup S ograničen po normi. Za to je dovoljno pokazati da (1.41) povlači nešto jaču tvrdnju

$$\exists M > 0, \forall y \in X, \forall x \in S, \ |(x|y)| \leq M\|y\|. \tag{1.42}$$

Naime, iz (1.42) za $x \in S$ i $y = x$ dobijemo $\|x\| \leq M$.

Pokažimo da u slučaju $\dim X < \infty$ vrijedi (1.41) $\Rightarrow$ (1.42). Zaista, neka je $\{e_1, \ldots, e_n\}$ ortonormirana baza za X. Za $x \in S$ i $y \in X$ po volji imamo

$$|(x|y)| \leq |\sum_{i=1}^{n}(x|e_i)(e_i|y)| \leq \left(\sum_{i=1}^{n}|(x|e_i)|^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=1}^{n}|(e_i|y)|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq$$

$$\leq \|y\|\sqrt{n}\max\{\alpha(e_1), \alpha(e_2), \ldots, \alpha(e_n)\},$$

tj. vrijedi (1.42) za $M = \sqrt{n}\max\{\alpha(e_i), i = 1, \ldots, n\}$.

U slučaju $\dim X = \infty$ dokaz provodimo tako da pretpostavimo da implikacija (1.41) $\Rightarrow$ (1.42) nije istinita, odnosno da na X vrijedi (1.41) i ne vrijedi (1.42), tj.

$$\forall M > 0, \ \exists y \in X, \exists x \in S, \ |(x|y)| > M\|y\|. \tag{1.43}$$

Specijalno, za $M = 1$, $\exists y_1 \in X$, $\exists x_1 \in S$, $|(x_1|y_1)| > \|y_1\|$, odnosno, uz oznaku $e_1 = \frac{y_1}{\|y_1\|}$, imamo $\exists e_1 \in X$, $\|e_1\| = 1$, $\exists x_1 \in S$, $|(x_1|e_1)| > 1$.

Sada pogledajmo potprostor $Y_1 = [\{x_1, e_1\}]$, $\dim Y_1 \leq 2$, i njegov ortogonalni komplement $Z_1 = Y_1^{\perp}$, $\dim Z_1 = \infty$. Uvjet (1.42) vrijedi na Y_1 zbog $\dim Y_1 < \infty$. Kada bi (1.42) vrijedilo na Z_1, onda bi (1.42) vrijedilo na čitavom X, a to nije moguće po pretpostavci. Dakle, na Z_1 vrijedi (1.43), pa kao u prethodnom slučaju, za $M = 2(\alpha(e_1) + 2)$ zaključujemo

$$\exists x_2 \in S, \ \exists e_2 \in X, \ \|e_2\| = 1, \ e_2 \perp x_1, e_1, \ |(x_2|e_2)| > 2(\alpha(e_1) + 2).$$

Induktivno zaključujemo da postoje nizovi $(x_n)_n$ u S i $(e_n)_n$ u X takvi da $\forall n \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$\|e_n\| = 1, \ e_{n+1} \perp \{x_1, \ldots, x_n, e_1, \ldots, e_n\},$$

$$|(x_{n+1}|e_{n+1})| > (n+1)\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j}\alpha(e_j) + n + 1\right).$$

Definiramo $e = \sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{i}e_i$ i vrijedi $e \in X$ jer zbog ortogonalnosti niza $(e_n)_n$ imamo $\|e\|^2 = \sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{i^2} < \infty$. Nadalje vrijedi

$$|(x_{n+1}|e)| = |(x_{n+1}|\sum_{i=1}^{n+1}\frac{1}{i}e_i)| = |\sum_{i=1}^{n}(x_{n+1}|\frac{1}{i}e_i) + (x_{n+1}|\frac{1}{n+1}e_{n+1})| \geq$$

$$-\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i}\alpha(e_i)+\frac{1}{n+1}(n+1)\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i}\alpha(e_i)+n+1\right)=n+1,$$

što je kontradikcija s pretpostavkom da vrijedi (1.41). Dakle, (1.41) $\Rightarrow$ (1.42).

$\square$

1.11.19. Napomena. Očigledno, ako niz jako konvergira, onda i slabo konvergira. S druge strane, niz može konvergirati slabo, a da ne konvergira jako. Primjer je niz ortonormiranih vektora $(e_n)_n$ koji slabo konvergira k nulvektoru jer vrijedi $\lim_n (e_n|x) = 0$, $\forall x \in X$, što slijedi iz Besselove nejednakosti. Zbog $\|e_n - e_m\| = \sqrt{2}$, $\forall n, m \in \mathbb{N}$, taj niz nema niti jedan jako konvergentan podniz.

Poglavlje 2

Operatori na normiranim prostorima

U točki 1.6 iz prvog dijela obradili smo neka osnovna svojstva ograničenih linearnih operatora na normiranim prostorima. Sada nastavljamo s detaljnijom obradom te tematike. Počinjemo sa pojmovima vezanim za operatore na unitarnim prostorima.

2.1 Ograničeni operatori na unitarnim prostorima

2.1.1 Adjungirani operator ograničenog operatora

2.1.1. Propozicija. *Neka su X, Y unitarni prostori i $A \in B(X, Y)$. Tada vrijedi*

$$\|A\| = \sup\{|(Ax|y)|\,;\, x \in X,\, y \in Y, \|x\| \le 1,\, \|y\| \le 1\}. \tag{2.1}$$

Dokaz: Označimo s M desnu stranu jednakosti (2.1). Za $\|x\| \le 1$ i $\|y\| \le 1$ pomoći C-S-B nejednakosti imamo

$$|(Ax|y)| \le \|Ax\|\|y\| \le \|A\|\|x\|\|y\| \le \|A\|,$$

što daje $M \le \|A\|$.

Ako je $x \in X$ takav da vrijedi $Ax \neq 0$, onda za jedinični vektor $y_0 = \frac{Ax}{\|Ax\|} \in Y$ vrijedi $|(Ax|y_0)| = \|Ax\|$. Stoga je za svaki takav x

$$\|Ax\| \le \sup\{|(Ax|y)|\,;\, y \in Y,\, \|y\| \le 1\}.$$

Odatle imamo $\|A\| = \sup\{\|Ax\|\,;\, x \in X,\, \|x\| \le 1\} \le M$. $\square$

2.1.2. Teorem. *Neka su X, Y Hilbertovi prostori i $A \in B(X, Y)$. Tada postoji jedinstven operator $A^* \in B(Y, X)$ takav da vrijedi*

$$(Ax|y) = (x|A^*y)\,;\; x \in X,\; y \in Y.$$

Vrijedi $(\alpha A + \beta B)^* = \overline{\alpha} A^* + \overline{\beta} B^*$, $(AB)^* = B^*A^*$, $A^{**} = A$ i $\|A^*\| = \|A\|$.

Dokaz: Za bilo koji čvrsti $y \in Y$ preslikavanje $x \mapsto (Ax|y)$ je iz X', pa po Rieszovom teoremu o funkcionalima 1.11.13.. postoji jedinstven vektor $A^*(y) \in X$ takav da je $(Ax|y) = (x|A^*(y))$, $\forall x \in X$. Lako se vidi da je $A^* \in L(Y, X)$, a iz propozicije slijedi $\|A^*\| = \|A\|$, tj. $A^* \in B(Y, X)$. Ostale tvrdnje jednostavne slijede. □

Operator A^* nazivamo **adjungiran** operator od operatora A. Za $A \in B(X)$ kažemo da je **normalan** ako je $A^*A = AA^*$. Posebno,

A je **hermitski** ako je $A^* = A$,

A je **antihermitski** ako je $A^* = -A$,

A je **unitaran** ako je $A^* = A^{-1}$.

Lako se vidi da se svaki $A \in B(X)$ može na jedinstven način prikazati kao suma hermitskog i antihermitskog operatora, tj. $A = A_1 + A_2$, gdje su $A_1 = \frac{1}{2}(A + A^*)$, $A_2 = \frac{1}{2}(A - A^*)$. Također, ako je X kompleksan normiran prostor, onda je A hermitski operator ako i samo ako je iA antihermitski.

2.1.3. Propozicija. *Neka su X, Y Hilbertovi prostori i $A \in B(X, Y)$. Tada je $N(A) = R(A^*)^\perp$, $N(A^*) = R(A)^\perp$, $\overline{R(A)} = N(A^*)^\perp$, $\overline{R(A^*)} = N(A)^\perp$.*

Dokaz: Dokazujemo prvu jednakost.

$$x \in N(A) \Leftrightarrow Ax = 0 \Leftrightarrow (Ax|y) = 0, \forall y \in Y \Leftrightarrow$$

$$(x|A^*y) = 0, \forall y \in Y \Leftrightarrow (x|u) = 0, \forall u \in R(A^*).$$

Ostale jednakosti slijede iz prve jer za potprostor $V \leq X$ vrijedi $(V^\perp)^\perp = \overline{V}$. □

2.1.4. Propozicija. *$P \in B(X)$ je ortogonalni projektor na neki zatvoreni potprostor ako i samo ako je $P^2 = P = P^*$. Tada je $R(P) = N(I - P) = \{x \in X; Px = x\}$.*

Dokaz: Ako je P ortogonalni projektor na neki zatvoreni potprostor Y, onda za $x_1, x_2 \in X$ imamo po Rieszovom teoremu o projekciji:

$$x_1 = y_1 + z_1, x_2 = y_2 + z_2, (y_1, y_2 \in Y, z_1, z_2 \perp Y) \Rightarrow$$

$$(Px_1|x_2) = (y_1|y_2 + z_2) = (y_1|y_2) = (y_1 + z_1|y_2) = (x_1|Px_2).$$

Dakle, $P^* = P$. Očito je $P^2 = P$ i $R(P) = N(I - P)$.

Pretpostavimo da je $P \in B(X)$ i $P^* = P = P^2$. Stavimo $Y = N(I-P) = \{x \in X; Px = x\}$. Imamo

$$y \in R(P) \Rightarrow \exists x \in X, y = Px \Rightarrow Py = P^2x = Px = y \Rightarrow y \in Y,$$

i obratno $y \in Y \Rightarrow y = Py \Rightarrow y \in R(P)$. Dakle, $R(P) = Y$. Y je zatvoren potprostor zbog $Y = N(I - P)$.

Prema propoziciji 2.1.3. je $N(P) = R(P)^\perp$. Dakle, za $x \in X$ je $x = y + z$, $y \in R(P) = Y$, $z \in N(P) = Y^\perp$, pa je $Py = y$, $Pz = 0$, odakle slijedi $Px = y$. Dakle, P je ortogonalan projektor na Y. □

2.1.5. Napomena. P je ortogonalan projektor na Y ako i samo ako $I - P$ ortogonalni projektor na $Y^\perp$.

2.1.6. Propozicija. *Neka su P_1, P_2 ortogonalni projektori na Y_1, Y_2.*

(a) *$P = P_1P_2$ je ortogonalni projektor ako i samo ako je $P_1P_2 = P_2P_1$. Tada je P ortogonalni projektor na $Y_1 \cap Y_2$.*

(b) *$P = P_1 + P_2$ je ortogonalni projektor ako i samo ako je $P_1P_2 = 0$, a to je ako i samo ako je $Y_1 \perp Y_2$. Tada je P ortogonalni projektor na $Y_1 \oplus Y_2$.*

Dokaz: (a) Ako je P ortogonalni projektor onda vrijedi $P_1P_2 = (P_1P_2)^* = P_2^*P_1^* = P_2P_1$.

Obratno, ako je $P_1P_2 = P_2P_1$ onda je $P^* = (P_1P_2)^* = P_2^*P_1^* = P_2P_1 = P_1P_2 = P$ i $P^2 = (P_1P_2)^2 = P_1P_2P_1P_2 = P_1^2P_2^2 = P_1P_2 = P$.

Nadalje, $y \in Y_1 \cap Y_2 \Rightarrow P_1y = y = P_2y \Rightarrow Py = y \Rightarrow y \in R(P)$ i $y \in R(P) \Rightarrow y = Py = P_1(P_2y), y = Py = P_2(P_1y) \Rightarrow y \in R(P_1) \cap R(P_2) = Y_1 \cap Y_2$, tj. $R(P) = Y_1 \cap Y_2$.

(b) Ako je $Y_1 \perp Y_2$ onda je $R(P_2) = Y_2 \subseteq Y_1^\perp = R(P_1)^\perp = N(P_1)$, pa je $P_1P_2 = 0$.

Obratno, $P_1P_2 = 0$ daje $P_2P_1 = (P_1P_2)^* = 0$. Odatle je $P^* = P$ i $P^2 = P_1^2 + P_1P_2 + P_2P_1 + P_2^2 = P_1 + P_2 = P$, te je P ortogonalni projektor.

Neka je P ortogonalni projektor, tj. $P^* = P = P^2$. Imamo $P_1 + P_2 = P_1^2 + P_1P_2 + P_2P_1 + P_2^2 = P_1 + P_2 + P_1P_2 + P_2P_1$, a odatle $P_1P_2 + P_2P_1 = 0$. Množeći posljednju jednakost s P_1 slijeva i zdesna, dobijemo $P_1P_2 + P_1P_2P_1 = 0$ i $P_1P_2P_1 + P_2P_1 = 0$, što daje $P_1P_2 = P_2P_1$, a onda je $2P_1P_2 = 0$, tj. $P_1P_2 = 0$.

Obratno ,neka je $P_1P_2 = 0$, pa imamo $Y_2 = R(P_2) \subseteq N(P_1) = R(P_1)^{\perp} = Y_1^{\perp}$, tj. $Y_1 \perp Y_2$.

Konačno, $y \in Y_1 + Y_2$ daje $y = y_1 + y_2$, $y_1 \in Y_1$, $y_2 \in Y_2$, pa je $Py = P_1y_1 + P_1y_2 + P_2y_1 + P_2y_2 = y_1 + y_2 = y$, odnosno $Y_1 + Y_2 \subseteq R(P)$. Također, $y \in R(P)$ povlači $y = Py = P_1y + P_2y \in R(P_1) + R(P_2) = Y_1 + Y_2$. Dakle $R(P) = Y_1 \oplus Y_2$. $\square$

2.1.2 Pozitivni operatori

2.1.7. Definicija. $A \in B(X)$ je **pozitivan operator** ako je $A = A^*$ i $(Ax|x) \geq 0$, $\forall x \in X$. Tada pišemo $(A \geq 0)$.

Za pozitivni operator A vrijedi nejednakost Cauchy-Schwarz-Buniakowsky

$$|(Ax|y)|^2 \leq (Ax|x)(Ay|y), \forall x, y \in X. \tag{2.2}$$

Za svaki $A \in B(X, Y)$ vrijedi $A^*A \geq 0$ i $AA^* \geq 0$. Posebno, za hermitski $A \in B(X)$ je $A^2 \geq 0$.

Na skupu hermitskih operatora imamo parcijalni uređaj $(A \leq B) \Leftrightarrow B - A \geq 0$.

2.1.8. Propozicija. *Neka je $(A_n)_n$ monoton niz hermitskih operatora u $B(X)$ takav da vrijedi*

$$M = \sup\{\|A_n\|; n \in \mathbb{N}\} < \infty. \tag{2.3}$$

Tada postoji jedinstven $A \in B(X)$ takav da je $Ax = \lim_n A_nx$, $\forall x \in X$. Operator A je hermitski i $A_n \leq A$, $\forall n \in \mathbb{N}$, ako je niz rastući i $A_n \geq A$, $\forall n \in \mathbb{N}$, za padajući niz.

Dokaz: Pretpostavimo da je niz $(A_n)_n$ rastući, tj. $(n \leq m) \Rightarrow (A_nx|x) \leq (A_mx|x)$, $\forall x \in X$. Dakle, za svako $x \in X$ niz realnih brojeva $((A_nx|x)_n)$ je rastući. Zbog (2.3) je taj niz ograničen s $M\|x\|^2$, pa je konvergentan u $\mathbb{R}$.

Za $m \geq n$ je $A_m - A_n \geq 0$ pa (2.2) povlači

$$|((A_m - A_n)x|y)|^2 \leq ((A_m - A_n)x|x)((A_m - A_n)y|y) \leq 2M\|y\|^2((A_m - A_n)x|x).$$

Stavimo $y = (A_m - A)x$ u prethodnoj nejednakosti i dobijemo

$$\|A_m x - A_n x\|^4 \leq 2M \|A_m x - A_n x\|^2 ((A_m - A_n)x|x)$$

i odatle

$$\|A_m x - A_n x\|^2 \leq 2M[(A_m x|x) - (A_n x|x)]. \tag{2.4}$$

Iz (2.4) slijedi da je $(A_n x)_n$ Cauchyjev niz u X. Definiramo

$$Ax = \lim_n A_n x, \; \forall x \in X. \tag{2.5}$$

Očito je $A \in L(X)$ i $\|A_n x\| \leq M\|x\|$, $\forall x \in X$, što povlači $\|A\| \leq M$, tj. $A \in B(X)$. Također, $(A_n x|y) = (x|A_n y)$, $\forall x, y \in X$, povlači $A = A^*$. Konačno, za $n \leq m$ je $(A_n x|x) \leq (A_m x|x)$ pa za $m \to \infty$ imamo $(A_n x|x) \leq (Ax|x)$, dakle, $A_n \leq A$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Slično se dokazuje za padajući niz $(A_n)_n$. □

2.1.9. Teorem. *Za svaki $A \in B(X)$, $A \geq 0$, postoji jedinstven $B \in B(X)$, $B \geq 0$, takav da je $B^2 = A$.*

Za svaki $C \in B(X)$, za koji je $CA = AC$ vrijedi $CB = BC$. Postoji niz polinoma $(r_n)_n$ takav da je $Bx = \lim_n r_n(A)x$, $\forall x \in X$.

Dokaz: Možemo uzeti da je $\|A\| \leq 1$ (inače promatramo $\frac{A}{\|A\|}$), te imamo $0 \leq A \leq I$. Stavimo $D = I - A$ pa je $D \geq 0$. Definiramo niz hermitskih operatore slijedećom rekurzijom:

$$A_1 = 0, \quad A_{n+1} = \frac{1}{2}(D + A_n^2), \; \forall n \in \mathbb{N}. \tag{2.6}$$

Očito je $A_n = p_n(D)$, gdje su polinomi s nenegativnim koeficijentima $p_{n+1}(\lambda) = \frac{1}{2}(\lambda + p_n(\lambda)^2)$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Stavimo $q_n = p_{n+1} - p_n$ i imamo $A_{n+1} - A_n = q_n(D)$.

Vrijedi $q_1(D) = A_2 - A_1 = \frac{1}{2}D$, a za $n \geq 2$ je

$$q_n(\lambda) = p_{n+1}(\lambda) - p_n(\lambda) = \frac{1}{2}(\lambda + p_n(\lambda)^2) - \frac{1}{2}(\lambda + p_{n-1}(\lambda)^2) =$$

$$= \frac{1}{2}(p_n(\lambda)^2 - p_{n-1}(\lambda)^2) = \frac{1}{2}(p_n(\lambda) + p_{n-1}(\lambda))(p_n(\lambda) - p_{n-1}(\lambda)) =$$

$$= \frac{1}{2}(p_n(\lambda) + p_{n-1}(\lambda))q_{n-1}(\lambda).$$

Odavde indukcijom slijedi da su koeficijenti od q_n, $n \in \mathbb{N}$, nenegativni.

Iz prethodnog zaključujemo:

$$\begin{aligned} A_n &\geq 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \\ A_{n+1} &\geq A_n, \; \forall n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Iz $0 \le A \le I$ slijedi $0 \le D \le I$, pa je $\|D\| \le 1$. Indukcijom po n dobijemo $\|A_n\| \le 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Naime,

$$\|A_{n+1}\| = \frac{1}{2}\|D + A_n^2\| \le \frac{1}{2}\|D\| + \frac{1}{2}\|A_n\|^2 \le 1.$$

Prema propoziciji 2.1.8. postoji hermitski operator $E \in B(X)$ takav da je $\|E\| \le 1$ i $Ex = \lim_n A_n x$, $\forall x \in X$. Nadalje, $CA = AC \Rightarrow CD = DC \Rightarrow CA_n = A_n C \Rightarrow \forall x \in X, CEx = \lim_n CA_n x = \lim_n A_n Cx = ECx$. Posebno, vrijedi $AE = EA$ i $A_n E = EA_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Nadalje, $\|E^2 x - A_n^2 x\| = \|(E + A_n)(E - A_n)x\| \le \|E + A_n\| \|Ex - A_n x\| \le 2\|Ex - A_n x\| \xrightarrow{n\to\infty} 0$ povlači $E^2 x = \lim_n A_n^2 x$, $\forall x \in X$.

Iz (2.6) imamo $Ex = \lim_n A_{n+1}x = \frac{1}{2}(Dx + \lim_n A_n^2 x) = \frac{1}{2}(Dx + E^2 x)$, $\forall x \in X$. Odatle je $E^2 - 2E = -D \Rightarrow E^2 - 2E = A - I \Rightarrow A = E^2 - 2E + I = (I - E)^2$. Dakle, za $B = I - E \ge 0$ vrijedi $B^2 = A$. Nadalje, $CA = AC \Rightarrow CE = EC \Rightarrow CB = BC$ i postoji niz polinoma $r_n(\lambda) = 1 - p_n(1 - \lambda)$ takav da je $Bx = \lim_n r_n(A)x$, $\forall x \in X$.

Za dokaz jedinstvenosti uzmimo da je $F \ge 0$ i $F^2 = A$. Sada $FA = AF$ povlači $FB = BF$. Neka je $x \in X$ po volji i neka je $y = Fx - Bx$. Tada je

$$(Fy|y) + (By|y) = ((F + B)y|y) = ((F + B)(F - B)x|y) = ((F^2 - B^2)x|y) = 0,$$

što povlači $(Fy|y) = (By|y) = 0$. Neka je $G \ge 0$ takav da vrijedi $G^2 = F$, pa imamo $0 = (G^2 y|y) = \|Gy\|^2$, što daje $Gy = 0$, odnosno $Fy = 0$. Analogno slijedi $By = 0$. Sada je $(y|y) = (y|Fx - Bx) = (y|Fx) - (y|Bx) = (Fy|x) - (By|x) = 0$, pa je $Fx = Bx$, $\forall x \in X$, tj. $F = B$. $\square$

2.1.10. Korolar. *Ako su $A \ge 0$ i $B \ge 0$ i $A^2 = B^2$, onda je $A = B$.*

2.1.11. Korolar. *Ako su $A \ge 0$ i $B \ge 0$ i $AB = BA$, onda je $AB \ge 0$.*

Dokaz: Operator AB je hermitski zbog $(AB)^* = B^* A^* = BA = AB$. Neka je $C \ge 0$, $C^2 = B$, pa je $CA = AC$, a odatle imamo $AB = AC^2 = CAC$, Odatle je $(ABx|x) = (CACx|x) = (ACx|Cx) \ge 0$. $\square$

2.1.12. Korolar. *Neka su A, B, C hermitski operatori koji međusobno komutiraju. Ako je $C \ge 0$ i $A \le B$, onda je $AC \le BC$*

Dokaz: Zbog $B - A \ge 0$ i korolara 2.1.11. imamo $C(B - A) \ge 0$. $\square$

2.1.13. Lema. *Neka su $A, B \in B(X)$ hermitski operatori, $A^2 = B^2$, $AB = BA$ i P ortogonalni projektor na $R(P) = N(A - B)$. Tada vrijedi*

(a) $C \in B(X)$, $C(A-B) = (A-B)C$ *povlači* $CP = PC$,

(b) $N(A) = N(B) \subseteq R(P)$,

(c) $A = (2P - I)B$ *i* $B = (2P - I)A$.

Dokaz: Neka je $Y = R(P) = N(P)^\perp = N(A-B)$.

(a) Za $y \in Y$ imamo $(A-B)Cy = C(A-B)y = 0$, tj. $Cy \in Y$. Dakle, $\forall x \in X$ je $CPx \in Y$, pa je $PCPx = CPx$, tj. $CPC = CP$.

I C^* komutira s $A-B$, jer je $A-B$ hermitski. Dakle, $PC^*P = C^*P$, što daje $PCP = PC$, odnosno $PC = PCP = CP$.

(b) Zbog $\|Ax\|^2 = (Ax|Ax) = (A^2x|x) = (B^2x|x) = \|Bx\|^2$ je $N(A) = N(B)$, pa je to očito sadržano u $N(A-B) = R(P)$.

(c) Zbog $(A-B)(A+B) = A^2 - B^2 = 0$ je $R(A+B) \subseteq N(A-B) = R(P)$, a odatle imamo $P(A+B)x = (A+B)x$, $\forall x \in X$, odnosno, $PA + PB = A + B$.

S druge strane, $\forall y \in Y$ je $(A-B)y = 0$, odnosno, $\forall x \in X$, je $(A-B)Px = 0$, a tada je $\forall x \in X$, je $P(A-B)x = 0$, tj. $PA - PB = 0$. Dakle, imamo

$$\begin{aligned} PA + PB &= A + B, \\ PA - PB &= 0. \end{aligned}$$

Odatle je $2PA = 2PB = A + B$, što daje $(2P-I)A = B$ i $(2P-I)B = A$. $\square$

2.1.14. Teorem. *Neka je* $A \in B(X)$ *hermitski operator i* $B = \sqrt{A^2}$. *Tada su* $A_+ = \frac{1}{2}(B + A)$ *i* $A_- = \frac{1}{2}(B - A)$ *pozitivni operatori i* $A = A_+ - A_-$. *Nadalje,* $N(A) = N(A_+) \cap N(A_-)$. *Za* $C \in B(X)$ *vrijedi* $CA = AC$ *ako i samo ako je* $CA_+ = A_+C$ *i* $CA_- = A_-C$.

Dokaz: Očito je $A = A_+ - A_-$.

Nadalje, $CA_+ = A_+C$ i $CA_- = A_-C$ povlači $CA = AC$. Obratno, ako je $CA = AC$ onda vrijedi $CA^2 = A^2C$, pa po teoremu 2.1.9. slijedi $CB = BC$. Odatle zaključujemo da vrijedi $CA_+ = A_+C$ i $CA_- = A_-C$.

Neka je P projektor na $N(A_-) = N(B-A)$. Prema lemi 2.1.13. (c) je $(2P - I)B = A$, što daje $PB = \frac{1}{2}(A + B) = A_+$ i $(I - P)B = B - PB = B - A_+ = A_- = B - A$. Odatle imamo $P(B - A) = (B - A)P (= 0)$. Prema lemi 2.1.13. (a) P komutira i sa A i sa B. Dakle, P, $I - P$ i B su pozitivni i međusobno komutiraju, pa je prema korolaru 2.1.11. $A_+ = PB \geq 0$ i $A_- = (I - P)B \geq 0$.

Konačno, očito je $N(A_+) \cap N(A_-) \subseteq N(A)$. Prema lemi 2.1.13. (b) je $N(A) = N(B)$, pa je $N(A) \subseteq N(A_+) \cap N(A_-)$. $\square$

2.1.3 Polarni rastav operatora

2.1.15. Definicija. Neka su X, Y Hilbertovi prostori. Operator $V \in B(X,Y)$ je **parcijalna izometrija** ako je $V|_{N(V)^{\perp}}$ izometrija.

2.1.16. Propozicija. *Ako je $V \in B(X,Y)$ parcijalna izometrija, onda je i $V^* \in B(Y,X)$ parcijalna izometrija.*

Dokaz: Ako je $V \in B(X,Y)$ parcijalna izometrija onda postoji potprostor $Z \leq X$, $X = Z \oplus Z^{\perp}$, takav da je $V|_Z$ izometrija i $V|_{Z^{\perp}} = 0$. Tada je $W = R(V) = VX = VZ$ zatvoren potprostor od Y i $V|_Z$ je izometrički izomorfizam sa Z na W. Definiramo $U \in B(Y,X)$ sa $U|_W = (V|_Z)^{-1}$ i $U|_{W^{\perp}} = 0$, te je U parcijalna izometrija.

Nadalje, za $x \in X$ i $y \in Y$, $x = x_1 + x_2$, $y = y_1 + y_2$, $x_1 \in Z$, $x_2 \in Z^{\perp}$, $y_1 \in W$, $y_2 \in W^{\perp}$ imamo:

$$(Vx|y) = (V(x_1 + x_2)|y_1 + y_2) = (Vx_1|y_1 + y_2) = (Vx_1|y_1) = (UVx_1|Uy_1) =$$

$$= (x_1|Uy_1) = (x_1 + x_2|Uy_1) = (x_1 + x_2|U(y_1 + y_2)) = (x|Uy).$$

Dakle, $U = V^*$. □

2.1.17. Teorem. $V \in B(X,Y)$ *je parcijalna izometrija ako i samo ako je $P = V^*V$ (ortogonalni) projektor. Tada je $N(V) = N(P)$ i $R(V) = R(P)$.*

Dokaz: Pretpostavimo da je V parcijalna izometrija i neka su potprostori Z, W i operator U kao u dokazu propozicije 2.1.16. Tada za $x \in X$, $x = x_1 + x_2$, $x_1 \in Z$, $x_2 \in Z^{\perp}$, imamo $V^*Vx = V^*Vx_1 = UVx_1 = x_1$. Dakle, $P = V^*V$ je projektor na $R(P) = Z = R(V^*)$ duž $N(P) = Z^{\perp} = N(V)$.

Obratno, neka je $P = V^*V$ projektor. Stavimo $Z = R(P)$ i onda je $N(P) = Z^{\perp}$. Imamo

$$x \in N(P) \Rightarrow Px = 0 \Rightarrow V^*Vx = 0 \Rightarrow 0 = (V^*Vx|x) = \|Vx\|^2 \Rightarrow Vx = 0.$$

Očito, $Vx = 0 \Rightarrow Px = V^*Vx = 0$. Dakle, $N(P) = N(V)$, tj. $N(V) = Z^{\perp}$.

Nadalje, zbog $x \in Z \Rightarrow Px = x \Rightarrow V^*Vx = x$ imamo da $\forall x, y \in Z$ vrijedi $(Vx|Vy) = (V^*Vx|y) = (x|y)$, tj. $V|_Z$ je izometrija. □

2.1.18. Primjer. Neka je X separabilan Hilbertov prostor i $(e_n)_n$ ortonormirana baza u X. Definiramo $S \in B(X)$ sa

$$Sx = \sum_{n=1}^{\infty} (x|e_n)e_{n+1}, \ \forall x \in X. \tag{2.7}$$

Vrijedi $\|Sx\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |(x|e_n)|^2 = \|x\|^2$, $\forall x \in X$, pa je S izometrija. Operator S zovemo **jednostrani pomak** ili **unilateralni šift**. Vrijedi $Se_n = e_{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, pa S nije surjekcija, tj. $e_1 \perp R(S)$. Specijalno, S nije unitaran operator.

Njegov adjungirani operator S^* je definiran s

$$S^*x = \sum_{n=1}^{\infty} (S^*x|e_n)e_n = \sum_{n=1}^{\infty} (x|Se_n)e_n = \sum_{n=1}^{\infty} (x|e_{n+1})e_n, \ \forall x \in X. \tag{2.8}$$

Vrijedi $S^*e_1 = 0$ i $S^*e_n = e_{n-1}$ $(n \geq 2)$. Očito, S^* nije izometrija, ali je parcijalna izometrija. Naime, $S^*S = I$ i $SS^* = P$, gdje je P ortogonalni projektor na $R(S) = [\{e_1\}]^{\perp}$.

2.1.19. Teorem. *Za operator $A \in B(X,Y)$ postoje pozitivni operatori $H \in B(X)$, $K \in B(Y)$ i parcijalne izometrije $V, W \in B(X,Y)$ takve da je $A = VH = KW$* **polarni rastav operatora**.

Ako je $X = Y$ i A normalan operator, možemo izabrati V unitaran i takav da $CA = AC$ i $CA^* = A^*C$ povlači $CV = VC$.

Dokaz: Stavimo $H = \sqrt{A^*A}$. Prema propoziciji 2.1.3. $N(H) = R(H)^{\perp}$ i $N(H)^{\perp} = \overline{R(H)}$. Za svaki $x \in X$ vrijedi $Hx = 0 \Leftrightarrow H^2x = 0 \Leftrightarrow A^*Ax = 0 \Leftrightarrow Ax = 0$, tj. $N(H) = N(A)$. Dakle, za $x, x' \in X$ vrijedi $Hx = Hx' \Leftrightarrow Ax = Ax'$, pa je dobro definiran linearan operator $V_1 : R(H) \to R(A)$ takav da je $V_1Hx = Ax$, $\forall x \in X$. Očito je $R(V_1) = R(A)$. Za $y, y' \in R(H)$ postoje $x, x' \in X$ takvi da je $y = Hx, y' = Hx'$ te vrijedi $(V_1y|V_1y') = (Ax|Ax') = (A^*Ax|x') = (H^2x|x') = (Hx|Hx') = (y|y')$, tj. V_1 je izometrija sa $R(H)$ na $R(A)$. Proširimo V_1 do izometrije $V_2 : \overline{R(H)} \to \overline{R(A)}$, tj. $V_1 = V_2|_{R(H)}$. Stavimo $V = V_2P$, gdje je P ortogonalni projektor na $\overline{R(H)}$ duž $N(H)$. Vrijedi $V|_{N(P)} = 0$, tj. $V|_{N(H)} = 0$, i $V|_{N(P)^{\perp}} = V|_{\overline{R(H)}} = V_2$ je izometrija. Dakle, V je parcijalna izometrija, $R(V) = R(V_2) = \overline{R(A)}$ i $V^*V = PV_2^*V_2P = P$.

Za $h \in N(H)$ i $x \in X$ imamo $(V^*Ax|h) = (Ax|Vh) = 0$, tj. $V^*Ax \in N(H)^{\perp} = \overline{R(H)}$, pa vrijedi $R(V^*A) \subseteq \overline{R(H)}$.

Za svaki $x \in X$ imamo $VHx = V_2PHx = V_2Hx = V_1Hx = Ax$, dakle, $VH = A$. Odatle je $V^*A = V^*VH = PH = H$, pa je $R(V^*A) = R(H)$.

Ako je $A \in B(X)$ normalan operator, za svaki $x \in X$ imamo $\|Ax\| = \|A^*x\|$ što povlači $N(A) = N(A^*) = N(H)$ i $\overline{R(A)} = N(A^*)^{\perp} = N(A)^{\perp} = \overline{R(A^*)} = \overline{R(H)}$. Dakle, V_2 je izometrija sa $\overline{R(H)}$ na $\overline{R(H)}$, tj. unitaran operator na $\overline{R(H)}$. Definiramo $U \in B(X)$ unitaran operator takav da je $U|_{\overline{R(H)}} = V_2$ i $U|_{N(H)} = I|_{N(H)}$. Očito je $A = UH$.

Za $C \in B(X)$ takav da je $CA = AC$ i $CA^* = A^*C$ vrijedi $CA^*A = A^*AA$, odnosno $CH^2 = H^2C$, a odatle imamo $CH = HC$. Nadalje, za bilo koji $y = Hx \in R(H)$ vrijedi $CUy = CUHx = CAx = ACx = UHCx = UCHx = UCy$. Također, za bilo koji $y \in N(H)$ je $Uy = y$. Iz $HCy = CHy = 0$ slijedi $Cy \in N(H)$, a odatle imamo $UCy = Cy$. Dakle, $CUy = Cy = UCy$, tj. $CU = UC$.

$\square$

2.2 Banachove algebre, spektar

2.2.1. Definicija. Algebra $\mathcal{A}$ je vektorski prostor nad poljem $\mathbb{K}$ u kojem je definirana operacija $. : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ sa svojstvima:

(1) $a(bc) = (ab)c$, $\forall a, b, c \in \mathcal{A}$, (asocijativnost),

(2) $(\lambda a)b = a(\lambda b) = \lambda(ab)$, $\forall a, b \in \mathcal{A}$ i $\forall \lambda \in \mathbb{K}$, (kvaziasocijativnost).

(3) $a(b + c) = ab + ac$ i $(a + b)c = ac + bc$, $\forall a, b, c \in \mathcal{A}$, (distributivnost).

Ako $\mathcal{A}$ sadrži element e sa svojstvom $ae = ea = a$, $\forall a \in \mathcal{A}$, oda kažemo da je $\mathcal{A}$ **algebra s jedinicom**.

2.2.2. Definicija. Podskup $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ je **podalgebra** algebre $\mathcal{A}$ ako je i sam algebra s obzirom na operacije u $\mathcal{A}$.

Podalgebra $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{A}$ je **lijevi ideal** u algebri $\mathcal{A}$ ako je $\mathcal{A}\mathcal{I} \subseteq \mathcal{I}$ ili **desni ideal** u algebri $\mathcal{A}$ ako je $\mathcal{I}\mathcal{A} \subseteq \mathcal{I}$. Kažemo da je $\mathcal{I}$ **ideal** u $\mathcal{A}$ ako je i desni i lijevi ideal.

2.2.3. Definicija. Homomorfizam algebri $\mathcal{A}_1$ i $\mathcal{A}_2$ je linearno preslikavanje $\varphi : \mathcal{A}_1 \to \mathcal{A}_2$ za koje vrijedi $\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$, $\forall a, b \in \mathcal{A}_1$. Ako je φ bijekcija onda ga nazivamo **izomorfizam algebri**.

2.2.4. Primjeri.

1) Za skup $T \subseteq \mathbb{K}$ je skup funkcija $\mathbb{K}^T = \{f; f : T \to \mathbb{K}\}$, sa standardnim operacijama zbrajanja, množenja sa skalarom i množenja po točkama, je algebra s jedinicom nad poljem $\mathbb{K}$.

2) Skup $\mathcal{K}[T]$ restrikcija na T polinoma s koeficijentima iz $\mathbb{K}$ je podalgebra algebre $\mathbb{K}^T$.

3) Za bilo koju algebru s jedinicom $\mathcal{A}$ i neki $a \in \mathcal{A}$ je preslikavanje $\Phi_a : \mathcal{K}[T] \to \mathcal{A}$ definirano sa $\Phi_a(p) = p(a)$, $\forall p \in \mathcal{K}[T]$, homomorfizam algebri.

4) Ako je X vektorski prostor, onda je $L(X)$ algebra s jedinicom. Ako je X normiran prostor, onda je $B(X)$ podalgebra s jedinicom od $L(X)$. Ako su $A, B \in B(X)$, onda za svaki $x \in X$ vrijedi $\|ABx\| \leq \|A\|\|Bx\| \leq \|A\|\|B\|\|x\|$, tj. $\|AB\| \leq \|A\|\|B\|$. Također je $\|I\| = 1$.

2.2.5. Definicija. $\mathcal{A}$ je **normirana algebra** ako vrijedi:

(1) $\mathcal{A}$ je algebra s jedinicom nad $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ili $\mathbb{K} = \mathbb{C}$).

(2) $\mathcal{A}$ je normiran prostor.

(3) $\|ab\| \leq \|a\|\|b\|$, $\forall a, b \in \mathcal{A}$.

(4) $\|e\| = 1$.

Ako je $\mathcal{A}$ Banachov prostor onda se $\mathcal{A}$ naziva **Banachova algebra**.

Svaka normirana algebra se može upotpuniti, kao normirani prostor, do Banachove algebre.

2.2.6. Propozicija. *Neka je $\mathcal{A}$ normirana algebra. Množenje $(x, y) \mapsto xy$ je neprekidna funkcija sa $\mathcal{A} \times \mathcal{A}$ u $\mathcal{A}$. Štoviše, množenje je uniformno neprekidno na ograničenim podskupovima u $\mathcal{A} \times \mathcal{A}$.*

Dokaz: Neka su $a, b \in \mathcal{A}$ takvi da je $\max\{\|a\|, \|b\|\} \leq M$. Za bilo koji $\varepsilon > 0$ uzmimo $\delta = \min\{1, \frac{\varepsilon}{1+2M}\}$, te za koji $x, y \in \mathcal{A}$, $\|x - a\| < \delta$ i $\|y - b\| < \delta$ imamo

$$\|xy - ab\| \leq \|x - a\|\|y - b\| + \|a\|\|y - b\| + \|x - a\|\|b\| <$$

$$< \delta^2 + (\|a\| + \|b\|)\delta \leq (1 + 2M)\delta \leq \varepsilon.$$

Dakle, množenje je uniformno neprekidno na ograničenom skupu. □

2.2.7. Propozicija. *Neka je $\mathcal{A}$ normirana algebra i $\lambda : \mathcal{A} \to L(\mathcal{A})$ preslikavanje definirano sa $\lambda(a)x = ax$, $\forall a, x \in \mathcal{A}$. Tada je λ izometrički izomorfizam algebri $\mathcal{A}$ i $\lambda(\mathcal{A}) \subseteq B(\mathcal{A})$.*

Dokaz: Jasno, $\lambda(ab) = \lambda(a)\lambda(b)$ i $\lambda(e) = I_{\mathcal{A}}$.

Za svaki $a, x \in \mathcal{A}$ imamo $\|\lambda(a)x\| = \|ax\| \leq \|a\|\|x\|$ pa $\forall a \in \mathcal{A}$ vrijedi $\lambda(a) \in B(\mathcal{A})$ i $\|\lambda(a)\| \leq \|a\|$. Nadalje $\|\lambda(a)e\| = \|ae\| = \|a\|$ što daje $\|\lambda(a)\| = \|a\|$, $\forall a \in \mathcal{A}$. □

Neka je $\mathcal{A}$ algebra s jedinicom. S $G(\mathcal{A})$ označavamo grupu regularnih (invertibilnih) elemenata u $\mathcal{A}$.

2.2.8. Propozicija. *Neka je $\mathcal{A}$ normirana algebra. Tada je preslikavanje $x \mapsto x^{-1}$ neprekidno sa $G(\mathcal{A})$ u $G(\mathcal{A})$.*

Dokaz: Neka je $a \in G(\mathcal{A})$ bilo koji element. Uzmimo $x \in G(\mathcal{A})$ takav da je $\|x-a\| < \frac{1}{2\|a^{-1}\|}$. Tada je $\|x^{-1}\| - \|a^{-1}\| \leq \|x^{-1} - a^{-1}\| = \|x^{-1}(x-a)a^{-1}\| \leq \|x^{-1}\|\|x-a\|\|a^{-1}\| < \frac{1}{2}\|x^{-1}\|$. Dakle, $\|x^{-1}\| < 2\|a^{-1}\|$. Odatle slijedi $\|x^{-1} - a^{-1}\| \leq \|x^{-1}\|\|x-a\|\|a^{-1}\| < 2\|a^{-1}\|^2\|x-a\|$. □

2.2.9. Teorem. *Neka je $\mathcal{A}$ Banachova algebra i $a \in \mathcal{A}$ takav da je $\|a\| < 1$. Tada je $e - a \in G(\mathcal{A})$ i*

$$(e-a)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} a^n. \tag{2.9}$$

Dokaz: Zbog $\|a^n\| \leq \|a\|^n$ i $\|a\| < 1$ red $\sum_{n=0}^{\infty} \|a^n\|$ konvergira, a onda, zbog potpunosti, konvergira i red $\sum_{n=1}^{\infty} a^n$. Označimo njegovu sumu sa s i njegovu parcijalnu sumu sa $s_n = \sum_{k=0}^{n-1} a^k$. Vrijedi $s_n(e-a) = (e-a)s_n = e - a^n$. Očito, $a^n \to 0$, pa onda $s_n \to s$. Neprekidnost množenja povlači $(e-a)s = s(e-a) = e$. □

2.2.10. Teorem. *Neka je $\mathcal{A}$ Banachova algebra. Tada je $G(\mathcal{A})$ otvoren skup u $\mathcal{A}$.*

Dokaz: Neka je $a \in G(\mathcal{A})$ i neka je $x \in K(a, \|a^{-1}\|^{-1})$, tj. $\|x-a\| < \|a^{-1}\|^{-1}$. Sada je $\|e - a^{-1}x\| = \|a^{-1}(a-x)\| \leq \|a^{-1}\|\|a-x\| < 1$, pa je po teoremu 2.2.9. $e - (e - a^{-1}x) = a^{-1}x \in G(\mathcal{A})$. Odatle je $x \in G(\mathcal{A})$. □

2.2.11. Napomena. U dokazu teorema 2.2.9. nije bila nužna pretpostavka $\|a\| < 1$. Dovoljno je da radijus konvergencije reda $\sum_{n=0}^{\infty} \|a^n\|\lambda^n$ bude veći od 1. To znači da je dovoljan uvjet $\limsup_n \|a^n\|^{\frac{1}{n}} < 1$.

2.2.12. Definicija. Neka je $\mathcal{A}$ normirana algebra i $x \in \mathcal{A}$. Broj

$$\nu(x) = \inf\{\|x^n\|^{\frac{1}{n}}; n \in \mathbb{N}\} \tag{2.10}$$

nazivamo **spektralni radijus** elementa x.

2.2.13. Teorem. *Neka je $\mathcal{A}$ normirana algebra*

(a) Niz $(\|x^n\|^{\frac{1}{n}})_n$ je konvergentan i $\nu(x) = \lim_n \|x^n\|^{\frac{1}{n}}$.

(b) $0 \leq \nu(x) \leq \|x\|$, $\forall x \in \mathcal{A}$.

(c) $\nu(\alpha x) = |\alpha|\nu(x)$, $\forall x \in \mathcal{A}$ *i* $\forall \alpha \in \mathbb{K}$.

(d) $\nu(xy) = \nu(yx)$, $\forall x, y \in \mathcal{A}$.

(e) $\nu(x^k) = \nu(x)^k$, $\forall x \in \mathcal{A}$ *i* $\forall k \in \mathbb{N}$.

(f) Ekvivalentne norme daju isti spektralni radijus.

Dokaz: (a) Neka je $x \in \mathcal{A}$ i $\varepsilon > 0$ po volji. Po definiciji $\nu(x)$ u (2.10) postoji $m \in \mathbb{N}$ takav da je $\|x^m\|^{\frac{1}{m}} \leq \nu(x) + \varepsilon$.

Za bilo koji $n \in \mathbb{N}$ jedinstveni su brojevi $p_n \in \mathbb{N}$ i $q_n \in \{0, 1, \ldots, m-1\}$ takvi da je $n = p_n m + q_n$. Vrijedi $1 = p_n \frac{m}{n} + \frac{q_n}{n}$, što daje $\lim_n p_n \frac{m}{n} = 1$. Sada imamo

$$\|x^n\| = \|x^{mp_n + q_n}\| = \|(x^m)^{p_n} x^{q_n}\| \leq \|x^m\|^{p_n} \|x\|^{q_n}\| \leq (\nu(x) + \varepsilon)^{p_n m} \|x\|^{q_n},$$

odakle dobijemo $\|x^n\|^{\frac{1}{n}} \leq (\nu(x)+\varepsilon)^{p_n \frac{m}{n}} \|x\|^{\frac{q_n}{n}}$. Prethodna nejednakost povlači $\limsup_n \|x^n\|^{\frac{1}{n}} \leq \lim_n (\nu(x) + \varepsilon)^{p_n \frac{m}{n}} \|x\|^{\frac{q_n}{n}} = \nu(x) + \varepsilon$.

Kako je $\varepsilon > 0$ bio po volji, slijedi

$$\limsup_n \|x^n\|^{\frac{1}{n}} \leq \nu(x) = \inf\{\|x^n\|^{\frac{1}{n}}; n \in \mathbb{N}\} \leq \liminf_n \|x^n\|^{\frac{1}{n}}.$$

Tvrdnje (b) i (c) su očigledne.

(d) Vrijedi $(xy)^{n+1} = x(yx)^n y$, što daje $\|(xy)^{n+1}\| \leq \|x\|\|(yx)^n\|\|y\|$, odnosno, $\|(xy)^{n+1}\|^{\frac{1}{n+1}} \leq (\|x\|\|y\|)^{\frac{1}{n+1}} \left[\|(yx)^n\|^{\frac{1}{n}}\right]^{\frac{n}{n+1}}$. Odatle za $n \to \infty$ imamo $\nu(xy) \leq \nu(yx)$. Zamjenom x i y u prethodnoj nejednakosti dobijemo suprotnu nejednakost.

(e) Imamo $\nu(x^k) = \lim_n \|x^{nk}\|^{\frac{1}{n}} = \lim_n \left(\|x^{nk}\|^{\frac{1}{nk}}\right)^k = \nu(x)^k$.

(f) Neka su $m, M > 0$ takvi da vrijedi $m\|x\| \leq |x| \leq M\|x\|$. Tada za svaki $n \in \mathbb{N}$ imamo $m\|x^n\| \leq |x^n| \leq M\|x^n\|$, odnosno, $m^{\frac{1}{n}}\|x^n\|^{\frac{1}{n}} \leq |x^n|^{\frac{1}{n}} \leq M^{\frac{1}{n}}\|x^n\|^{\frac{1}{n}}$. Odatle za $n \to \infty$ dobijemo $\nu_{\|\cdot\|}(x) \leq \nu_{|\cdot|}(x) \leq \nu_{\|\cdot\|}(x)$. $\square$

Slijedi bolja varijanta teorema 2.2.9.

2.2.14. Teorem. *Neka je $\mathcal{A}$ Banachova algebra i $a \in \mathcal{A}$ takav da je $\nu(a) < 1$. Tada je $e - a \in G(\mathcal{A})$ i*

$$(e - a)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} a^n. \tag{2.11}$$

U daljnje je $\mathcal{A}$ Banachova algebra nad poljem $\mathbb{C}$.

2.2.15. Definicija. Za $a \in \mathcal{A}$ skup $\sigma(a) = \{\lambda \in \mathbb{C}; \lambda e - a \notin G(\mathrm{A})\}$ nazivamo **spektar** od a. Skup $\rho(a) = \mathbb{C} \backslash \sigma(a)$ nazivamo **rezolventni skup** od a.

2.2.16. Teorem. *Za svaki $a \in \mathcal{A}$ je $\sigma(a)$ neprazan i kompaktan skup i*

$$\nu(a) = \max\{|\lambda|; \lambda \in \sigma(a)\}. \tag{2.12}$$

Dokaz: Neka je $\lambda \in \mathbb{C}$ i $|\lambda| > \nu(a)$. Tada $\nu(\frac{a}{\lambda}) < 1$ pa po teoremu 2.2.14. slijedi $e - \frac{a}{\lambda} \in G(\mathcal{A})$, odnosno, $\lambda e - a \in G(\mathcal{A})$. Tada je $\lambda \in \rho(a)$.

Dakle, $\sigma(a) \subseteq \overline{K}(0, \nu(a))$. Posebno, skup $\sigma(a)$ je ograničen. Dokažimo da je $\sigma(a)$ zatvoren, tj. da je $\rho(a)$ otvoren. Uzmimo bilo koji $\mu \in \rho(a)$ i neka je $\varepsilon > 0$ takav da vrijedi implikacija $(\|x - (\mu e - a))\| < \varepsilon) \Rightarrow (x \in G(\mathcal{A}))$. Takav ε postoji jer je po teoremu 2.2.10. $G(\mathcal{A})$ otvoren skup u $\mathcal{A}$.

Za $\lambda \in \mathbb{C}$, takav da je $|\lambda - \mu| < \varepsilon$, slijedi $\|(\lambda e - a) - (\mu e - a)\| = \|(\lambda - \mu)e\| < \varepsilon$, što povlači $\lambda e - a \in G(\mathcal{A})$, odnosno, $\lambda \in \rho(a)$. Dakle, $K(\mu, \varepsilon) \subseteq \rho(a)$.

Prema tome, $\sigma(a)$ je zatvoren i ograničen, dakle kompaktan.

Teorem će biti dokazan ako pokažemo da je $S \cap \sigma(a) \neq \emptyset$, gdje je $S = \{\lambda \in \mathbb{C}; |\lambda| = \nu(a)\}$.

U slučaju kada je $\nu(a) = 0$ imamo $\sigma(a) \subseteq \{0\}$. Treba dokazati da je $0 \in \sigma(a)$, tj. da $a \notin G(\mathcal{A})$.

Pretpostavimo suprotno, tj. $a \in G(\mathcal{A})$. Tada je $a^n(a^{-1})^n = e$, pa je $1 \leq \|a^n\|\|(a^{-1})^n\|$, odnosno, $1 \leq \|a^n\|^{\frac{1}{n}}\|(a^{-1})^n\|^{\frac{1}{n}}$. Odatle je $1 \leq \nu(a)\nu(a^{-1})$, što povlači $\nu(a) > 0$, a to je kontradikcija s pretpostavkom da je $\nu(a) = 0$.

Pretpostavimo sada da je $\nu = \nu(a) > 0$ i da vrijedi $S \cap \sigma(a) = \emptyset$. Tada $\rho(a)$ sadrži zatvoren kružni vijenac $K = \{\lambda \in \mathbb{C}; \nu \leq |\lambda| \leq \nu + 1\}$. Definiramo funkciju $f : K \to \mathcal{A}$ sa $f(\lambda) = (e - \frac{1}{\lambda}a)^{-1}$, $\forall \lambda \in K$. Tada je f neprekidna, dakle i uniformno neprekidna, jer je K kompaktan skup, tj.

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall \lambda, \lambda' \in K)((|\lambda - \lambda'| < \delta) \Rightarrow (\|f(\lambda) - f(\lambda')\| < \varepsilon)). \tag{2.13}$$

Za $n \in \mathbb{N}$ uzmimo sve $n-$te korijene iz jedinice $\omega_1 = e^{\frac{2\pi i}{n}}$, $\omega_2 = \omega_1^2, \ldots, \omega_n = \omega_1^n = 1$. Imamo

$$1 - \lambda^n = 1 - \omega_j^{-n}\lambda^n = (1 - \omega_j^{-1}\lambda)[1 + \omega_j^{-1}\lambda + \cdots + \omega_j^{1-n}\lambda^{n-1}].$$

U toj jednakosti zamijenimo λ sa $\lambda^{-1}a$ i dobijemo

$$e - \lambda^{-n}a^n = (e - \omega_j^{-1}\lambda^{-1}a)[e + \omega_j^{-1}\lambda^{-1}a + \cdots + \omega_j^{1-n}\lambda^{1-n}a^{n-1}],$$

pa imamo

$$e + \omega_j^{-1}\lambda^{-1}a + \cdots + \omega_j^{1-n}\lambda^{1-n}a^{n-1} = (e - \lambda^{-n}a^n)f(\omega_j\lambda).$$

Zbrojimo tih n jednakosti za $j = 1, 2, \ldots, n$ i iskoristimo $\sum_{j=1}^{n} \omega_j^k = 0$ za $k = 1, \ldots, n-1$ ($\omega_j^{-s} = \omega_j^{n-s}$). Slijedi

$$ne = (e - \lambda^{-n} a^n) \sum_{j=1}^{n} f(\omega_j \lambda), \text{ odnosno } (e - \lambda^{-n} a^n)^{-1} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} f(\omega_j \lambda), (\forall \lambda \in K).$$

Neka je $\varepsilon > 0$ bilo koji i neka je $\delta > 0$ takav da vrijedi (2.13). Za $\lambda = \nu + t$, gdje je $0 < t < \delta$, imamo $(\nu+t)\omega_j, \nu\omega_j \in K$, $|(\nu+t)\omega_j - \nu\omega_j| = t|\omega_j| = t < \delta$, pa slijedi $\|f((\nu+t)\omega_j) - f(\nu\omega_j)\| < \varepsilon$ za $j = 1, \ldots, n$.

Imamo

$$\|[e - (\nu+t)^{-n} a^n]^{-1} - [e - \nu^{-n} a^n]^{-1}\| = \frac{1}{n} \| \sum_{j=1}^{n} [f((\nu+t)\omega_j) - f(\nu\omega_j)] \| \leq$$

$$\leq \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \|f((\nu+t)\omega_j) - f(\nu\omega_j)\| < \frac{1}{n} n\varepsilon = \varepsilon.$$

Dakle, za svaki $n \in \mathbb{N}$,

$$(0 < t < \delta) \Rightarrow (\|[e - (\nu+t)^{-n} a^n]^{-1} - [e - \nu^{-n} a^n]^{-1}\| < \varepsilon).$$

Odatle

$$\|e - [e - \nu^{-n} a^n]^{-1}\| = \|e - [e - (\nu+t)^{-n} a^n]^{-1} + ([e - (\nu+t)^{-n} a^n]^{-1} - [e - \nu^{-n} a^n]^{-1})\| \leq$$

$$\leq \|e - [e - (\nu+t)^{-n} a^n]^{-1}\| + \|[e - (\nu+t)^{-n} a^n]^{-1} - [e - \nu^{-n} a^n]^{-1}\|,$$

pa dobijemo

$$\|e - [e - \nu^{-n} a^n]^{-1}\| \leq \|e - [e - (\nu+t)^{-n} a^n]^{-1}\| + \varepsilon. \tag{2.14}$$

Međutim, $\nu + t > \nu$ povlači $\lim_n \dfrac{\|a^n\|^{\frac{1}{n}}}{\nu + t} = \dfrac{\nu}{\nu + t} < 1$, a odatle slijedi

$$\lim_n \|(\nu+t)^{-n} a^n\| = \lim_n \left(\frac{\nu}{\nu+t}\right)^n = 0,$$

odnosno, $\lim_n (\nu+t)^{-n} a^n = 0$. Sada je $\lim_n \{e - [e - (\nu+t)^{-n} a^n]^{-1}\} = e - e = 0$.

Prema tome, iz (2.14) slijedi da za svaki $\varepsilon > 0$ imamo

$$\limsup_n \|e - [e - \nu^{-n} a^n]^{-1}\| \leq \varepsilon, \text{pa je onda } \lim_n [e - (e - \nu^{-n} a^n)^{-1}] = 0.$$

Zbog toga je $\lim_n (e - \nu^{-n} a^n)^{-1} = e$, pa onda, $\lim_n (e - \nu^{-n} a^n) = e$ i konačno $\lim_n \nu^{-n} a^n = 0$. No, posljednja jednakost nije moguća, jer vrijedi $\nu^n = \nu(a)^n = \nu(a^n) \leq \|a^n\|$, što daje $\|\nu^{-n} a^n\| = \frac{\|a^n\|}{\nu^n} \geq 1$. $\square$

2.2.17. Definicija. Rezolventa od $a \in \mathcal{A}$ je funkcija $\lambda \mapsto R(a, \lambda)$ sa $\rho(a)$ u $\mathcal{A}$ (tj. u $G(\mathcal{A})$) zadana sa

$$R(a, \lambda) = (\lambda e - a)^{-1}.$$

2.2.18. Teorem. *Neka je $\mathcal{A}$ kompleksna Banachova algebra s jedinicom i $a \in \mathcal{A}$.*

(a) Za $\lambda \in \mathbb{C}$, $|\lambda| > \nu(a)$ je

$$R(a, \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda^{n+1}} a^n \text{ (v Neumannov red).} \tag{2.15}$$

(b) Za $\mu \in \rho(a)$ i za $|\lambda - \mu| < \nu(R(a, \lambda))^{-1}$ je $\lambda \in \rho(a)$ i

$$R(a, \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} (\mu - \lambda)^n R(a, \mu)^{n+1}. \tag{2.16}$$

Dokaz: (a) Za $|\lambda| > \nu(a)$ je $\nu(\frac{a}{\lambda}) < 1$ pa je $e - \frac{a}{\lambda} \in G(\mathcal{A})$. Sada iz teorema 2.2.14. imamo $(e - \dfrac{a}{\lambda})^{-1} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{a}{\lambda}\right)^n$, a odatle je $R(a, \lambda) = \dfrac{1}{\lambda}\left(e - \dfrac{a}{\lambda}\right)^{-1} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{\lambda^{n+1}}$.

(b) Radijus konvergencije reda $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \|R(a, \mu)^n\| z^n$ $(z \in \mathbb{C})$ je

$$\left[\limsup_n \|R(a, \mu)^n\|^{\frac{1}{n}}\right]^{-1} = \nu(R(a, \mu))^{-1}.$$

Red konvergira za svaki $z \in \mathbb{C}$ takav da je $|z|\nu(R(a, \mu)) < 1$. Prema tome, red u (b) je konvergentan za svaki $\lambda \in \mathbb{C}$ takav da je $|\lambda - \mu| < \nu(R(a, \mu))^{-1}$. Za takav λ označimo sa $S(\lambda)$ sumu tog reda, sa $S_p(\lambda)$ parcijalnu sumu

$$S_p(\lambda) = \sum_{n=0}^{p} (\mu - \lambda)^n R(a, \mu)^{n+1}.$$

Računamo

$$S_p(\lambda)(\lambda e - a) = (\lambda e - a) S_p(\lambda) = [(\lambda - \mu)e + (\mu e - a)] S_p(\lambda) =$$

$$= \sum_{n=0}^{p}(\mu-\lambda)^n R(a,\mu)^n - \sum_{n=0}^{p}(\mu-\lambda)^{n+1}R(a,\mu)^{n+1} = e-(\mu-\lambda)^{p+1}R(a,\mu)^{p+1}.$$

Također vrijedi $\lim_p \|(\mu-\lambda)^{p+1}R(a,\mu)^{p+1}\|^{\frac{1}{p+1}} = |\mu-\lambda| \lim_p \|R(a,\mu)^{p+1}\|^{\frac{1}{p+1}} = |\mu-\lambda|\nu(R(a,\mu)) < 1$, pa je $\lim_p \|(\mu-\lambda)^{p+1}R(a,\mu)^{p+1}\| = 0$. Odatle imamo $\lim_p (\mu-\lambda)^{p+1}R(a,\mu)^{p+1} = 0$, odnosno $S(\lambda)(\lambda e-a) = (\lambda e-a)S(\lambda) = e$. $\square$

2.2.19. Napomena. Preslikavanje $\lambda \mapsto R(a,\lambda)$ je analitička funkcija na $\rho(a)$ i $\lim_{|\lambda|\to\infty} R(a,\lambda) = \lim_{|\lambda|\to\infty} \frac{1}{\lambda}\left(e-\frac{a}{\lambda}\right)^{-1} = 0$.

2.2.20. Propozicija. *Neka je $\mathcal{A}$ kompleksna Banachova algebra s jedinicom.*

(a) Za $a \in \mathcal{A}$ i $p(\lambda)$ polinom vrijedi $\sigma(p(a)) = p(\sigma(a)) = \{p(\lambda); \lambda \in \sigma(a)\}$.

(b) Za $a \in G(\mathcal{A})$ vrijedi $\sigma(a^{-1}) = \sigma(a)^{-1} = \{\frac{1}{\lambda}; \lambda \in \sigma(a)\}$.

Dokaz: (a) Neka za $\alpha \in \mathbb{C}$ vrijedi $p(\lambda)-\alpha = \gamma(\lambda_1-\lambda)\cdots(\lambda_n-\lambda)$, $\gamma \neq 0$, pa je $p(a)-\alpha e = \gamma(\lambda_1 e-a)\cdots(\lambda_n e-a)$.

Ako je $\alpha \in \sigma(p(a))$, onda je $\alpha e - p(a) \notin G(\mathcal{A})$, pa postoji $j \in \{1,\dots,n\}$ takav da $\lambda_j e - a \notin G(\mathcal{A})$, tj. $\lambda_j \in \sigma(a)$. Ali $\alpha = p(\lambda_j)$, pa je $\alpha \in p(\sigma(a))$. Dakle, $\sigma(p(a)) \subseteq p(\sigma(a))$.

Ako je $\alpha \in p(\sigma(a))$, onda je $\alpha = p(\lambda_0)$ za neki $\lambda_0 \in \sigma(a)$. Ali $\lambda_1,\dots,\lambda_n$ su sva rješenja jednadžbe $\alpha = p(\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{C}$, pa je $\lambda_0 = \lambda_j \in \sigma(a)$ za neki $j \in \{1,\dots,n\}$. Sada je $\lambda_j e - a \notin G(\mathcal{A})$, a onda je također i $\alpha e - p(a) = (\lambda_1 e-a)\cdots(\lambda_n e-a) \notin G(\mathcal{A})$, tj. $\alpha \in \sigma(p(a))$. Dakle, $p(\sigma(a)) \subseteq \sigma(p(a))$.

(b) Ako je $\lambda \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$, onda vrijedi $\lambda^{-1}e - a^{-1} = \lambda^{-1}(e-\lambda a^{-1}) = -\lambda^{-1}(\lambda e-a)a^{-1}$. Dakle, $\lambda^{-1}e-a^{-1} \in G(\mathcal{A})$ ako i samo ako $\lambda e - a \in G(\mathcal{A})$, tj. $\lambda^{-1} \in \sigma(a^{-1})$ ako i samo ako $\lambda \in \sigma(a)$. $\square$

2.2.21. Teorem. (I.M. Geljfand - S.Mazur) *Neka je $\mathcal{A}$ kompleksna Banachova algebra koja je tijelo, tj. $G(\mathcal{A}) = \mathcal{A}\backslash\{0\}$. Tada je $\mathcal{A} = \{\lambda e; \lambda \in \mathbb{C}\}$, tj. $\mathcal{A} \sim \mathbb{C}$.*

Dokaz: Ako je $x \in \mathcal{A}$ i $\lambda \in \sigma(x)$, onda je $\lambda e - x \notin G(\mathcal{A})$, tj. $\lambda e - x = 0$. $\square$

2.2.22. Propozicija. *Ako je $\|a^{-1}\| \leq \|a\|^{-1}$, $\forall a \in G(\mathcal{A})$, onda je $\mathcal{A} = \{\lambda e; \lambda \in \mathbb{C}\}$.*

Dokaz: Za $\varepsilon > 0$ označimo $\mathcal{A}_\varepsilon = \{x \in \mathcal{A}; \|x\| \geq \varepsilon\}$ i $G_\varepsilon = G(\mathcal{A}) \cap \mathcal{A}_\varepsilon$.

Neka je $(x_n)_n$ niz u G_ε koji konvergira k $x \in \mathcal{A}$. Tada imamo

$$\|x_n^{-1} - x_m^{-1}\| = \|x_n^{-1}(x_m - x_n)x_m^{-1}\| \leq \|x_n^{-1}\|\|x_m - x_n\|\|x_m^{-1}\| \leq \frac{1}{\varepsilon^2}\|x_m - x_n\|.$$

Dakle, $(x_n^{-1})_n$ je Cauchyjev niz u $\mathcal{A}$. Neka je $x_0 = \lim_n x_n^{-1}$. Tada je $xx_0 = \lim_n x_n x_n^{-1} = e$ i $x_0 x = \lim_n x_n^{-1} x_n = e$, tj. $x \in G(\mathcal{A})$. Nadalje, $\|x\| = \lim_n \|x_n\| \geq \varepsilon$ povlači da je $x \in \mathcal{A}_\varepsilon$. Dakle, $x \in G_\varepsilon$.

Prema tome, vrijedi:

(1) $\mathcal{A}_\varepsilon$ je povezan skup.

(2) G_ε je zatvoren podskup od $\mathcal{A}_\varepsilon$.

(3) G_ε je otvoren podskup od $\mathcal{A}_\varepsilon$.

(4) $G_\varepsilon \neq \emptyset$ $(\varepsilon e \in G_\varepsilon)$.

Dakle, $G_\varepsilon = \mathcal{A}_\varepsilon$, pa $\forall \varepsilon > 0$ vrijedi $\mathcal{A}_\varepsilon \subseteq G(\mathcal{A})$. Odatle je $G(\mathcal{A}) = \mathcal{A} \backslash \{0\}$, pa tvrdnja slijedi iz teorema 2.2.21. □

2.2.23. Napomena. Vrijedi $1 = \|aa^{-1}\| \leq \|a\|\|a^{-1}\|$, pa je u propoziciji 2.2.22. pretpostavka zapravo $\|a^{-1}\| = \|a\|^{-1}$.

2.2.24. Korolar. *Neka je $\mathcal{A}$ kompleksna Banachova algebra takva da je $\|xy\| = \|x\|\|y\|$, $\forall x, y \in \mathcal{A}$. Tada je $\mathcal{A} = \{\lambda e; \lambda \in \mathbb{C}\}$.*

2.3 Spektar ograničenog operatora

Neka je do daljnjega X kompleksan Banachov prostor. Tada je $B(X)$ kompleksna Banachova algebra s jedinicom I. Za $A \in B(X)$ se spektar operatora definira kao $\sigma(A) = \{\lambda \in \mathbb{C}; \lambda I - A$ nije invertibilan u $B(X)\}$. Nekoliko je mogućih razloga da $\lambda I - A$ ne bude invertibilan. Po tome se točke spektra dijele u nekoliko kategorija.

2.3.1. Definicija. Neka je $A \in B(X)$.

(1) **Točkovni spektar** operatora A je

$$\sigma_p(A) = \{\lambda \in \mathbb{C}; \lambda I - A \text{ nije injekcija } \} = \{\lambda \in \mathbb{C}; N(\lambda I - A) \neq \{0\}\}.$$

(2) **Kontinuirani spektar** operatora A je

$$\sigma_c(A) = \{\lambda \in \mathbb{C}; \lambda I - A \text{ je injekcija}, R(\lambda I - A) \neq X, \overline{R(\lambda I - A)} = X\}.$$

(3) **Rezidualni spektar** operatora A je

$$\sigma_r(A) = \{\lambda \in \mathbb{C}; \lambda I - A \text{ je injekcija}, \overline{R(\lambda I - A)} \neq X\}.$$

2.3.2. Napomena. Ako je $\lambda \in \sigma_c(A)$ onda je $\lambda I - A$ bijekcija sa X na $R(\lambda I - A)$ pa postoji inverz $(\lambda I - A)^{-1} : R(\lambda I - A) \to X$, ali taj operator nije ograničen. Kasnije ćemo vidjeti da u slučaju kada je $\lambda I - A : X \to X$ bijekcija, onda je $(\lambda I - A)^{-1} : X \to X$ ograničen operator i stoga $\lambda \notin \sigma(A)$.

2.3.3. Propozicija. *Neka je $\{e_n; n \in \mathbb{N}\}$ ortonormirana baza u Hilbertovom prostoru X i $(\lambda_n)_n$ ograničen niz u $\mathbb{C}$. Postoji jedinstven $A \in B(X)$ takav da je $Ae_n = \lambda_n e_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Operator A je normalan i $\sigma(A) = \overline{\{\lambda_n : n \in \mathbb{N}\}}$.*

Posebno, za svaki neprazan kompaktan skup $\sigma \subset \mathbb{C}$ postoji normalan operator $A \in B(X)$ takav da je $\sigma = \sigma(A)$.

Dokaz: Neka je $M > 0$ takav da je $|\lambda_n| \leq M$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Tada za svaki $x \in X$ vrijedi $x = \sum_{n=1}^{\infty}(x|e_n)e_n$, pa je $\sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n(x|e_n)|^2 \leq M^2 \sum_{n=1}^{\infty} |(x|e_n)|^2 = M^2\|x\|^2$. Dakle, red $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n(x|e_n)e_n$ konvergira u X. Stavimo

$$Ax = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n(x|e_n)e_n, \quad \forall x \in X.$$

Tada je $A : X \to X$ linearan operator i $\|Ax\| \leq M\|x\|$, $\forall x \in X$, dakle, $A \in B(X)$. Očito je $Ae_n = \lambda_n e_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Nadalje $A^*x = \sum_{n=1}^{\infty}(A^*x|e_n)e_n = \sum_{n=1}^{\infty}(x|Ae_n)e_n = \sum_{n=1}^{\infty} \overline{\lambda}_n(x|e_n)e_n$, i posebno, $A^*e_n = \overline{\lambda}_n e_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Odatle imamo $(A^*A - AA^*)e_n = 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, što pokazuje da je A normalan operator.

Stavimo $\sigma = \overline{\{\lambda_n : n \in \mathbb{N}\}}$. Očito je $\lambda_n \in \sigma_p(A) \subseteq \sigma(A)$, pa je $\sigma \subseteq \sigma(A)$. Neka je $\lambda \in \mathbb{C}\backslash\sigma$. Tada postoji $m > 0$ takav da je $|\lambda - \lambda_n| \geq m$, $\forall n \in \mathbb{N}$, pa je $|\lambda - \lambda_n|^{-1} \leq \frac{1}{m}$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Dakle, prema dokazanom je sa

$$Rx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda - \lambda_n}(x|e_n)e_n, \quad \forall x \in X,$$

definiran operator $R \in B(X)$. Sada, $Re_n = \frac{1}{\lambda - \lambda_n}e_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$, pa imamo $(\lambda I - A)Re_n = R(\lambda I - A)e_n = e_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$, tj. $(\lambda I - A)R = R(\lambda I - A) = I$. To daje $\lambda \in \mathbb{C}\backslash\sigma(A)$, dakle imamo $\mathbb{C}\backslash\sigma \subseteq \mathbb{C}\backslash\sigma(A)$. Odatle je $\sigma(A) \subseteq \sigma$. $\square$

2.3.4. Napomena. Iz dokaza propozicije 2.3.3. je jasno da vrijedi

$$R(A, \lambda)x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda - \lambda_n}(x|e_n)e_n, \quad \forall x \in X, \forall \lambda \in \rho(A).$$

2.3.5. Primjer. Neka je niz $(\lambda_n)_n$ iz propozicije 2.3.3. konvergentan u $\mathbb{C}$ i $\lambda_0 = \lim_n \lambda_n$ i neka je $\lambda_0 \neq \lambda_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Tada je $\lambda_0 \in \sigma(A)$ ali $\lambda_0 \notin \sigma_p(A)$.

Doista, ako je $Ax = \lambda_0 x$, onda je $0 = (\lambda_0 I - A)x = \sum_{n=1}^{\infty}(\lambda_0 - \lambda_n)(x|e_n)e_n$, dakle, $(\lambda_0 - \lambda_n)(x|e_n)e_n = 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Odatle imamo $(x|e_n) = 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, a to znači da je $x = 0$. Dakle, $\lambda_0 I - A$ je injekcija.

Inverzno preslikavanje $R_0 = (\lambda_0 I - A)^{-1} : R(\lambda_0 I - A) \to X$ je zadano sa $R_0 e_n = \frac{1}{\lambda - \lambda_n} e_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Potprostor $R(\lambda_0 I - A)$ je gust u X, ali je različit od X. Doista, $e_n \in R(\lambda_0 I - A)$, $\forall n \in \mathbb{N}$, povlači $\overline{R(\lambda_0 I - A)} = X$. Kada bi bilo $R(\lambda_0 I - A) = X$, onda bi imali

$$R_0 x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_0 - \lambda_n}(x|e_n)e_n, \quad \forall x \in X.$$

Kako je $\lambda_0 = \lim_n \lambda_n$, to postoji podniz $(\lambda_{p_n})_n$ za koji vrijedi $|\lambda_0 - \lambda_{p_n}| \leq \frac{1}{2^n}$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Tada je $x = \sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_0 - \lambda_{p_n}| e_{p_n} \in X$ ali je $\left|\frac{1}{\lambda_0 - \lambda_{p_n}}(x|e_{p_n})\right| = 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Dakle, red $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_0 - \lambda_{p_n}}(x|e_{p_n})e_{p_n}$ ne konvergira, a morao bi konvergirati prema $R_0 x$. Zaključujemo da $x \notin R(\lambda_0 I - A)$.

Prema tome je $\lambda_0 \in \sigma_c(A)$.

2.3.6. Primjer. Neka je $\{e_n; n \in \mathbb{N}\}$ ortonormirana baza u Hilbertovom prostoru X. Definiramo $A : X \to X$ sa

$$Ax = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x|e_n)}{n+1} e_{n+1}, \quad \forall x \in X.$$

Vrijedi $\|Ax\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{(x|e_n)}{n+1}\right|^2 \leq \|x\|^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2} = \|x\|^2(\frac{\pi}{2} - 1) < \infty$, pa je $A \in B(X)$. Nadalje je

$$A^k e_n = \frac{1}{(n+1)(n+2)\cdots(n+k)} e_{n+k}, \quad \forall k, n \in \mathbb{N},$$

$$\|A^k e_n\| = \frac{1}{(n+1)(n+2)\cdots(n+k)} \leq \frac{1}{k!}, \quad \forall k, n \in \mathbb{N},$$

pa imamo $\|A^k\| \leq \frac{1}{k!}$. Odavde je $\nu(A) = \lim_k \|A^k\|^{\frac{1}{k}} \leq \lim_k \frac{1}{\sqrt[k]{k!}} = 0$, tj. $\nu(A) = 0$, odnosno $\sigma(A) = \{0\}$.

Iz definicije je jasno da je A injekcija, tj. $0 \notin \sigma_p(A)$. Nadalje, $e_1 \perp R(A)$, pa je $0 \in \sigma_r(A)$.

Neka je $\{e_n; n \in \mathbb{N}\}$ ortonormirana baza u Hilbertovom prostoru X. U primjeru 2.1.18. smo definirali operator jednostranog pomaka (unilateralni šift) $S \in B(X)$ sa $Sx = \sum_{n=1}^{\infty}(x|e_n)e_{n+1}$, $\forall x \in X$.

2.3.7. Propozicija. *Za operator S vrijedi*

(*a*) $\sigma(S) = \{\lambda \in \mathbb{C};\ |\lambda| \leq 1\}$.

(*b*) $\sigma_p(S) = \emptyset$.

(*c*) $\sigma_c(S) = \{\lambda \in \mathbb{C};\ |\lambda| = 1\}$.

(*d*) $\sigma_r(S) = \{\lambda \in \mathbb{C};\ |\lambda| < 1\}$.

Dokaz: Prvo pokažimo da je za svaki $\lambda \in \mathbb{C}$ operator $\lambda I - S$ injekcija. To je istina za $\lambda = 0$, jer smo u primjeru 2.1.18. pokazali da je S izometrija.

Za $\lambda \neq 0$ pretpostavimo da vrijedi $(\lambda I - S)x = 0$, tj. $Sx = \lambda x$. Tada imamo $(Sx|e_1) = \lambda(x|e_1) = (x|S^* e_1) = 0$, pa je $(x|e_1) = 0$. Za $k \geq 2$ imamo $(Sx|e_k) = \lambda(x|e_k) = (x|S^* e_k) = (x|e_{k-1})$, tj. $(x|e_k) = \frac{1}{\lambda}(x|e_{k-1}) = \cdots = \frac{1}{\lambda^{k-1}}(x|e_1) = 0$. Dakle $(x|e_k) = 0$, $\forall k \in \mathbb{N}$, što povlači da je $x = 0$.

Pokažimo da za $\lambda \in \mathbb{C}$, $|\lambda| < 1$, slika operatora $R(\lambda I - S)$ nije gusta u X. Definiramo $x_\lambda = \sum_{n=1}^{\infty} \overline{\lambda}^n e_n \in X$. Vrijedi $((\lambda I - S)e_k|x_\lambda) = \lambda(e_k|x_\lambda) - (Se_k|x_\lambda) = \lambda\lambda^k - (e_{k+1}|x_\lambda) = \lambda^{k+1} - \lambda^{k+1} = 0$, $\forall k \in \mathbb{N}$. Stoga je vektor $x_\lambda \perp R(\lambda I - S)$, pa je $\lambda \in \sigma_r(S)$. Dakle, $\sigma(S) \supseteq \{\lambda \in \mathbb{C};\ |\lambda| \leq 1\}$.

Za $|\lambda| > 1$ je $\lambda \in \rho(S)$ jer je $\|S\| = 1$. Dakle, $\sigma(S) = \{\lambda \in \mathbb{C};\ |\lambda| \leq 1\}$.

Pokažimo da za $\lambda \in \mathbb{C}$, $|\lambda| = 1$ vrijedi $\overline{R(\lambda I - S)} = X$, tj. $\lambda \in \sigma_c(S)$. Neka je $x \perp R(\lambda I - S)$. Tada je $0 = ((\lambda I - S)e_k|x) = \lambda(e_k|x) - (e_{k+1}|x)$, odnosno $(e_{k+1}|x) = \lambda(e_k|x) = \cdots = \lambda^k(e_1|x)$, $\forall k \in \mathbb{N}$. Odatle imamo $|(e_k|x)| = |(e_1|x)|$, $\forall k \in \mathbb{N}$. Po Besselovoj nejednakosti je $\lim_k (e_k|x) = 0$, što daje $(e_1|x) = 0$, a potom je $(e_k|x) = 0$, $\forall k \in \mathbb{N}$. Dakle, $x = 0$. □

Sa $\mathcal{U}(X)$ označavamo skup svih unitarnih operatora na Hilbertovom prostoru X.

2.3.8. Propozicija. *Neka je X Hilbertov prostor i $A, B \in B(X)$.*

(*a*) *Ako je $\lambda I - A$ injekcija, onda je $\lambda \in \sigma_r(A)$ ako i samo ako je $\overline{\lambda} \in \sigma_p(A^*)$.*

(*b*) *Ako su A i B unitarno ekvivalentni, tj. $\exists U \in \mathcal{U}(X)$ takav da je $B = U^* A U$, onda je $\sigma_p(A) = \sigma_p(B)$, $\sigma_c(A) = \sigma_c(B)$, $\sigma_r(A) = \sigma_r(B)$, $\sigma(A) = \sigma(B)$.*

Dokaz: (a) Slijedi iz $\overline{R(\lambda I - A)} = N(\overline{\lambda} I - A^*)^\perp$ (propozicija 2.1.3.).

(b) Vrijedi $\lambda \in \sigma_p(A)$, tj. $Ax = \lambda x$, ako i samo ako je $B(U^* x) = \lambda U^* x$. Dakle $\sigma_p(A) = \sigma_p(B)$. Tada je i $\sigma_p(A^*) = \sigma_p(B^*)$, pa po (a) imamo $\sigma_r(A) = \sigma_r(B)$. Operator $\lambda I - A$ je invertibilan ako i samo ako je operator $\lambda I - B = U^*(\lambda I - A)U$ invertibilan. To povlači $\rho(A) = \rho(B)$. Tada je i $\sigma(A) = \mathbb{C} \backslash \rho(A) = \mathbb{C} \backslash \rho(B) = \sigma(B)$. Konačno,

$$\sigma_c(A) = \sigma(A) \backslash (\sigma_p(A) \cup \sigma_r(A)) = \sigma(B) \backslash (\sigma_p(B) \cup \sigma_r(B)) = \sigma(B). \square$$

2.3.9. Teorem. *Ako je $U \in \mathcal{U}(X)$ onda vrijedi $\sigma(U) \subseteq \{\lambda \in \mathbb{C}; |\lambda| = 1\}$.*

Dokaz: Za unitaran operator vrijedi $\|U\| = \|U^*\| = 1$. Odatle imamo $\sigma(U) \subseteq \{\lambda \in \mathbb{C}; |\lambda| \leq 1\}$ i $\sigma(U^*) \subseteq \{\lambda \in \mathbb{C}; |\lambda| \leq 1\}$. No, $\sigma(U) = \sigma((U^{-1})^{-1}) = \sigma((U^*)^{-1}) \subseteq \{\frac{1}{\lambda} \in \mathbb{C}; |\lambda| \leq 1\} = \{\lambda \in \mathbb{C}; |\lambda| \geq 1\}$. □

2.3.10. Primjer. Neka je $\{e_n; n \in \mathbb{Z}\}$ ortonormirana baza u Hilbertovom prostoru X. Definiramo $V \in B(X)$ sa

$$Vx = \sum_{n \in \mathbb{Z}} (x|e_n)e_{n+1}, \ \forall x \in X. \tag{2.17}$$

Lako se vidi da je V^* definiran sa $V^*x = \sum_{n\in\mathbb{Z}}(x|e_n)e_{n-1}$, $\forall x \in X$. Odatle imamo $VV^* = V^*V = I$, tj. V je unitaran operator kojeg nazivamo **dvostrani pomak** ili **bilateralni šift**.

2.3.11. Propozicija. *Za spektar operatora dvostrukog pomaka V vrijedi $\sigma(V) = \sigma_c(V) = \{\lambda \in \mathbb{C}; |\lambda| = 1\}$.*

Dokaz: Neka je $\lambda \in \mathbb{C}$, $|\lambda| = 1$. Tada je $\lambda I - V$ injekcija. Naime, $(\lambda I - V)x = 0$ povlači $Vx = \lambda x$, a odatle je $\lambda(x|e_k) = (x|e_{k-1})$, $\forall k \in \mathbb{Z}$. Sada za $k > 0$ imamo $(x|e_k) = \overline{\lambda}(x|e_{k-1}) = \overline{\lambda}^k(x|e_0)$. Iz Besselove nejednakosti slijedi $0 = \lim_n |(x|e_k)| = |(x|e_0)|$, a onda je $(x|e_k) = 0$, $\forall k \geq 0$. Analogno, za $k > 0$ imamo $(x|e_k) = \lambda(x|e_{k+1}) = \lambda^{-k}(x|e_0) = 0$, pa je $x = 0$. Dakle, $\sigma_p(V) = \emptyset$.

Analogno, $\sigma_p(V^*) = \emptyset$ povlači $\sigma_r(V) = \emptyset$, Dakle, $\sigma(V) = \sigma_c(V)$.

Ako je $\lambda \in \mathbb{C}$, $|\lambda| = 1$, onda $\lambda I - V$ nije surjekcija. Doista, $e_0 \notin R(\lambda I - V)$. U suprotnom slučaju bi postojao $x \in X$ takav da je $e_0 = (\lambda I - V)x$. Sada za $k \neq 0$ imamo $0 = (e_0|e_k) = ((\lambda I - V)x|e_k) = \lambda(x|e_k) - (x|e_{k-1})$. Kao i u prethodnom koraku zaključujemo $(x|e_k) = 0$, $\forall k \in \mathbb{Z}$, pa je $x = 0$, što vodi na kontradikciju da je $e_0 = 0$.

Prema tome, $\{\lambda \in \mathbb{C}; |\lambda| = 1\} \subseteq \sigma_c(V)$. □

2.3.12. Definicija. Neka je X unitaran prostor. Za operator $A : X \to X$ kažemo da je **simetričan** ako vrijedi

$$(Ax|y) = (x|Ay), \ \forall x, y \in X. \tag{2.18}$$

Očito je simetričan operator linearan.

2.3.13. Teorem. *Neka je X unitaran prostor i $A \in B(X)$ simetričan. Onda je*

$$\|A\| = \sup\{|(Ax|x)|; x \in X, \|x\| = 1\}. \tag{2.19}$$

Dokaz: Označimo sa M desnu stranu u (2.19). Prema propoziciji 2.1.1. je $M \leq \|A\| = \sup\{|(Ax|y)|\,;\, x, y \in X,\ \|x\| \leq 1, \|y\| \leq 1\}$.

Za $x, y \in X$, $\|x\| \leq 1, \|y\| \leq 1$, imamo

$$(A(x+y)|x+y) - (A(x-y)|x-y) = 4\mathrm{Re}\,(Ax|y).$$

Odatle je

$$4|\mathrm{Re}\,(Ax|y)| \leq |(A(x+y)|x+y)| + |(A(x-y)|x-y)| \leq$$

$$\leq M\|x+y\|^2 + M\|x-y\|^2 = M(2\|x\|^2 + 2\|y\|^2) \leq 4M,$$

što daje

$$|\mathrm{Re}\,(Ax|y)| \leq M,\ \forall x, y \in X,\ \|x\| \leq 1, \|y\| \leq 1.$$

Za bilo koje $x, y \in X$, $\|x\| \leq 1$, $\|y\| \leq 1$, izaberimo $\lambda \in \mathbb{C}$, $|\lambda| = 1$, tako da je $(Ax|y) = \lambda|(Ax|y)|$. Tada je $|(Ax|y)| = \overline{\lambda}(Ax|y) = (Ax|\lambda y) = |\mathrm{Re}\,(Ax|\lambda y)| \leq M$, odakle pomoću propozicije 2.1.1. dobijemo $\|A\| \leq M$. □

2.3.14. Korolar. *Neka je $A \in B(X)$ simetričan operator. Ako vrijedi $(Ax|x) = 0$, $\forall x \in X$, onda je $A = 0$.*

2.3.15. Korolar. *Za operator $A \in B(X)$ vrijedi $\|A^*A\| = \|A\|^2$.*

2.3.16. Teorem. *Neka je X Hilbertov prostor i $H \in B(X)$ hermitski operator. Tada vrijedi*

(*a*) $\sigma(H) \subset \mathbb{R}$.

(*b*) $\sigma_r(H) = \emptyset$.

(*c*) *Ako je $\lambda \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$, onda je $\|R(H,\lambda)\| \leq \frac{1}{|\mathrm{Im}\,\lambda|}$.*

(*d*) *Za $m = \inf\{(Hx|x); \|x\| = 1\}$ i $M = \sup\{(Hx|x); \|x\| = 1\}$ vrijedi $m, M \in \sigma(H)$ i $\sigma(H) \subseteq [m, M]$.*

Dokaz: (1) Ako je $\lambda \in \sigma_p(H)$, onda postoji $e \in X$, $\|e\| = 1$, i $He = \lambda e$. Vrijedi $\lambda = \lambda(e|e) = (\lambda e|e) = (He|e) = (e|He) = (e|\lambda e) = \overline{\lambda}(e|e) = \overline{\lambda}$, pa je $\sigma_p(H) \subseteq \mathbb{R}$.

(2) Ako $\lambda \notin \sigma_p(H)$ onda je $\overline{R(\lambda I - H)} = X$. Posebno, $\sigma_r(H) = \emptyset$.

Naime, $y \perp R(\lambda I - H)$ povlači $y \in N(\overline{\lambda} I - H)$. Kada bi bilo $y \neq 0$ vrijedilo bi $\overline{\lambda} \in \sigma_p(H)$, a onda $\overline{\lambda} = \lambda$ daje $\lambda \in \sigma_p(H)$, što je kontradikcija s pretpostavkom.

(3) Dokažimo da je $\lambda \in \rho(H)$ ako i samo ako postoji $d > 0$ takav da je $d\|x\| \leq \|(\lambda I - H)x\|$, $\forall x \in X$.

Ako je $\lambda \in \rho(H)$ onda postoji $d > 0$ takav da je $\|(\lambda I - H)^{-1}\| \leq \frac{1}{d}$, pa slijedi $d\|x\| = d\|(\lambda I - H)^{-1}(\lambda I - H)x\| \leq \|(\lambda I - H)x\|$.

Obratno, ako postoji $d > 0$ takav da je $d\|x\| \leq \|(\lambda I - H)x\|$, $\forall x \in X$, onda slijedi da je $\lambda I - H$ injekcija, dakle $\lambda \notin \sigma_p(H)$. Tada je, prema (2), $R(\lambda I - H)$ gusto u X. Neka je $T : R(\lambda I - H) \to X$ inverz od $\lambda I - H$. Za $y \in R(\lambda I - H)$, $y = (\lambda I - H)x$, imamo $\|Ty\| = \|x\| \leq \frac{1}{d}\|(\lambda I - H)x\| = \frac{1}{d}\|y\|$. Dakle, T je ograničen pa ga možemo proširiti do $S \in B(X)$. Tada je $S(\lambda I - H) = I_X$, i $(\lambda I - H)T = I_{R(\lambda I - H)}$ povlači $(\lambda I - H)S = I_X$, dakle $\lambda \in \rho(H)$.

(4) Dokažimo (c) i (a). Neka je $\lambda \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$. Tada za svaki $x \in X$ imamo $(Hx - \lambda x|x) - (x|Hx - \lambda x) = (\overline{\lambda} - \lambda)\|x\|^2$, a odatle $|\overline{\lambda} - \lambda|\|x\|^2 \leq 2\|x\|\|(\lambda I - H)x\|$, odnosno $|\mathrm{Im}\,\lambda|\|x\| \leq \|(\lambda I - H)x\|$. Prema (3) je $\lambda \in \rho(H)$. Dakle, $\sigma(H) \subset \mathbb{R}$.

Nadalje, slijedi $|\mathrm{Im}\,\lambda|\|R(H, \lambda)x\| \leq \|x\|$, $\forall x \in X$, tj. $\|R(H, \lambda)\| \leq \frac{1}{|\mathrm{Im}\,\lambda|}$.

(5) Dokažimo da je $\sigma(H) \subseteq [m, M]$.

Neka je $d > 0$ po volji i $\lambda = M + d$. Za $x \in X$ imamo $((H - \lambda I)x|x) = (Hx|x) - \lambda(x|x) \leq (M - \lambda)\|x\|^2 = -d\|x\|^2$. Imamo $d\|x\|^2 \leq -((H - \lambda I)x|x) \leq |((H - \lambda I)x|x)| \leq \|x\|\|(H - \lambda I)x\|$, tj. $d\|x\| \leq \|(H - \lambda I)x\|$. Dakle, $\lambda \in \rho(H)$.

Neka je $d > 0$ po volji i $\lambda = m - d$. Za $x \in X$ imamo $((H - \lambda I)x|x) = (Hx|x) - \lambda(x|x) \geq (m - \lambda)\|x\|^2 = d\|x\|^2$, tj. $d\|x\| \leq \|(H - \lambda I)x\|$. Dakle, $\lambda \in \rho(H)$.

(6) Dokazujemo da je $m, M \in \sigma(H)$.

Pretpostavimo prvo da je $0 \leq m \leq M$. Tada je $M = \|H\|$. Neka je $(x_n)_n$ takav niz da vrijedi $\|x_n\| = 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$ i $M = \lim_n(Hx_n|x_n)$. Tada imamo $\|Hx_n - Mx_n\|^2 = \|Hx_n\|^2 + M^2 - 2M(Hx_n|x_n) \leq 2M^2 - 2M(Hx_n|x_n) \xrightarrow{n\to\infty} 0$. Prema (3) je $M \in \sigma(H)$.

Ako je H bilo koji hermitski operator, tada je $H' = H - mI$ isto hermitski i za njega je $m' = 0$, $M' = M - m$, pa po prethodnom imamo $M' \in \sigma(H') = \sigma(H) - m$, dakle $M \in \sigma(H)$.

Sada je $-m \in \sigma(-H) = -\sigma(H)$, pa je $m \in \sigma(H)$. □

2.3.17. Teorem. *Neka je X Hilbertov prostor i $A \in B(X)$.*

(*a*) *A je normalan operator ako i samo ako vrijedi $\|Ax\| = \|A^*x\|$, $\forall x \in X$.*

(*b*) *Ako je A normalan operator onda je $\nu(A) = \|A\|$.*

(*c*) *Ako je A normalan operator onda je $\sigma_r(A) = \emptyset$.*

Dokaz: (a) Neka je A normalan operator. Tada je $\|Ax\|^2 = (Ax|Ax) = (A^*Ax|x) = (AA^*x|x) = (A^*x|A^*x) = \|A^*x\|^2$, $\forall x \in X$.

Obratno, neka je $\|Ax\| = \|A^*x\|$, $\forall x \in X$. Tada za operator $H = AA^* - A^*A$ imamo $(Hx|x) = \|A^*x\|^2 - \|Ax\|^2 = 0$, $\forall x \in X$. Prema korolaru 2.3.14. je $H = 0$.

(b) Ako je A normalan operator onda prema (a) i korolaru 2.3.15. imamo $\|A^2x\| = \|AAx\| = \|A^*Ax\|$, $\forall x \in X$. Tada je $\|A^2\| = \|A\|^2$. Odatle indukcijom slijedi $\|A^{2^k}\| = \|A\|^{2^k}$, $\forall k \in \mathbb{N}$. Sada imamo $\nu(A) = \lim_n \|A^n\|^{\frac{1}{n}} = \lim_k \|A^{2^k}\|^{\frac{1}{2^k}} = \|A\|$.

(c) Neka je A normalan operator. Ako je $\lambda \in \mathbb{C}$ i $\lambda I - A$ injekcija, onda je prema (a) i $(\lambda I - A)^*$ injekcija. Odatle imamo $\{0\} = N((\lambda I - A)^*) = R(\lambda I - A)^{\perp}$, pa je $\overline{R(\lambda I - A)} = X$. Sada, ako je $\lambda \in \sigma(A)$ onda je $\lambda \in \sigma_c(A)$. □

2.3.18. Korolar. *Za normalan operator A i polinom p je*

$$\|p(A)\| = \max\{|p(\lambda)|; \lambda \in \sigma(A)\}.$$

Dokaz: $p(A)$ je normalan pa je $\|p(A)\| = \nu(p(A)) = \max\{|\mu|; \mu \in \sigma(p(A))\} = \max\{|\mu|; \mu \in p(\sigma(A))\} = \max\{|p(\lambda)|; \lambda \in \sigma(A)\}$. □

Neka je X Banachov prostor, $A \in B(X)$ i $Y \leq X$ zatvoren $A-$invarijantan potprostor, te neka je $B = A|_Y \in B(Y)$. U konačno dimenzionalnom slučaju vrijedi $\sigma(B) \subseteq \sigma(A)$. Općenito to nije istina, Naprimjer, ako je A operator dvostranog pomaka na separabilnom Hilbertovom prostoru s ortonormiranom bazom $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ i B operator jednostranog pomaka kao restrikcija operatora A na potprostor razapet s $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$, tada je $\sigma(B) \nsubseteq \sigma(A)$. Primijetimo da tada ipak vrijedi inkluzija $\partial\sigma(B) \subseteq \partial\sigma(A)$, gdje je $\partial S = \overline{S} \cap (\overline{\mathbb{C}\backslash S})$ rub skupa S.

2.3.19. Definicija. Neka je X Banachov prostor nad $\mathbb{C}$ i $A \in B(X)$.

(1) $\rho_\infty(A)$ je neograničena komponenta od $\rho(A)$.

(2) $\eta\sigma(A) = \mathbb{C}\backslash\rho_\infty(A)$ je tzv. **potpuni spektar** od A.

(3) $\sigma_a(A) = \{\lambda \in \mathbb{C}; \inf\{\|(\lambda I - A)x\|; \|x\| = 1\} = 0\}$ je tzv. **aproksimativni spektar** od A.

2.3.20. Propozicija. *Neka je X Banachov prostor nad $\mathbb{C}$ i $A \in B(X)$. Tada je $\sigma_a(A)$ zatvoren skup i $\sigma_p(A) \subseteq \sigma_a(A)$, $\sigma_c(A) \subseteq \sigma_a(A)$, $\sigma_a(A) \subseteq \sigma(A)$, tj. $\sigma(A) = \sigma_a(A) \cup \sigma_r(A)$.*

Ako je X Hilbertov prostor i A normalan operator, onda je $\sigma_a(A) = \sigma(A)$.

Dokaz: Prvo dokažimo zatvorenost skupa $\sigma_a(A)$. Neka je $\lambda_0 \in \mathbb{C}\backslash\sigma_a(A)$. Tada postoji $m > 0$ takav da vrijedi $\|(\lambda_0 I - A)x\| \geq m\|x\|$, $\forall x \in X$.

Neka je $\lambda \in K(\lambda_0, \frac{m}{2})$, tj. $|\lambda - \lambda_0| < \frac{m}{2}$. Tada je $\forall x \in X$, $\|(\lambda I - A)x\| = \|(\lambda_0 I - A)x - (\lambda_0 - \lambda)x\| \geq \|(\lambda_0 I - A)x\| - |\lambda_0 - \lambda|\|x\| > m\|x\| - \frac{m}{2}\|x\| = \frac{m}{2}\|x\|$. Odatle slijedi $\lambda \in \mathbb{C}\backslash\sigma_a(A)$. Dakle, $K(\lambda_0, \frac{m}{2}) \subseteq \mathbb{C}\backslash\sigma_a(A)$. tj. $\mathbb{C}\backslash\sigma_a(A)$ je otvoren skup.

Inkluzija $\sigma_a(A) \subseteq \sigma(A)$ je očigledna.

Neka je $\lambda_0 \in \mathbb{C}\backslash(\sigma_a(A) \cup \sigma_r(A))$. Neka je $m > 0$ takav da vrijedi

$$\|(\lambda I - A)x\| \geq m\|x\|, \forall x \in X. \tag{2.20}$$

Dokažimo da je $R(\lambda I - A)$ zatvoren potprostor. Neka je $y \in \overline{R(\lambda I - A)}$ i neka je $(x_n)_n$ niz u X takav da je $y = \lim_n(\lambda I - A)x_n$. Prema (2.20) je $(x_n)_n$ Cauchyjev niz u X, dakle konvergentan. Za $x = \lim_n x_n$ imamo $y = (\lambda I - A)x$, dakle $y \in R(\lambda I - A)$.

Zbog $\lambda \notin \sigma_r(A)$ vrijedi $R(\lambda I - A) = X$. Zbog (2.20) je $\lambda I - A$ injekcija. Dakle, $\lambda I - A$ je bijekcija. Sada iz (2.20) za svaki $y \in X$, $y = (\lambda I - A)x$, imamo $\|(\lambda I - A)^{-1}y\| = \|x\| \leq \frac{1}{m}\|(\lambda I - A)x\| = \frac{1}{m}\|y\|$. Dakle, $(\lambda I - A)^{-1}$ je ograničen, pa je $\lambda \in \mathbb{C}\backslash\sigma(A)$. $\square$

2.3.21. Propozicija. *Za $A \in B(X)$ vrijedi $\partial\sigma(A) \subseteq \sigma_a(A)$. Posebno je $\sigma_a(A) \neq \emptyset$.*

Dokaz: Neka je $\lambda \in \partial\sigma(A)$. Tada postoji niz $(\lambda_n)_n$ u $\rho(A)$ takav da je $\lambda = \lim_n \lambda_n$. Stavimo $B = \lambda I - A$ i $B_n = \lambda_n I - A$. Tada su B_n regularni operatori koji konvergiraju k singularnom operatoru B. Dokažimo da je $\sup\{\|B_n^{-1}\|; n \in \mathbb{N}\} = \infty$.

Pretpostavimo da vrijedi suprotno, tj. $\|B_n^{-1}\| \leq M < \infty$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Sada, za svaki $x \in X$ vrijedi $\frac{1}{M}\|x\| = \frac{1}{M}\|B_n^{-1}B_n x\| \leq \|B_n x\|$. Odatle slijedi $\|Bx\| \geq \frac{1}{M}\|x\|$, tj. B je injekcija. Također je $R(B)$ gust u X. Naime, za $y \in X$ stavimo $x_n = B_n^{-1}y$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Tada je $\|Bx_n - y\| = \|Bx_n - B_n x_n\| \leq \|B - B_n\|\|x\| \leq \|B - B_n\|M\|y\| \xrightarrow{n\to\infty} 0$. Štoviše, tada vrijedi $R(B) = X$. Za dokaz te činjenice uzmimo bilo koji $y \in X$ i neka je za $y_n = Bx_n$, $n \in \mathbb{N}$, niz $(y_n)_n$ takav da vrijedi $y = \lim_n y_n$. Tada je zbog $\|y_n - y_m\| \geq M\|x_n - x_m\|$ niz $(x_n)_n$ Cauchyjev, a onda i konvergentan u X. Za $x = \lim_n x_n$ vrijedi $Bx = y$, tj. $R(B) = X$. Sada je $B^{-1} : X \to X$ ograničen, a to je u kontradikciji s pretpostavkom.

Dakle, postoji podniz $(B_{p_n})_n$ takav da je $\|B_{p_n}^{-1}\| \geq 2n$, a odatle za svaki $n \in \mathbb{N}$ postoji $x_n \in X$, $\|x_n\| = 1$, takav da je $\|B_{p_n}^{-1}x_n\| \geq n$. Stavimo $y_n = \frac{1}{\|B_{p_n}^{-1}x_n\|}B_{p_n}^{-1}x_n$, pa imamo $\|y_n\| = 1$ i

$$\|(\lambda I - A)y_n\| = \|(\lambda - \lambda_{p_n})y_n + B_{p_n}y_n\| \leq |\lambda - \lambda_{p_n}| + \frac{1}{\|B_{p_n}^{-1}x_n\|} \leq |\lambda - \lambda_{p_n}| + \frac{1}{n},$$

a odatle je $\lim_n \|(\lambda I - A)y_n\| = 0$, tj. $\lambda \in \sigma_a(A)$. $\square$

2.3.22. Teorem. *Neka je X kompleksan Banachov prostor, $A \in B(X)$, $Y \leq X$ zatvoren $A-$invarijantan potprostor i $B = A|_Y \in B(Y)$. Vrijedi*

(a) $\partial\sigma(B) \subseteq \sigma(A)$.

(b) $\sigma(B) \cap \rho(A) \subseteq \sigma_r(B)$.

(c) $\sigma(B) \subseteq \eta\sigma(A)$.

Dokaz: (a) Očito je $\sigma_a(B) \subseteq \sigma_a(A)$. Zbog propozicije 2.3.21. slijedi $\partial\sigma(B) \subseteq \sigma_a(B) \subseteq \sigma_a(A) \subseteq \sigma(A)$.

(b) Za $\lambda \in \sigma(B) \cap \rho(A)$ vrijedi $\lambda \notin \sigma_a(A)$, a odatle $\lambda \notin \sigma_a(B)$. Sada po propoziciji 2.3.20. imamo $\lambda \in \sigma_r(B)$.

(c) Neka je $\lambda \in \sigma(B) \cap \rho_\infty(A)$ i neka je Γ poligonalni put u $\rho_\infty(A)$ od λ do $1 + \|A\|$. Kako je $\lambda \in \sigma(B)$ to je $\sigma(B) \cap \Gamma \neq \emptyset$, a onda i $\partial\sigma(B) \cap \Gamma \neq \emptyset$, što nije moguće zbog (a). Dakle, imamo $\sigma(B) \cap \rho_\infty(A) = \emptyset$, tj. vrijedi (c). $\square$

2.3.23. Korolar. *Neka je X kompleksan Banachov prostor, $A \in B(X)$, $Y \leq X$ zatvoren $A-$invarijantan potprostor i $B = A|_Y \in B(Y)$.*

Ako je ρ neka ograničena komponenta povezanosti od $\rho(A)$, onda je ili $\rho \subseteq \sigma(B)$ ili $\rho \cap \sigma(B) = \emptyset$.

Dokaz: Neka je $\rho \cap \sigma(B) \neq \emptyset$. Kada bi bilo $\rho \not\subseteq \sigma(B)$, zbog povezanosti od ρ, imali bi $\rho \cap \partial\sigma(B) \neq \emptyset$, no to je nemoguće po teoremu 2.3.22.(a). $\square$

2.3.24. Propozicija. *Neka je X Banachov prostor i $A \in B(X)$. Operator A je singularan ako i samo ako postoji niz operatora $(A_n)_n$ u $B(X)$ takav da je $\|A_n\| = 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$, i vrijedi $\lim_n AA_n = 0$ ili $\lim_n A_nA = 0$.*

Dokaz: Ako takav niz postoji, A mora biti singularan, jer bi u suprotnom slučaju vrijedilo $\lim_n A_n = 0$, što je nemoguće zbog $\|A_n\| = 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Obratno, pretpostavimo da je A singularan. Sada, za $x \in X$ i $f \in X'$ definiramo operator $T_{f,x} \in B(X)$ sa $T_{f,x}(y) = f(y)x$, $\forall y \in X$. Tada je $\|T_{f,x}\| = \sup\{|f(y)|\|x\|; \|y\| = 1\} = \|f\|\|x\|$.

U slučaju kada je $0 \in \sigma_p(A)$ postoji $x \in N(A)$, $x \neq 0$, i postoji $f \in X'$ takav da je $f(x) \neq 0$. Sada je $AT_{f,x}y = Af(y)x = f(y)Ax = 0$, $\forall y \in X$, tj. $AT_{f,x} = 0$. Za stacionarni niz $A_n = \frac{1}{\|f\|\|x\|}T_{f,x}$ vrijedi $AA_n = 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

U slučaju kada je $0 \notin \sigma_p(A)$ i $\overline{R(A)} \neq X$ postoji $f \in X'$, $\|f\| = 1$, takav da je $f|_{R(A)} = 0$. Tada je $f(Ay) = 0$, $\forall y \in X$. Sada za $x \in X$, $\|x\| = 1$, i $\forall y \in X$ vrijedi $T_{f,x}Ay = f(Ay)x = 0$, pa odatle zaključujemo $T_{f,x}A = 0$ i $\|T_{f,x}\| = 1$, tj. za stacionarni niz $A_n = \frac{1}{\|f\|\|x\|}T_{f,x}$ vrijedi $A_nA = 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Promatrajmo slučaju kada je $0 \notin \sigma_p(A)$ i $\overline{R(A)} = X$. Tada ne postoji $m > 0$ takav da je $\|Ax\| \geq m\|x\|$, $\forall x \in X$. Dakle, $\forall n \in \mathbb{N}$, postoji $x_n \in X$, $\|x_n\| = 1$, takav da je $\|Ax_n\| < \frac{1}{n}$. Neka je $f \in X'$, $\|f\| = 1$, i stavimo $A_n = T_{f,x}$. Tada je $\|A_n\| = 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$, i za $y \in X$ je $\|AA_ny\| = \|f(y)Ax_n\| \leq \frac{1}{n}|f(y)| \leq \frac{1}{n}\|y\|$. Odatle zaključujemo $\|AA_n\| \leq \frac{1}{n}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, tj. $\lim_n AA_n = 0$. $\square$

2.3.25. Propozicija. *Neka je X kompleksan Banachov prostor i $S = \{A \in B(X); \sigma_p(A) \neq \emptyset\}$. Tada je skup S gust u $B(X)$.*

Dokaz: Neka je $A \in B(X)$. Prema propoziciji 2.3.21. je $\sigma_a(A) \neq \emptyset$, pa postoji $\lambda \in \sigma_a(A)$. Tada postoji niz $(x_n)_n$ u X takav da je $\|x_n\| = 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$, i $\lim_n(\lambda I - A)x_n = 0$. Neka je $f_n \in X'$, $\|f_n\| = 1$, $f_n(x_n) = 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Sada, $\forall n \in \mathbb{N}$ definiramo $A_nx = Ax + f_n(x)(\lambda I - A)x_n$, $\forall x \in X$. Vrijedi $\lambda \in \sigma_p(A_n)$, $\forall n \in \mathbb{N}$, i $\lim A_n = A$. $\square$

2.4 Teoremi o uniformnoj ograničenosti

U ovom dijelu dokazat ćemo nekoliko teorema o ekvivalentnosti više vrsta ograničenosti i neke važne posljedice tih teorema.

2.4.1. Teorem. *Neka je X normiran prostor i $S \subseteq X$. Tada je S uniformno ograničen (tj. $\sup\{\|x\|; x \in S\} < \infty$) ako i samo ako je S slabo ograničen (tj. $\sup\{|f(x)|; x \in S\} < \infty$, $\forall f \in X'$).*

2.4.2. Teorem. *Neka je X Banachov prostor i $S \subseteq X'$. Tada je S uniformno ograničen (tj. $\sup\{\|f\|; f \in S\} < \infty$) ako i samo ako je S slabo ograničen (tj. $\sup\{|f(x)|; f \in S\} < \infty$, $\forall x \in X$).*

2.4.3. Teorem. *Neka je X Banachov prostor, Y normiran prostor i $S \subseteq B(X,Y)$. Slijedeće tvrdnje su međusobno ekvivalentne:*

(a) *S je uniformno ograničen (tj. $\sup\{\|A\|; A \in S\} < \infty$).*

(b) *S je jako ograničen (tj. $\sup\{\|Ax\|; A \in S\} < \infty$, $\forall x \in X$).*

(c) *S je slabo ograničen (tj. $\sup\{|f(Ax)|; A \in S\} < \infty$, $\forall x \in X$, $\forall f \in Y'$).*

Za dokaz prethodnih teorema trebamo tzv. Baireov teorem. Prvo uvodimo nekoliko topoloških pojmova.

2.4.4. Definicija. Neka je X topološki prostor. $A \subseteq X$ je **rijedak** skup u X ako je nutrina zatvarača skupa A prazan skup, tj. $\mathrm{int}(\overline{A}) = \emptyset$ ili $X \backslash \overline{A}$ gust u X.

2.4.5. Definicija. Neka je X topološki prostor. Skup $A \subseteq X$ je **prve kategorije** u X ako je A unija prebrojivo mnogo skupova rijetkih u X. Ako A nije prve kategorije u X, onda kažemo da je **druge kategorije** u X.

2.4.6. Lema. *Neka je X potpun metrički prostor, A_n, $n \in \mathbb{N}$, zatvoreni podskupovi od X rijetki u X. Tada je $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \neq X$.*

Dokaz: Stavimo $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ i $U_n = X\backslash A_n$, $n \in \mathbb{N}$.

Skup A_1 je rijedak u X, pa je U_1 neprazan otvoren skup u X koji sadrži zatvorenu kuglu $\overline{K}(x_1, r_1)$ radijusa $r_1 \leq 1$. A_2 je rijedak u X te ne sadrži niti jednu kuglu. Stoga je $U_2 \cap K(x_1, r_1) \neq \emptyset$ otvoren skup pa sadrži zatvorenu kuglu $\overline{K}(x_2, r_2)$ radijusa $r_2 \leq \frac{1}{2}$. Nastavimo li na taj način dolazimo do padajućeg niza zatvorenih kugala

$$\overline{K}(x_1, r_1) \supseteq \overline{K}(x_2, r_2) \supseteq \cdots \supseteq \overline{K}(x_n, r_n) \supseteq \cdots$$

s radijusima $r_n \leq \frac{1}{n}$.

Za $p, q \geq n$ imamo $x_p, x_q \in \overline{K}(x_n, r_n)$ pa je $d(x_p, x_q) \leq \frac{2}{n}$. Dakle, $(x_n)_n$ je Cauchyjev niz u X i neka je $x = \lim_n x_n$. Kako je $x_p \in \overline{K}(x_n, r_n)$, $\forall p \geq n$, vrijedi $x \in \overline{K}(x_n, r_n)$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Odatle zaključujemo da $x \notin A_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$, odnosno $x \notin A$. $\square$

2.4.7. Teorem. *(Baire) Neka je X potpun metrički prostor i U neprazan otvoren podskup od X. Tada je U druge kategorije u X.*

Dokaz: Prvo dokazujemo slučaj $U = X$. Pretpostavimo da je $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$, $\mathrm{int}(\overline{A_n}) = \emptyset$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Tada je i $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \overline{A}_n$, $\mathrm{int}(\overline{A_n}) = \emptyset$, $\forall n \in \mathbb{N}$, što je u suprotnosti s tvrdnjom leme 2.4.6.

Neka je sada $U = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$, $\mathrm{int}(\overline{A}_n) = \emptyset$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Neka je K zatvorena kugla sadržana u U. Tada je $K = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} K \cap A_n$, $\mathrm{int}(K \cap A_n) \subseteq \mathrm{int}\overline{A}_n = \emptyset$, $\forall n \in \mathbb{N}$, što je suprotno prethodno dokazanom slučaju, jer je K potpun metrički prostor. $\square$

2.4.8. Korolar. *Neka je X potpun metrički prostor i U_n, $n \in \mathbb{N}$, gusti otvoreni skupovi u X. Tada je $A = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n$ gust podskup u X.*

Dokaz: Pretpostavimo suprotno, tj. neka postoji $x \in X$ i $r > 0$ takav da je $A \cap \overline{K}(x,r) = \emptyset$. Tada je $\overline{K}(x,r) = \overline{K}(x,r) \backslash A = \overline{K}(x,r) \backslash \bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (\overline{K}(x,r)\backslash U_n)$. Dakle, za $F_n = \overline{K}(x,r)\backslash U_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$, imamo $\overline{K}(x,r) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n$. Kako je $\overline{K}(x,r)$ potpun i $F_n \subseteq \overline{K}(x,r)$, $\forall n \in \mathbb{N}$, zatvoreni skupovi, to prema teoremu 2.4.7. postoji $m \in \mathbb{N}$ takav da je $\mathrm{int} F_m \neq \emptyset$, tj. postoje $y \in F_m$ i $\varepsilon > 0$ takvi da je $K(y,\varepsilon) \subseteq F_m$, odnosno $K(y,\varepsilon) \cap U_m = \emptyset$, što nije moguće zbog gustoće od U_m. □

2.4.9. Korolar. *Neka je X potpun metrički prostor i A_n, $n \in \mathbb{N}$, skupovi prve kategorije u X. Tada je skup $B = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} (X\backslash A_n)$ gust podskup u X i on je druge kategorije u X.*

Dokaz: Pretpostavimo da B nije gust u X. Tada postoji kugla $K(x,r) \subseteq X$ takva da je $K(x,r) \cap B = \emptyset$. Odatle je $K(x,r) \subseteq X\backslash B = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$, a to je nemoguće jer je $K(x,r)$ druge kategorije. Dakle, $\overline{B} = X$. Nadalje je $X = B \cup (X\backslash B) = B \cup \left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right)$, pa B ne može biti skup prve kategorije u X. □

2.4.10. Propozicija. *Neka su X i Y normirani prostori, $S \subseteq B(X,Y)$ i $X_0 \subseteq X$ skup druge kategorije u X takav da je* $\sup\{\|Ax\|; A \in S\} < \infty$, $\forall x \in X_0$. *Tada je skup S uniformno ograničen, tj.* $\sup\{\|A\|; A \in S\} < \infty$.

Dokaz: Za $A \in S$ i $n \in \mathbb{N}$ stavimo $G(A,n) = \{x \in X; \|Ax\| \leq n\}$. To su zatvoreni skupovi, pa je za svaki $n \in \mathbb{N}$ zatvoren i skup

$$F_n = \bigcap_{A\in S} G(A,n) = \{x \in X; \|Ax\| \leq n, \forall A \in S\}.$$

Vrijedi $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n = \{x \in X; \sup\{\|Ax\|; A \in S\} < \infty\}$, dakle $X_0 \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n$.

Kako je X_0 druge kategorije u X, to postoji $m \in \mathbb{N}$ takav da je F_m druge kategorije, tj. postoji zatvorena kugla $\overline{K}(x_0,r) \subseteq \overline{F}_m = F_m$. Dakle, postoji $m \in \mathbb{N}$, $x_0 \in X$ i $r > 0$ takvi da $x \in \overline{K}(x_0,r)$ povlači $\|Ax\| \leq m$, $\forall A \in S$.

Ako je $\|x\| \leq r$, onda je $x_0 - x \in \overline{K}(x_0,r)$ pa vrijedi $\|A(x-x_0)\| = \|A(x_0-x)\| \leq m$, $\forall A \in S$. Dakle, $\|x\| \leq r$ povlači $\|Ax\| = \|A(x-x_0)\| + \|Ax_0\| \leq 2m$, $\forall A \in S$.

Za bilo koji $x \in X$, $x \neq 0$, stavimo $y = \frac{r}{\|x\|}x$ pa je $\|y\| = r$. Sada za svaki $A \in S$ vrijedi $\|Ay\| \leq 2m$, a odatle imamo $\|Ax\| \leq \frac{\|x\|}{r}\|Ay\| \leq \frac{2m}{r}\|x\|$. Dakle, $\|A\| \leq \frac{2m}{r}$, $\forall A \in S$. □

Dokaz teorema 2.4.2. U propoziciji 2.4.10. uzmemo $X_0 = X$ i $Y = \mathbb{K}$. □

Dokaz teorema 2.4.1. Neka je $\kappa : X \to X''$ kanonsko ulaganje X u X'' definirano sa $[\kappa(x)](f) = f(x)$, $\forall f \in X'$, $\forall x \in X$. Promatramo $\kappa(S) \subseteq X''$.

Po pretpostavci je $\sup\{|[\kappa(x)](f)|; x \in S\} = \sup\{|f(x)|; x \in S\} < \infty$, $\forall f \in X'$. Prema teoremu 2.4.2. slijedi $\sup\{\|\kappa(x)\|; x \in S\} < \infty$. Ali $\|\kappa(x)\| = \|x\|$, $\forall x \in X$ daje $\sup\{\|x\|; x \in S\} < \infty$. □

Dokaz teorema 2.4.3. Da (b)⇒(a) slijedi iz propozicije 2.4.10.

Za dokaz (c)⇒(b) fiksirajmo $x \in X$ i stavimo $S' = \{Ax; A \in S\}$. Po pretpostavci (c) je $\sup\{|g(y)|; y \in S'\} < \infty$, $\forall g \in Y'$. Prema teoremu 2.4.1. slijedi $\sup\{\|y\|; y \in S'\} < \infty$. Stoga je $\sup\{\|Ax\|; A \in S\} < \infty$, $\forall x \in X$. □

2.4.11. Teorem. (Mazur-Orlicz) *Neka su X, Y i Z normirani prostori i $A : X \times Y \to Z$ bilinearan operator takav da je $x \mapsto A(x, y)$ neprekidno preslikavanje sa X u Z, $\forall y \in Y$, i da je $y \mapsto A(x, y)$ neprekidno preslikavanje sa Y u Z, $\forall x \in X$. Ako je X ili Y potpun, onda je A neprekidno preslikavanje.*

Dokaz: Pretpostavimo da je X Banachov prostor i označimo sa $K = \{y \in Y; \|y\| \leq 1\}$ zatvorenu kuglu u Y. Za $x \in X$ je $y \mapsto A(x, y)$ neprekidno preslikavanje, dakle iz $B(Y, Z)$. Neka je $M(x)$ njegova norma, tj. $\|A(x, y)\| \leq M(x)$, $\forall y \in K$.

Za $y \in K$ definiramo $A_y \in B(X, Z)$ sa $A_y x = A(x, y)$, $\forall x \in X$. Prema ranijem je $\sup\{\|A_y x\|; y \in K\} < \infty$, $\forall x \in X$. Po teoremu 2.4.3. postoji $M > 0$ takav da je $\|A_y\| \leq M$, $\forall y \in K$.

Dakle, $\|x\| \leq 1$ i $\|y\| \leq 1$ povlači $\|A(x, y)\| \leq M$. Odatle je $\|A(x, y)\| \leq M\|x\|\|y\|$, $\forall x \in X$, $\forall y \in Y$. □

2.5 Teorem o otvorenom preslikavanju

Želimo dokazati tri osnovna teorema o linearnim operatorima na Banachovim prostorima.

Prvi je teorem o otvorenom preslikavanju ili Banachov teorem o homomorfizmu.

2.5.1. Teorem. *Neka su X i Y Banachovi prostori i $A : X \to Y$ neprekidna linearna surjekcija. Tada je A otvoreno preslikavanje.*

Posljedica prethodnog teorema je Banachov teorem o inverznom operatoru.

2.5.2. Teorem. *Neka su X i Y Banachovi prostori i $A : X \to Y$ neprekidna linearna bijekcija. Tada je $A^{-1} \in B(Y, X)$.*

Slijedeći teorem karakterizira neprekidnost linearnog operatora pomoću grafa i naziva se teorem o zatvorenom grafu.

2.5.3. Teorem. *Neka su X i Y Banachovi prostori i $A \in L(X,Y)$. Operator A je neprekidan ako i samo ako je graf $\Gamma(A) = \{(x, Ax) \in X \times Y; x \in X\}$ zatvoren potprostor od $X \times Y$ (s normom $\|(x,y)\| = \|x\| + \|y\|$).*

Prvo dokazujemo lemu koja daje topološku pozadinu za dokaz prethodnih teorema.

2.5.4. Lema. *Neka su X i Y normirani prostori, $A \in B(X,Y)$ takav da je $R(A) = AX$ skup druge kategorije u Y. Tada za svaki $r > 0$ postoji $\rho > 0$ takav da je $K_Y(0,\rho) \subseteq \overline{AK_X(0,r)}$.*

Dokaz: Označimo sa $U = K_X(0,r)$ zadanu kuglu u prostoru X i stavimo $W = K_X(0, \frac{r}{2}) \subset X$. Tada $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} nW$ povlači $R(A) = \bigcup_{n=1}^{\infty} nAW$. Budući da je $R(A)$skup druge kategorije u Y, barem jedan od zatvorenih skupova $\overline{nAW}$ sadrži neprazan otvoren skup. Dakle, skup $\overline{AW}$ sadrži neku kuglu $K_Y(y_0, \rho)$, $\rho > 0$, prostora Y. Stavimo $V = K_Y(0,\rho)$ i imamo

$$V = K_Y(y_0,\rho) - y_0 \subseteq \overline{AW} - y_0 \subseteq \overline{AW} - \overline{AW} \subseteq \overline{A(W-W)} \subseteq \overline{AU}. \qquad \square$$

Dokažimo teorem koji je nešto općenitiji od teorema 2.5.1.

2.5.5. Teorem. *Neka je X Banachov prostor, Y normiran prostor, $A \in B(X,Y)$ i $B \in B(X, R(A))$ takav da je $Bx = Ax$, $\forall x \in X$.*

Tada vrijedi točno jedna od slijedećih tvrdnji:

(*a*) *$R(A)$ je Banachov prostor i B otvoreno preslikavanje sa X na $R(A)$.*

(*b*) *$R(A)$ je skup prve kategorije u $\overline{R(A)}$.*

Dokaz: Pretpostavimo da je $R(A)$ skup druge kategorije u normiranom prostoru $\overline{R(A)}$ i dokažimo da tada vrijedi tvrdnja (a).

Budući da je $R(A)$ druge kategorije u $\overline{R(A)}$, onda po lemi 2.5.4. primjenjenoj na operator $B \in B(X, \overline{R(A)})$, za bilo koji $\varepsilon_0 > 0$ postoji $\eta_0 > 0$ takav da je kugla $V(\eta_0) = K_Y(0,\eta_0)$ sadržana u $\overline{AU(\varepsilon_0)}$, gdje je $U(\varepsilon_0) = K_X(0,\varepsilon_0)$. Dokažimo da je tada kugla $V(\eta_0) = K_Y(0,\eta_0)$ sadržana u slici malo veće kugle $U(2\varepsilon_0)$, tj.

$$V(\eta_0) \subseteq AU(2\varepsilon_0). \tag{2.21}$$

U tu svrhu uzmimo niz $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ strogo pozitivnih realnih brojeva takvih da je $\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n < \varepsilon_0$. Za kuglu $U(\varepsilon_1)$, prema lemi 2.5.4. postoji broj $0 < \eta_1 < \eta_0$

i kugla $V(\eta_1)$ takva da je $V(\eta_1) \subseteq \overline{AU(\varepsilon_1)}$. Nadalje, za $\varepsilon_2 > 0$ postoji $0 < \eta_2 < \eta_1$ takav da je $V(\eta_2) \subseteq \overline{AU(\varepsilon_2)}$, itd. Tim postupkom možemo naći strogo padajući niz $(\eta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ takav da je $\lim_n \eta_n = 0$ i

$$V(\eta_n) \subseteq \overline{AU(\varepsilon_n)},\ n \in \mathbb{Z}_+.$$

Za dokaz (2.21) uzmimo $y \in V(\eta_0)$ bilo koji. Zbog $V(\eta_0) \subseteq \overline{AU(\varepsilon_0)}$ postoji $x_0 \in U(\varepsilon_0)$ takav da je $\|y - Ax_0\| < \eta_1$. Odavde je $y - Ax_0 \in V(\eta_1) \subset \overline{AU(\varepsilon_1)}$, pa postoji $x_1 \in U(\varepsilon_1)$ takav da je $\|(y - Ax_0) - Ax_1\| < \eta_2$, itd. Tako dolazimo do niza $(x_n)_n$ u X, $x_n \in U(\varepsilon_n)$ i

$$\|y - Az_n\| < \eta_{n+1},\ n \in \mathbb{Z}_+, \tag{2.22}$$

gdje je $z_n = \sum_{k=0}^{n} x_k$. Zbog potpunosti prostora X i $\|x_n\| < \varepsilon_n$, $n \in \mathbb{Z}_+$, red $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ konvergira k nekom vektoru $x \in X$. Tada vrijedi

$$\|x\| = \lim_n \|z_n\| \leq \lim_n \sum_{k=0}^{n} \varepsilon_k = \varepsilon_0 + \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n < 2\varepsilon_0,$$

što daje $x \in U(2\varepsilon_0)$. Neprekidnost operatora A i $x = \lim_n z_n$ povlače $Ax = \lim_n Az_n$. Sada iz (2.22), zbog $\lim_n \eta_n = 0$, imamo $y = Ax$, tj. vrijedi (2.21).

Iz (2.21) i homogenosti operatora A slijedi da je B surjekcija sa X na $\overline{R(A)}$, dakle vrijedi $R(A) = \overline{R(A)}$. Nadalje, za svaku kuglu U oko nule u X postoji kugla V oko nule u $\overline{R(A)}$ takva da je $V \subseteq BU$.

Neka je G otvoren skup u X i $y \in AG$. Tada je $y = Ax$ za neko $x \in G$, pa postoji kugla U oko nule u X takva da je $x + U \subseteq G$. Neka je V kugla oko nule u $\overline{R(A)}$ takva da je $V \subseteq AU$. Tada $G \supseteq x + U$ povlači

$$AG \supseteq A(x + U) = Ax + AU \supseteq Ax + V = y + V.$$

Dakle, skup AG zajedno s elementom y sadrži i kuglu $y + V$ oko y. To znači da je AG otvoren skup, odnosno da je B otvoreno preslikavanje.

Preslikavanje B faktoriziramo kroz Banachov prostor $X/N(A)$ tako da je $B = \tilde{B} \circ \pi$. Dokažimo da je $\tilde{B}$ neprekidno preslikavanje. Ako je V otvoren skup u $\overline{R(A)}$, onda je $U = B^{-1}V$ otvoren u X. Zbog otvorenosti kanonske projekcije π je skup $W = \pi U$ otvoren u $X/N(A)$ i $\tilde{B}W = V$, tj. $\tilde{B}$ je neprekidan operator.

Operator $\tilde{B}$ je po konstrukciji bijekcija, ali je i otvoreno preslikavanje. Za otvoren skup $W \subseteq X/N(A)$ je skup $U = \pi^{-1}W$ otvoren u X, pa je zbog otvorenosti preslikavanja B i skup $V = BU = \tilde{B}W$ otvoren u $\overline{R(A)}$.

Budući da je $\tilde{B}$ otvorena bijekcija, to je $\tilde{B}^{-1}$ neprekidan operator. Tada je $\tilde{B}$ izomorfizam Banachovog prostora $X/N(A)$ i normiranog prostora $R(A)$.

To povlači da je $R(A)$ potpun prostor. $\square$

Dokaz teorema 2.5.1. Neka je A neprekidna surjekcija s Banachovog prostora X na Banachov prostor Y. Prema Baireovom teoremu 2.4.7. je Banachov prostor Y druge kategorije. Teorem 2.5.5. i $R(A) = Y$ povlači da je $A = B$ otvoreno preslikavanje sa X na Y. $\square$

Dokaz teorema 2.5.2. Ako je A neprekidna bijekcija s Banachovog prostora X na Banachov prostor Y, onda je prema teoremu 2.5.1. A otvoreno preslikavanje. Tada je A^{-1} neprekidan operator, pa je A izomorfizam prostora X i Y. $\square$

Dokaz teorema 2.5.3. Neka je A linearno preslikavanje Banachovog prostora X u Banachov prostor Y takvo da je njegov graf $\Gamma(A)$ zatvoren potprostor Banachovog prostora $X \times Y$. Tada je $\Gamma(A)$ Banachov prostor. Neka je P_1 kanonska projekcija sa $X \times Y$ na X i P_2 kanonska projekcija sa $X \times Y$ na Y, tj. $P_1(x, y) = x$ i $P_2(x, y) = y$, $\forall (x, y) \in X \times Y$.

Neka je $P = P_1|_{\Gamma(A)}$ restrikcija projekcije P_1 na graf od A definirana sa $P(x, Ax) = x$, $\forall x \in X$. Očigledno je P bijekcija sa $\Gamma(A)$ na X. Po teoremu 2.5.2. je P^{-1} neprekidan operator sa X na $\Gamma(A)$. Vrijedi $Ax = P_2(x, Ax) = P_2(P^{-1}x) = (P_2 \circ P^{-1})x$, $\forall x \in X$, pa je $A = P_2 \circ P^{-1}$. Zbog neprekidnosti operatora P_2 i P^{-1} je i operator A neprekidan. $\square$

2.5.1 Neke posljedice teorema o otvorenom preslikavanju

2.5.6. Korolar. *Neka su $\|\cdot\|$ i $|\!|\!|\cdot|\!|\!|$ dvije norme na vektorskom prostoru X i neka su $(X, \|\cdot\|)$ i $(X, |\!|\!|\cdot|\!|\!|)$ Banachovi prostori.*

Ako postoji konstanta $C > 0$ takva da vrijedi

$$|\!|\!|x|\!|\!| \leq C\|x\|, \forall x \in X, \tag{2.23}$$

onda su te dvije norme ekvivalentne, tj. postoji konstanta $c > 0$ takva da vrijedi $c\|x\| \leq |\!|\!|x|\!|\!| \leq C\|x\|$, $\forall x \in X$.

Dokaz: Zbog (2.23) je jedinični operator I ograničen operator s Banachovog prostora $(X, \|\cdot\|)$ na Banachov prostor $(X, |\!|\!|\cdot|\!|\!|)$. Tada teorem 2.5.2. daje neprekidnost inverznog operatora I^{-1} sa $(X, |\!|\!|\cdot|\!|\!|)$ na $(X, \|\cdot\|)$. Odatle slijedi egzistencija konstante $M > 0$ takve da je $\|x\| \leq M|\!|\!|x|\!|\!|$, $\forall x \in X$. Sada slijedi tvrdnja za $c = \frac{1}{M}$. $\square$

2.5.7. Korolar. *Ako je Banachov prostor X direktna suma zatvorenih potprostora X_1 i X_2, onda su Banachovi prostori X/X_1 i X_2 (topološki) izomorfni, tj. postoji invertibilan linearan operator sa X/X_1 na X_2.*

Dokaz: Restrikcija $p = \pi|_{X_2}$ kanonskog preslikavanja $\pi : X \to X/X_1$ na potprostor X_2 je linearna bijekcija sa X_2 na X/X_1 i $\|p\| \leq \|\pi\| \leq 1$. Prema teoremu 2.5.2. preslikavanje p^{-1} je neprekidno, tj. X/X_1 i X_2 su izomorfni. $\square$

2.5.8. Korolar. *Neka je X Banachov prostor i X_k $(k = 1, \ldots, n)$ zatvoreni potprostori takvi da je X njihova direktna suma, tj. $X = X_1 \dot{+} X_2 \dot{+} \cdots \dot{+} X_n$. Tada su Banachovi prostori $X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n$ i X izomorfni.*

Dokaz: Sa $\|(x_1, x_2, \ldots, x_n)\| = \|x_1\| + \|x_2\| + \cdots + \|x_n\|$ je dana norma na prostoru $X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n$. Preslikavanje $A : (x_1, x_2, \ldots, x_n) \mapsto x_1 + x_2 + \cdots + x_n$ je neprekidna linearna bijekcija prostora $X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n$ i X. $\square$

2.5.9. Korolar. *Ako su X_k $(k = 1, \ldots, n)$ zatvoreni potprostori Banachovog prostora X takvi da je $X = X_1 \dot{+} X_2 \dot{+} \cdots \dot{+} X_n$, onda su projektori $P_k : X \to X_k$ za koje je $R(P_k) = X_k$, $P_k|_{X_i} = 0$ za $k \neq i$ $(k, i = 1, \ldots, n)$ neprekidni.*

Dokaz: Označimo $P = P_2 + \cdots + P_n$ i dokažimo da je graf $\Gamma(P_1)$ zatvoren skup. Neka je $((x_k, P_1 x_k))_k$ niz u $\Gamma(P_1)$ i $(x_k, P_1 x_k) \to (x_0, y_0)$. Tada $x_k \to x_0$ i $P_1 x_k \to y_0$ pa $x_k = P_1 x_k + P x_k$ povlači da niz $(P x_k)_k$ konvergira nekom vektoru $u_0 \in PX = X_2 \dot{+} \cdots \dot{+} X_n$. Iz $x_0 = y_0 + u_0$ i $y_0 \in X_1$, $u_0 \in X_2 \dot{+} \cdots \dot{+} X_n$ slijedi $y_0 = P_1 x_0$. Dakle $(x_k, P_1 x_k) \to (x_0, P_1 x_0)$, što pokazuje da je graf $\Gamma(P_1)$ zatvoren skup. Analogno se dokazuje zatvorenost grafova projektora $P_2, \ldots, P_n$. Tvrdnja korolara slijedi iz teorema 2.5.3. $\square$

2.5.10. Korolar. *Zatvoren potprostor Y Banachovog prostora X ima zatvoren direktni komplement ako i samo ako postoji neprekidan linearan projektor $P : X \to X$ takav da je $R(P) = PX = Y$.*

Dokaz: Ako je $P \in B(X)$ projektor i $R(P) = Y$, onda su potprostori $X_1 = R(P)$ i $X_2 = R(I - P)$ zatvoreni i $X = X_1 \dot{+} X_2$.

Obratno, ako je $X = Y + X_2$ i Y, X_2 zatvoreni potprostori, onda je prema korolaru 2.5.9. projektor sa X na $X_1 = Y$ neprekidan. $\square$

2.5.11. Propozicija. (E. Hellinger - O. Toeplitz) *Ako je A simetričan operator na Hilbertovom prostoru X, onda je A ograničen operator.*

Dokaz: Za simetričan operator vrijedi $(Ax|y) = (x|Ay), \forall x, y \in X$. Dokažimo da je graf $\Gamma(A)$ zatvoren. Neka je $((x_n, Ax_n))_n$ niz u $\Gamma(A)$ takav da $(x_n, Ax_n) \to (u, v)$, tj. $x_n \to u$ i $Ax_n \to v$. Za bilo koji $y \in X$ vrijedi

$$(Au - v|y) = (A(u - x_n)|y) + (Ax_n - v|y) = (u - x_n|Ay) + (Ax_n - v|y) \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

što daje $(Au - v|y) = 0$, $\forall y \in X$. Dakle, $v = Au$, tj. $\Gamma(A)$ je zatvoren. $\square$

2.5.12. Definicija. Familija operatora $\{A_j; j \in \mathcal{J}\}$ operatora je **totalna familija operatora** u prostoru $B(X, Y)$, ako je nulvektor jedini vektor u X na kojem se poništavaju svi elementi familije, tj.

$$(\forall j \in \mathcal{J}, A_j x = 0) \Rightarrow (x = 0).$$

Familija operatora je totalna ako i samo ako vrijedi $\bigcap_{j\in\mathcal{J}} N(A_j) = \{0\}$.

2.5.13. Propozicija. *Neka su X, Y_1, Y_2 Banachovi prostori i $\{A_j; j \in \mathcal{J}\}$ totalna familija operatora u prostoru $B(Y_1, Y_2)$. Ako je $A : X \to Y_1$ linearan operator i ako je za svako $j \in \mathcal{J}$ operator $A_j A : X \to Y_2$ neprekidan, onda je A neprekidan operator.*

Dokaz: Dokažimo da je graf $\Gamma(A)$ operatora A zatvoren skup u Banachovom prostoru $X \times Y_1$. Neka je $((x_n, Ax_n))_n$ niz u $\Gamma(A)$ takav da $(x_n, Ax_n) \to (x, y)$, tj. $x_n \to x$ i $Ax_n \to y$. Zbog neprekidnosti operatora A_j, $\forall j \in \mathcal{J}$, vrijedi da $Ax_n \to y$ povlači $A_j Ax_n \to A_j y$. S druge strane je $A_j A$ neprekidan $\forall j \in \mathcal{J}$, pa $x_n \to x$ povlači $A_j Ax_n \to A_j Ax$. Zbog jedinstvenosti limesa niza imamo $A_j Ax = A_j y$, $\forall j \in \mathcal{J}$. Odavde je $y = Ax$, pa je graf $\Gamma(A)$ zatvoren, a onda po teoremu 2.5.3. slijedi neprekidnost operatora A. $\square$

2.5.14. Korolar. *Neka su X i Y Banachovi prostori, $A : X \to Y$ linearan operator i $\{g_j; j \in \mathcal{J}\}$ totalna familija u Y'. Ako je $g_j \circ A$ neprekidan funkcional $\forall j \in \mathcal{J}$, onda je A neprekidan operator.*

Dokaz: Slijedi iz propozicije 2.5.13. za $Y_1 = Y$ i $Y_2 = \mathbb{K}$. $\square$

2.5.15. Korolar. *Neka je X Banachov prostor, Y Hilbertov prostor i $\{e_j; j \in \mathcal{J}\}$ ortonormirana baza u Y. Ako je $A : X \to Y$ linearan operator i ako je za svako $j \in \mathcal{J}$ funkcional $f_j \in X'$ zadan sa $f_j(x) = (Ax|e_j)$, $\forall x \in X$, neprekidan, onda je operator A neprekidan.*

Dokaz: Za svako $j \in \mathcal{J}$ je sa $g_j(y) = (y|e_j)$, $\forall y \in Y$, definiran funkcional $g_j \in Y'$. Familija $\{g_j; j \in \mathcal{J}\}$ je totalna familija u Y'. Po pretpostavci je za svako $j \in \mathcal{J}$ funkcional $f_j = g_j \circ A \in X'$. Tada je prema korolaru 2.5.14. A neprekidan operator. □

2.6 Kompaktni operatori

2.6.1. Definicija. Neka je X normiran prostor. Kažemo da je podskup $S \subseteq X$ **relativno kompaktan** u X, ako je $\overline{S}$ kompaktan skup u X.

Skup $S \subseteq X$ je relativno kompaktan u X ako i samo ako svaki niz u S ima konvergentan podniz u X.

U slučaju Banachovog prostora X, $S \subseteq X$ je relativno kompaktan u X ako i samo ako za svaki $\varepsilon > 0$ postoji konačan skup $\{x_1. \dots, x_n\} \subseteq X$ takav da je $S \subseteq \bigcup_{k=1}^{n} K(x_k, \varepsilon) \subseteq X$. Skup $\{x_1, \dots, x_n\}$ je $\varepsilon-$mreža za S.

Svaki relativno kompaktan skup u normiranom prostoru je ograničen.

2.6.2. Definicija. Neka su X i Y normirani prostori. Kažemo da je operator $A : X \to Y$ **kompaktan operator** ako je skup $\{Ax; x \in X, \|x\| \leq 1\}$ relativno kompaktan u Y. Skup svih takvih operatora označavamo s $K(X,Y)$.

Operator $A : X \to Y$ je kompaktan ako i samo ako za svaki ograničen niz $(x_n)_n$ u X postoji podniz niza $(Ax_n)_n$ koji je konvergentan u Y.

2.6.3. Propozicija. *Neka su X, Y i Z normirani prostori. Vrijedi:*

(*a*) *$K(X,Y)$ je potprostor od $B(X,Y)$.*

(*b*) *$B(Y,Z)K(X,Y) \subseteq K(X,Z)$ i $K(Y,Z)B(X,Y) \subseteq K(X,Z)$.*

Dokaz: (a) Norma je neprekidna funkcija pa je ograničena na relativno kompaktnom skupu. Dakle, vrijedi $K(X,Y) \subseteq B(X,Y)$. Za $A \in K(X,Y)$ i $\lambda \in \mathbb{K}$ je očito $\lambda A \in K(X,Y)$. Nadalje, neka su $A, B \in K(X,Y)$. Dokažimo da je skup $\{Ax + Bx; x \in X, \|x\| \leq 1\}$ relativno kompaktan u Y, tj. za svaki niz $(x_n)_n$, $\|x_n\| \leq 1$, u X niz $(Ax_n + Bx_n)_n$ ima konvergentan podniz u Y. Kako je A kompaktan operator, to postoji podniz $(y_n)_n$ niza $(x_n)_n$ takav da je $(Ay_n)_n$ konvergentan, a zbog kompaktnosti od B postoji podniz $(z_n)_n$ niza

$(y_n)_n$ takav da je $(Bz_n)_n$ konvergentan. Tada je $(Az_n + Bz_n)_n$ konvergentan podniz niza $(Ax_n + Bx_n)_n$.

(b) Neka su $A \in K(X,Y)$ $B \in B(Y,Z)$ i neka je $(x_n)_n$, $\|x_n\| \leq 1$, niz u $K_X(0,1)$. Zbog kompaktnosti od A postoji podniz $(u_n)_n$ od $(x_n)_n$ takav da je niz $(Au_n)_n$ konvergentan u Y. Kako je B ograničen, to je niz $(BAu_n)_n$ konvergentan u Z, tj. $BA \in K(X,Z)$.

Neka su $A \in B(X,Y)$ $B \in K(Y,Z)$ i neka je $(x_n)_n$ ograničen niz u X. Tada je i niz $(Ax_n)_n$ ograničen u Y. Kako je B kompaktan operator, niz $(BAx_n)_n$ ima konvergentan podniz, tj. $BA \in K(X,Z)$. □

2.6.4. Propozicija. *Neka su X, Y i Z normirani prostori.*

(*a*) *Ako je X ili Y konačne dimenzije onda je $K(X,Y) = B(X,Y)$.*

(*b*) *$I_X \in B(X)$ je kompaktan ako i samo ako je X konačno dimenzionalan.*

(*c*) *Ako je X beskonačno dimenzionalan prostor i $A \in K(X)$, onda je A singularan operator, tj. $0 \in \sigma(A)$.*

Dokaz: (a) Ako je Y konačne dimenzije onda je svaki ograničen skup u Y relativno kompaktan, pa je $K(X,Y) = B(X,Y)$.

Neka je X konačne dimenzije i $A \in B(X,Y)$. Ako je $(x_n)_n$ bilo koji niz u $\overline{K}_X(0,1)$, koji je kompaktan, onda postoji njegov konvergentan podniz $(x_{p_n})_n$. Tada je $(Ax_{p_n})_n$ konvergentan u Y, tj. $A \in K(X,Y)$.

(b) Posljedica Rieszovog teorema 1.3.17.

(c) Neka je $A \in K(X)$. Kada bi A bio regularan, postojao bi $B \in B(X)$ takav da vrijedi $BA = I$. Tada bi po propoziciji 2.6.4.(1) vrijedilo $I \in K(X)$, što prema (b) povlači da je X konačne dimenzije. □

2.6.5. Propozicija. *Neka je X normiran i Y Banachov prostor. Tada je $K(X,Y)$ zatvoren potprostor od $B(X,Y)$.*

Dokaz: Neka je $K = \overline{K}_X(0,1) = \{x \in X; \|x\| \leq 1\}$ zatvorena kugla u X i $(A_n)_n$ niz u $K(X,Y)$ takav da je $A = \lim_n A_n \in B(X,Y)$. Pokažimo da je $A \in K(X,Y)$.

Neka je $\varepsilon > 0$ po volji. Zbog $\lim_n \|A_n - A\| = 0$ postoji $n \in \mathbb{N}$ takav da je $\|A_n - A\| < \frac{\varepsilon}{3}$. Pošto je A_nK relativno kompaktan skup u Y, to postoji skup $\{x_1, \ldots, x_m\} \subseteq K$ takav da je $\{A_nx_1, \ldots, A_nx_m\}$ $\frac{\varepsilon}{3}$−mreža za skup A_nK.

Za $x \in K$ je $A_nx \in A_nK$ pa postoji $j \in \{1, \ldots, m\}$ takav da je $\|A_nx - A_nx_j\| < \frac{\varepsilon}{3}$. Vrijedi

$$\|Ax - Ax_j\| \leq \|(A - A_n)x\| + \|A_nx - A_nx_j\| + \|(A_n - A)x_j\| < \varepsilon.$$

Dakle $\{Ax_1, \ldots, Ax_m\}$ je $\varepsilon-$mreža za skup AK. $\square$

2.6.6. Teorem. *Neka je X normiran prostor, $A \in K(X)$ i $\lambda \neq 0$ skalar.*

(*a*) *Za svaki $n \in \mathbb{N}$ je $N_n = N((\lambda I - A)^n)$ konačne dimenzije. Postoji $n \in \mathbb{N}$ takav da je $N_n = N_{n+1}$.*

(*b*) *Za svaki $n \in \mathbb{N}$ je $R_n = R((\lambda I - A)^n)$ zatvoren potprostor. Postoji $n \in \mathbb{N}$ takav da je $R_n = R_{n+1}$.*

(*c*) *Ako su $n, m \in \mathbb{N}$ najmanji takvi da je $N_n = N_{n+1}$ i $R_m = R_{m+1}$, tada je $n = m$ i $X = N_n \dot{+} R_n$.*

(*d*) *Neka je $n = m$ kao u (c). Tada je $(\lambda I - A)|_{R_n}$ regularan operator na R_n.*

Dokaz: Zbog $\lambda I - A = \lambda(I - \frac{1}{\lambda}A)$ možemo pretpostaviti da je $\lambda = 1$ i stavimo $T = I - A$.

(a) Imamo $U_n = I - T^n = I - \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} (-1)^j A^j = \sum_{j=1}^{n} \binom{n}{j} (-1)^{j+1} A^j = A\left(\sum_{j=0}^{n-1} (-1)^j \binom{n}{j+1} A^j\right) \in K(X)$.

Zbog $U_n|_{N_n} = I_{N_n}$ imamo I_{N_n} kompaktan operator pa je N_n konačne dimenzije.

Pretpostavimo da je $N_n \subset N_{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Tada za svaki $n \in \mathbb{N}$ postoji $e_n \in N_{n+1}$, $\|e_n\| = 1$, i $d(e_n, N_n) \geq 1$ (Rieszova lema 1.3.15.). Za $m < n$ je $z = Te_n - Te_m + e_m = e_n - Ae_n + Ae_m \in N_n$. Naime, vrijedi $T^n z = T^{n+1} e_n - T^{n+1} e_m + T^n e_m = 0$. Odatle imamo $\|Ae_m - Ae_n\| = \|z - e_n\| \geq d(e_n, N_n) \geq 1$. Dakle, niz $(Ae_n)_n$ nema konvergentan podniz, što je kontradikcija s $A \in K(X)$.

(b) Neka je $y \in \overline{R_n}$. Tada postoji niz $(x_k)_k$ u X takav da je $y = \lim_k T^n x_k$.Tvrdimo da je niz $(d_k)_k = (d(x_k, N_n))_k$ ograničen.

U suprotnom bi, prijelazom na podniz, mogli tvrditi da je $\lim_k d_k = \infty$. Stavimo $z_k = \frac{1}{d_k} x_k$. Tada je $d(z_k, N_n) = 1$, $\forall k \in \mathbb{N}$. Tada za svaki $k \in \mathbb{N}$ postoji $u_k \in N_n$ takav da je $\|z_k - u_k\| \leq 2$. Stavimo $v_k = z_k - u_k$ i dobijemo ograničen niz $(v_k)_k$. Tada niz $(U_n v_k)_k$ ima konvergentan podniz (možemo uzeti da je sam niz konvergentan). Neka je $v = \lim_k U_n v_k$. Vrijedi $v_k = I v_k = T^n v_k + U_n v_k = T^n z_k + U_n v_k = \frac{1}{d_k} T^n x_k + U_n v_k$, pa imamo $\lim_n v_k = v$. Odatle je $d(v, N_n) = \lim_k d(v_k, N_n) = \lim_k d(z_k, N_n) = \lim_k \frac{1}{d_k} d(x_k, N_n) = 1$. Ali $T^n v = v - U_n v = v - \lim_k U_n v_k = 0$, tj. $v \in N_n$, odnosno $d(v, N_n) = 0$, što je kontradikcija.

Dakle, niz $(d_k)_k$ je ograničen, tj. postoji $M > 0$ takav da je $d_k = d(x_k, N_n) \leq M$, $\forall k \in \mathbb{N}$. Sada za svaki $k \in \mathbb{N}$ postoji $x'_k \in X$, $x_k - x'_k \in N_n$, $\|x'_k\| \leq 1 + M$. Niz $(x'_k)_k$ je ograničen, pa niz $(U_n x'_k)_k$ ima konvergentan podniz (možemo uzeti da je sam niz konvergentan). Stavimo $a = \lim_k U_n x'_k$ i $y = \lim_k T^n x_k = \lim_k T^n x'_k$. Odatle je $\lim_k x'_k = \lim_k T^n x'_k + \lim_k U_n x'_k = y + a$, pa imamo $y = \lim_k T^n x'_k = T^n \lim_k x'_k = T^n(y + a) \in R_n$. Dakle, $\overline{R_n} = R_n$.

Kada bi bilo $R_{n+1} \subset R_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$, po Rieszovoj lemi 1.3.15. postoji $e_n \in R_n$, $\|e_n\| = 1$, i $d(e_n, N_{n+1}) \geq \frac{1}{2}$. Za $m > n$ je $z = Te_n - Te_m + e_m = e_n - Ae_n + Ae_m \in R_{n+1}$. Naime, vrijedi $e_n = T^n a$, $e_m = T^m b$, pa je $z = T^{n+1}(a - T^{m-n}b + T^{m-n-1}b)$.

Ali $z = e_n - Ae_n - e_m + Ae_m + e_m = e_n - Ae_n + Ae_m$ povlači $\|Ae_m - Ae_n\| = \|z - e_n\| \geq d(e_n, R_{n+1}) \geq \frac{1}{2}$, pa niz $(Ae_n)_n$ nema konvergentan podniz, što je kontradikcija s $A \in K(X)$.

(c) je tvrdnja tzv. Fittingovog teorema.

Prvo pretpostavimo da je $m = 0$, odnosno da je T surjekcija, tj. $R(T) = X$. Dokažimo da je tada i $n = 0$, tj. da je T injekcija ($N(T) = \{0\}$). U suprotnom bi postojao $x_1 \in X$, $x_1 \neq 0$, tako da je $Tx_1 = 0$. Iz $R(T) = X$ slijedi da postoji $x_2 \in X$, $x_1 = Tx_2$. Induktivno dolazimo do niza $(x_k)_k$ u X takvog da je $Tx_{k+1} = x_k$, $\forall k \in \mathbb{N}$. Odatle imamo $x_1 = T^n x_{n+1}$, pa je $T^{n+1}x_{n+1} = Tx_1 = 0$, tj. $x_{n+1} \in N_{n+1} = N_n$. No tada je $x_1 = T^n x_{n+1} = 0$, a to je kontradikcija s izborom vektora x_1.

Sada pretpostavimo da je $m > 0$. Iz $TR_m = R_{m+1} = R_m$ slijedi da je R_m invarijantan potprostor za T. Neka je $S = T|_{R_m}$ restrikcija od T na R_m i vrijedi $R(S) = R_m$, tj. $S : R_m \to R_m$ je surjekcija.

Nadalje, zbog $N(S) = N(T) \cap R_m$, vrijedi da $N(T^{n+1}) = N(T^n)$ povlači $N(S^{n+1}) = N(S^n)$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Kao u prethodnom slučaju (tj. $m = 0$ za T), zaključujemo da je S injekcija, odnosno $S : R_m \to R_m$ je bijekcija.

Neka je $x \in N_{m+1}$. Sada $y = T^m x$ povlači $Sy = Ty = T^{m+1}x = 0$, a odatle imamo $y = 0$, odnosno $x \in N_m$. Dakle, $N_{m+1} \subseteq N_m$, a onda je $N_{m+1} = N_m$. Ovim smo pokazali da je $n \leq m$.

Iz $R_m \subset R_{m-1}$ slijedi postojanje $y \in R_{m-1} \backslash R_m$ i neka je $x \in X$ takav da je $y = T^{m-1}x$. Stavimo $z = Ty = T^m x$ i imamo $z \in R_m = R_{2m} = T^m R_m$, odakle zaključujemo da postoji $u \in R_m$ takav da je $z = T^m u$. Za $v = x - u$ je $T^m v = T^m x - T^m u = z - z = 0$ i $T^{m-1}v = y - T^{m-1}u$. Nadalje, $T^{m-1}u \in R_{2m-1}$ i $y \notin R_m$ daje $T^{m-1}v \neq 0$. Dakle, $v \in N_m$ i $v \notin N_{m-1}$ povlači $N_m \neq N_{m-1}$, pa smo dokazali da je $n = m$.

Dokažimo da vrijedi $X = N_n \dot{+} R_n$. Ako je $y \in R_n \cap N_n$ onda je $y = T^n x$. No $0 = T^n y = T^{2n} x$ daje $x \in N_{2n} = N_n$, iz čega slijedi $y = 0$. Dakle,

$R_n \cap N_n = \emptyset$.

Za bilo koji $x \in X$ je $T^n x \in R_n = R_{2n} = T^n R_n$, pa postoji $u \in R_n$ takav da je $T^n x = T^n u$. Stavimo $z = x - u$, pa je $z \in N_n$, $u \in R_n$ i $x = u + z$.

(d) Za operator $S = T|_{R_n}$ iz (c) znamo da je bijekcija. Treba još dokazati da je $S^{-1} : R_n \to R_n$ ograničen operator.

Neka je $F \subseteq R_n$ zatvoren skup. Tvrdimo da je tada i SF zatvoren. Neka je $y \in \overline{SF}$ i neka je $(x_k)_k$ niz u F takav da je $y = \lim_k Sx_k$. Dokažimo da je niz $(x_k)_k$ ograničen. U suprotnom slučaju bi prelaskom na podniz mogli pretpostaviti da je $\lim_k \|x_k\| = \infty$. Označimo $z_k = \frac{1}{\|x_k\|} x_k$, $\|z_k\| = 1$, i opet prelaskom na podniz možemo pretpostaviti da je $(Az_k)_k$ konvergentan niz i neka je $z = \lim_k Az_k$. Vrijedi $z_k = (I - A)z_k + Az_k = \frac{1}{\|x_k\|} Sx_k + Az_k$, pa zbog $\lim_k Sz_k = \lim_k \frac{1}{\|x_k\|} Sx_k = 0$ imamo $\lim_k z_k = z$. Sada je $Sz = \lim_k Sz_k = 0$ pa je $z = 0$, a to je kontradikcija sa $\|z\| = \lim_k \|z_k\| = 1$.

Dakle, niz $(x_k)_k$ je ograničen. Prelaskom na podniz možemo pretpostaviti da je $(Ax_k)_k$ konvergentan i $u = \lim_k Ax_k$. Imamo $\lim_k x_k = \lim_k (I - A)x_k + \lim_k Ax_k = y + u \in F$ jer je F zatvoren, pa je $y = \lim_k Sx_k = S(y + u) \in SF$. Dakle, i SF je zatvoren.

Pokazali smo da je za svaki zatvoren skup $F \subseteq R_n$ i SF zatvoren u R_n.

Ako je $U \subseteq R_n$ otvoren, onda je $R_n \backslash U$ zatvoren, pa je $S(R_n \backslash U) = R_n \backslash SU$ zatvoren, a onda je $SU = (S^{-1})^{-1}$ otvoren skup. Dakle, S^{-1} je neprekidan, odnosno, ograničen operator. □

2.6.7. Teorem. *Neka je X beskonačno dimenzionalan kompleksan normiran prostor i $A \in K(X)$.*

(*a*) *Ako $\lambda \in \mathbb{C} \backslash \{0\}$ nije u $\sigma_p(A)$, onda je $\lambda I - A$ regularan operator, tj. $\sigma(A) = \{0\} \cup \sigma_p(A)$.*

(*b*) *$\sigma_p(A)$ je konačan ili prebrojiv s jedinim gomilištem 0.*

(*c*) *Ako je $\lambda \in \sigma_p(A)$ i $\lambda \neq 0$, onda je za sve $n \in \mathbb{N}$ potprostor $N((\lambda I - A)^n)$ konačne dimenzije.*

Dokaz: (a) Operator $\lambda I - A$ je injekcija, pa je po teoremu 2.6.6.(c) surjekcija, a po teoremu 2.6.6.(d) regularan.

(b) Neka je X beskonačne dimenzije i $\varepsilon > 0$ bilo koji. Tvrdimo da je skup $\{\lambda \in \sigma_p(A); |\lambda| \geq \varepsilon\}$ konačan. U suprotnom slučaju imamo niz različitih svojstvenih vrijednosti $(\lambda_n)_n$, $|\lambda_n| \geq \varepsilon$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Tada za svaki $n \in \mathbb{N}$ imamo $x_n \neq 0$, $Ax_n = \lambda_n x_n$. Neka su $X_n = [\{x_1, \ldots, x_n\}]$, $\dim X_n = n$, potprostori od X. Tada po Rieszovoj lemi 1.3.15. za svaki $n \in \mathbb{N}$ postoji $e_n \in X_n$, $\|e_n\| = 1$, $d(e_n, X_{n-1}) \geq 1$. Za $x \in X_n$ je $x = \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i$, pa imamo

$(\lambda_n I - A)x = \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i(\lambda_n - \lambda_i)x_i \in X_{n-1}$. Posebno, $(\lambda_n I - A)e_n \in X_{n-1}$ i $e_n \in X_n$ povlači $Ae_n \in X_n$, a odatle je $e = \lambda_n^{-1}(\lambda_n e_n - Ae_n + Ae_m) \in X_{n-1}$ za $m \leq n-1$.

Sada je $\|Ae_n - Ae_m\| = \|\lambda_n(e_n - e)\| = |\lambda_n|\|e_n - e\| \geq |\lambda_n| d(e_n, X_{n-1}) \geq |\lambda_n| \geq \varepsilon$, $\forall \in \mathbb{N}$, $n > m$. Odatle zaključujemo da niz $(Ae_n)_n$ nema konvergentan podniza, što je kontradikcija s $A \in K(X)$.

(c) slijedi iz teorema 2.6.6. □

2.6.8. Korolar. (Weylov teorem) *Neka je X Banachov prostor.*

Ako je $S \in B(X)$ i $A \in K(X)$ onda vrijedi $\sigma(S+A) \subseteq \sigma(S) \cup \sigma_p(S+A)$.

Dokaz: Za $\lambda \in \sigma(S+A)$, $\lambda \notin \sigma(S)$ je $\lambda I - S$ regularan operator. Tada je $\lambda I - (S+A) = (\lambda I - S)(I - (\lambda I - S)^{-1}A)$, pa je $I - (\lambda I - S)^{-1}A$ singularan operator. Ali $(\lambda I - S)^{-1}A$ je kompaktan operator pa je $1 \in \sigma_p((\lambda I - S)^{-1}A)$. Tada postoji $x \in X$, $x \neq 0$, takav da je $(\lambda I - S)^{-1}Ax = x$, odnosno $Ax = (\lambda I - S)x$ ili $(S+A)x = \lambda x$. Odatle imamo $\lambda \in \sigma_p(S+A)$. □

2.6.9. Korolar. (Fredholmova alternativa) *Neka je X Banachov prostor i $A \in K(X)$.*

Jednadžba $x - Ax = y$ ima jedinstveno rješenje za svaki $y \in X$, ako i samo ako jednadžba $x - Ax = 0$ ima samo trivijalno rješenje.

Dokaz: Nužnost je očigledna. Za dokaz dovoljnosti uočimo da iz injektivnosti operatora $I - A$ slijedi da $1 \notin \sigma_p(A)$, a onda $1 \notin \sigma(A)$. Tada je $I - A$ regularan operator i $x = (I - A)^{-1}y$ je jedinstveno rješenje. □

Sa $B_f(X,Y)$ označimo skup svih operatore sa X u Y konačnog ranga. Očito je to potprostor od $B(X,Y)$ i vrijedi $B(Y,Z)B_f(X,Y) \subseteq B_f(X,Z)$, $B_f(Y,Z)B(X,Y) \subseteq B_f(X,Z)$.

2.6.10. Propozicija. (*a*) *Neka su X i Y Banachovi prostori. $A \in B(X,Y)$ je konačnog ranga ako i samo ako postoje linearno nezavisni vektori $y_1, \ldots, y_n \in Y$ i linearno nezavisni funkcionali $f_1, \ldots, f_n \in X'$ takvi da je*

$$Ax = \sum_{j=1}^{n} f_j(x) y_j, \ \forall x \in X. \tag{2.24}$$

Tada je $\{y_1, \ldots, y_n\}$ baza u $R(A) = AX$.

(*b*) *Neka su X i Y Hilbertovi prostori. $A \in B(X,Y)$ je konačnog ranga ako i samo ako postoje linearno nezavisni vektori $y_1, \ldots, y_n \in Y$ i linearno* *nezavisni vektori* $x_1, \dots, x_n \in X$ *takvi da je*

$$Ax = \sum_{j=1}^{n} (x|x_j) y_j, \ \forall x \in X. \tag{2.25}$$

Tada je $\{y_1, \dots, y_n\}$ *baza u* $R(A)$ *i* $\{x_1, \dots, x_n\}$ *baza u* $R(A^*)$. *Posebno,* $A \in B_f(X,Y)$ *ako i samo ako je* $A^* \in B_f(Y,X)$, *i* $\dim R(A) = \dim R(A^*)$.

Dokaz: (a) Ako A ima prikaz (2.24) onda je on očito konačnog ranga. Nadalje, za $x_1, \dots, x_n \in X$ takve da je $f_i(x_j) = \delta_{i,j}$ $(i,j = 1, \dots, n)$, imamo $Ax_i = y_i$ $(i = 1, \dots, n)$. Dakle, $y_1, \dots, y_n \in R(A)$ i očito je $\{y_1, \dots, y_n\}$ baza od $R(A)$.

Obratno, neka je $A \in B_f(X,Y)$ i neka je $\{y_1, \dots, y_n\}$ baza od $R(A)$. Tada očito vrijedi $Ax = \sum_{j=1}^{n} f_j(x) y_j$, $\forall x \in X$ za neke linearne funkcionale $f_1, \dots, f_n$ na X. Neprekidnost funkcionala slijedi iz neprekidnosti operatora A. Dokažimo da su $f_1, \dots, f_n$ linearno nezavisni. Neka su $x_1, \dots, x_n \in X$ takve da je $Ax_j = y_j$ $(j = 1, \dots, n)$. Tada je $f_i(x_j) = \delta_{i,j}$ $(i,j = 1, \dots, n)$.

(b) Uz oznake iz (a) neka su $x_1, \dots, x_n \in X$ takve da je $f_i(x) = (x|x_i)$, $\forall x \in X$, $(i = 1, \dots, n)$. Dokažimo da je $x_1, \dots, x_n$ baza od $R(A^*)$.

Za $B \in B_f(Y,X)$ zadan sa $By = \sum_{j=1}^{n} (y|y_j) x_j$, $\forall y \in Y$, imamo $(Ax|y) = \sum_{j=1}^{n} (x|x_j)(y_j|y)$ i $(x|By) = \sum_{j=1}^{n} \overline{(y|y_j)} (x|x_j)$. Dakle, $B = A^*$. □

Očigledno je da vrijedi $B_f(X,Y) \subseteq K(X,Y)$.

2.6.11. Teorem. *Neka je* X *Banachov prostor i neka je* Y *Hilbertov prostor. Tada je* $K(X,Y) = \overline{B_f(X,Y)}$.

Dokaz: Zbog toga što je $K(X,Y)$ zatvoren po propoziciji 2.6.5., vrijedi $\overline{B_f(X,Y)} \subseteq K(X,Y)$.

Neka je $A \in K(X,Y)$. Trebamo pokazati da postoji niz $(A_n)_n$ u $B_f(X,Y)$ takav da je $\lim_n \|A_n - A\| = 0$, tj. $\forall \varepsilon > 0$, $\exists B \in B_f(X,Y)$ takav da je $\|A - B\| \leq \varepsilon$.

Neka je $K = \overline{K}_X(0,1)$ zatvorena kugla u X. AK je relativno kompaktan pa postoji konačna $\varepsilon-$mreža $\{y_1, \dots, y_n\}$ za AK. Neka je $Z = [\{y_1, \dots, y_n\}]$ i neka je P ortogonalni projektor na Z. Stavimo $B = PA$. Tada je $B \in B_f(X,Y)$ i $Bx = PAx$ je najbolja aproksimacija vektora Ax vektorom iz Z. Za dano $x \in K$ izaberimo $j \in \{1, \dots, n\}$ takav da je $\|Ax - y_j\| < \varepsilon$. Tada vrijedi $\|Ax - Bx\| \leq \|Ax - y_j\| < \varepsilon$. Dakle, $\forall x \in K$ je $\|Ax - Bx\| < \varepsilon$ pa je $\|A - B\| \leq \varepsilon$. □

2.6.12. Propozicija. *Neka su X i Y Hilbertovi prostori i $A \in B(X,Y)$.*
Vrijedi $A \in K(X,Y)$ ako i samo ako je $A^*A \in K(X)$.

Dokaz: Ako je $A \in K(X,Y)$ onda je $A^*A \in K(X)$ po propoziciji 2.6.3.(b).

Neka je $A^*A \in K(X)$ i neka je $(x_n)_n$ bilo koji niz u $K = \overline{K}_X(0,1)$. Postoji podniz $(x_{p_n})_n$ niza $(x_n)_n$ takav da $(A^*Ax_{p_n})_n$ konvergira. Zbog $\|Ax_n - Ax_m\|^2 = (A^*A(x_n - x_m)|x_n - x_m) \leq \|A^*A(x_n - x_m)\|\|x_n - x_m\| \leq 2\|A^*A(x_n - x_m)\|$ je niz $(Ax_{p_n})_n$ Cauchyjev niz u Y, pa je konvergentan. Tada je $A \in K(X,Y)$. □

2.6.13. Propozicija. *Neka su X i Y Hilbertovi prostori. Tada vrijedi $K(X,Y)^* = K(Y,X)$.*

Dokaz: Ako je $A \in K(X,Y)$ onda je $AA^* \in K(Y)$ po propoziciji 2.6.3.(b), a prema propoziciji 2.6.12. imamo $A^* \in K(Y,X)$. □

U propoziciji 2.3.3. smo pokazali da za $\{e_n; n \in \mathbb{N}\}$ ortonormiranu bazu u Hilbertovom prostoru X i $(\lambda_n)_n$ ograničen niz u $\mathbb{C}$ postoji jedinstven normalan operator $A \in B(X)$ takav da je

$$Ax = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n (x|e_n)e_n, \quad \forall x \in X. \tag{2.26}$$

Za operator A vrijedi $\sigma_p(A) = \{\lambda_n : n \in \mathbb{N}\}$, $\sigma(A) = \overline{\{\lambda_n : n \in \mathbb{N}\}}$ i $\|A\| = \sup\{|\lambda_n|; n \in \mathbb{N}\}$.

2.6.14. Teorem. *ako je $\{e_n; n \in \mathbb{N}\}$ ortonormirana baza u Hilbertovom prostoru X i $(\lambda_n)_n$ konvergentan niz u $\mathbb{C}$ takav da je $\lim_n \lambda_n = 0$, tada je normalan operator definiran sa (2.26) kompaktan, $\sigma_p(A) = \{\lambda_n : n \in \mathbb{N}\}$ i $\sigma(A) = \overline{\sigma_p(A)}$.*

Dokaz: Možemo pretpostaviti da je $\lambda_n \neq 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, i da je $|\lambda_{n+1}| \leq |\lambda_n|$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Za $n \in \mathbb{N}$ stavimo

$$A_n x = \sum_{j=1}^{n} \lambda_n (x|e_j)e_j, \quad \forall x \in X.$$

Tada su $A_n \in B_f(X)$, $\forall n \in \mathbb{N}$, i

$$\|Ax - A_n x\|^2 = \|\sum_{j=n+1}^{\infty} \lambda_j (x|e_j)e_j\|^2 = \sum_{j=n+1}^{\infty} |\lambda_j|^2 |(x|e_j)|^2 \leq$$

$$\leq |\lambda_{n+1}|^2 \sum_{j=n+1}^{\infty} |(x|e_j)|^2 \leq |\lambda_{n+1}|^2 \|x\|^2.$$

Dakle, vrijedi $\|A - A_n\| \leq |\lambda_{n+1}| \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, pa je $A \in \overline{B_f(X)} = K(X)$. $\square$

2.6.15. Teorem. *Ako je H kompaktan hermitski operator na Hilbertovom prostoru X, onda je barem jedan od brojeva $\|H\|$ ili $-\|H\|$ svojstvena vrijednost za operator H.*

Dokaz: Ako je $\|H\| = 0$ onda je tvrdnja teorema točna. Pretpostavimo da je $\|H\| > 0$. Zbog $\|H\| = \sup\{|(Hx|x)|; x \in X \|x\| = 1\}$ postoji niz $(z_n)_n$ jediničnih vektora u X takav da je $\|H\| = \lim_n |(Hz_n|z_n)|$. Budući da je $\|H\| > 0$ to možemo uzeti da je $(Hz_n|z_n) \neq 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Postoji podniz $(y_n)_n$ tako da su svi članovi niza $((Hy_n|y_n))_n$ istog predznaka i pretpostavimo da su pozitivni. Tada je $\|H\| = \lim_n (Hy_n|y_n)$. Budući da je H kompaktan operator, postoji podniz $(x_n)_n$ niza $(y_n)_n$ takav da niz $(Hx_n)_n$ konvergira u X. Neka je $x = \lim_n Hx_n$. Vrijedi

$$\|Hx_n - \|H\|x_n\|^2 = \|Hx_n\|^2 - 2\|H\|(Hx_n|x_n) + \|H\|^2 \leq$$

$$\leq 2\|H\|^2 - 2\|H\|(Hx_n|x_n) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

tj. za niz $(v_n)_n$, gdje je $v_n = Hx_n - \|H\|x_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$, vrijedi $\lim_n v_n = 0$. Zbog $x_n = \frac{1}{\|H\|}(Hx_n - v_n)$, $\forall n \in \mathbb{N}$, imamo $\lim_n x_n = \frac{1}{\|H\|}x$. Zbog $\|\frac{1}{\|H\|}x\| = \lim_n \|x_n\| = 1$ imamo $\|x\| = \|H\| > 0$, a iz $x = \lim_n Hx_n = H(\lim_n x_n) = H(\frac{1}{\|H\|}x)$ imamo $Hx = \|H\|x$. $\square$

Prema teoremu2.3.17. za normalan operator A na Hilbertovom prostoru X je $\|Ax\| = \|A^*x\|$, $\forall x \in X$. Dakle vrijedi $N(A) = N(A^*)$. Prema propoziciji 2.1.3. je $\overline{R(A)} = N(A^*)^\perp$ i $\overline{R(A^*)} = N(A)^\perp$. Dakle, ako je A normalan, onda je $Y = \overline{R(A)} = \overline{R(A^*)} = N(A)^\perp = N(A^*)^\perp$. Tada je $X = N(A) \oplus Y$, gdje je Y invarijantan zatvoren potprostor za A i A^*. Operatori $B = A|_Y$ je normalan injektivan operator na Y i $B^* = A^*|_Y$.

2.6.16. Teorem. *Operator H je hermitski operator konačnog ranga na Hilbertovom prostoru X, ako i samo ako postoje $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ i ortonormirani vektori $e_1, \ldots, e_n \in X$ takvi da je*

$$Hx = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j (x|e_j) e_j, \quad \forall x \in X.$$

Dokaz: Operator $B = H|_{R(H)}$ je hermitski operator na konačno dimenzionalnom unitarnom prostoru $R(H)$. $\square$

Do kraja ovog paragrafa A je normalan injektivan operator na Hilbertovom prostoru X. Operator $\lambda I - A$ je također normalan, pa je $N(\lambda I - A) = N(\overline{\lambda} I - A^*)$. Označimo sa $X(\lambda) = N(\lambda I - A) = \{x \in X; Ax = \lambda x\} = \{x \in X; A^*x = \overline{\lambda} x\}$ svojstveni potprostor za svojstvenu vrijednost λ.

2.6.17. Teorem. *Neka je A je normalan kompaktan injektivan operator na Hilbertovom prostoru X. Vrijedi:*

(a) Za $\lambda \neq \lambda'$ je $X(\lambda) \perp X(\lambda')$.

(b) $\sigma_p(A)$ je konačan ili prebrojiv skup.

(c) X je separabilan.

(d) $\left[\bigcup_{\lambda \in \sigma_p(A)} X(\lambda)\right]^\perp = \{0\}$.

Dokaz: (a) Za $x \in X(\lambda)$ i $y \in X(\lambda')$ je $Ax = \lambda x$ i $A^*y = \overline{\lambda'} y$. Odatle imamo $(\lambda - \lambda')(x|y) = (\lambda x|y) - (x|\overline{\lambda'} y) = (Ax|y) - (x|A^*y) = 0$, što zbog $\lambda \neq \lambda'$ povlači $(x|y) = 0$.

(b) slijedi iz teorema 2.6.7.(b).

(d) Stavimo $Y = \left[\bigcup_{\lambda \in \sigma_p(A)} X(\lambda)\right]^\perp$ i neka je $Y \neq \{0\}$. Y je zatvoren invarijantan potprostor za A i A^* pa je operator $B = A|_Y$ normalan operator na Y i $B^* = A^*|_Y$. B je različit od nule jer je B injektivan. Operator $B^*B = A^*A|_Y$ je od nule različit kompaktan hermitski operator na Y i prema teoremu 2.6.15. ima svojstvenu vrijednost različitu od nule. Pripadni svojstveni potprostor je konačne dimenzije invarijantan je za B i B^*. Tada B ima barem jednu svojstvenu vrijednost različitu od nule i pripadni svojstveni potprostor konačne dimenzije, što je kontradikcija s činjenicom da su svi svojstveni potprostori ortogonalni na Y. Dakle, $Y = \{0\}$.

(c) slijedi iz (a),(b) i (d) jer su po teoremu 2.6.7.(c) svi $X(\lambda)$ konačne dimenzije. $\square$

Slijedeći rezultat je spektralni teorem za kompaktne normalne operatore

2.6.18. Teorem. *Neka je A injektivan normalan kompaktan operator na separabilnom kompleksnom Hilbertovom prostoru X beskonačne dimenzije. Neka je $\sigma_p(A) = \{\lambda_n; n \in \mathbb{N}\}$ i neka je P_n ortogonalan projektor na potprostor*

$X(\lambda_n)$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Tada je

$$A = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n P_n \ (\textit{konvergencija po normi u } B(X)), \tag{2.27}$$

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} P_n x \quad (\textit{konvergencija po normi u } X). \tag{2.28}$$

Dokaz: Možemo uzeti da je $|\lambda_n| > |\lambda_{n+1}|$, $\forall n \in \mathbb{N}$, i neka je $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ortonormirana baza u X takva da je $\{e_j; m_{n-1}+1 \leq j \leq m_n\}$ baza svojstvenog potprostora $X(\lambda_n)$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $(m_0 = 0)$.

Za svaki $x \in X$ imamo

$$\|x - \sum_{j=1}^{n} P_j x\|^2 = \|\sum_{j=n+1}^{\infty} P_j x\|^2 = \sum_{j=n+1}^{\infty} \|P_j x\|^2 = \sum_{j=m_n+1}^{\infty} |(x|e_j)|^2 \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

pa vrijedi (2.28).

Također, za svaki $x \in X$ vrijedi $Ax = \sum_{j=1}^{\infty} AP_j x = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_j P_n x$, a odatle slijedi

$$\|(A - \sum_{j=1}^{n} \lambda_j P_j)x\|^2 = \|\sum_{j=n+1}^{\infty} \lambda_j P_j x\|^2 = \sum_{j=n+1}^{\infty} |\lambda_j|^2 \|P_j x\|^2 \leq$$

$$\leq |\lambda_{n+1}|^2 \sum_{j=n+1}^{\infty} \|P_j x\|^2 \leq |\lambda_{n+1}|^2 \|x\|^2, \quad \forall x \in X.$$

To povlači $\|A - \sum_{j=1}^{n} \lambda_j P_j\| \leq |\lambda_{n+1}|^2 \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, tj. vrijedi (2.27). □

2.7 Kompaktnost nekih integralnih operatora

Neka je K kompaktan Hausdorffov topološki prostor. Vektorski prostor $C(K) = \{f : K \to \mathbb{K};\ f \text{ neprekidna na } K\}$ je Banachov prostor s normom $\|f\| = \max\{|f(t)|; t \in K\}$.

Želimo ustanoviti upotrebljiv kriterij relativne kompaktnosti podskupa $T \subseteq C(K)$.

Sa $\delta(T)$ označimo dijametar skupa T, $\delta(T) = \sup\{\|f - g\|; f, g \in T\}$. Skup T je ograničen, ako i samo ako je $\delta(T) < \infty$.

2.7.1. Definicija. Skup T je **ekvikontinuiran u točki** $t_0 \in K$ ako za svaki $\varepsilon > 0$ postoji okolina U točke t_0 takva da vrijedi

$$\forall f \in T, \forall t \in K, ((t \in U) \Rightarrow (|f(t) - f(t_0)| < \varepsilon)).$$

T je **ekvikontinuiran** ako je ekvikontinuiran u svakoj točki iz K.

2.7.2. Teorem. (Arzelà-Ascoli) *Skup $T \subseteq C(K)$ je relativno kompaktan u Banachovom prostoru $C(K)$ ako i samo ako je T ograničen i ekvikontinuiran.*

Dokaz: (1) Neka je T ograničen i ekvikontinuiran, $(f_n)_n$ niz u T i $\varepsilon > 0$ bilo koji. Dokazat ćemo da niz $(f_n)_n$ ima podniz $(g_n)_n$ takav da je $\|g_n - g_m\| < \varepsilon$, $\forall n, m \in \mathbb{N}$.

Za svaku točku $t \in K$ postoji otvorena okolina $U(t)$ od t takva da vrijedi $|f(s) - f(t)| < \frac{\varepsilon}{3}$, $\forall s \in U(t)$ i $\forall f \in T$.

Skup K je kompaktan, pa postoje $t_1, \ldots, t_k \in K$ takve točke da je $K = U(t_1) \cup \cdots \cup U(t_k)$.

Ograničen niz $(f_n(t_1))_n$ u $\mathbb{K}$ ima konvergentan podniz $(f_{1,n}(t_1))_n$. Ograničen niz $(f_{1,n}(t_2))_n$ ima konvergentan podniz $(f_{2,n}(t_2))_n$, itd. Odatle dobijemo podniz $(g_n)_n$, $g_n = f_{k,n}$, od $(f_n)_n$ takav da su nizovi $(g_n(t_j))_n$ konvergentni za sve $j = 1, \ldots, k$. Sada postoji $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ takav da vrijedi:

$$\forall n, m \in \mathbb{N}, \forall j \in \{1, \ldots, k\}, \ \ (n, m \geq n_\varepsilon) \Rightarrow (|g_n(t_j) - g_m(t_j)| < \frac{\varepsilon}{3}).$$

Neka su sada $n, m \geq n_\varepsilon$ i $t \in K$. Izaberimo $j \in \{1, \ldots, k\}$ takav da je $t \in U(t_j)$. Slijedi

$$|g_n(t) - g_m(t)| \leq |g_n(t) - g_n(t_j)| + |g_n(t_j) - g_m(t_j)| + |g_m(t_j) - g_m(t)| < \varepsilon.$$

(2) Neka je T ograničen i ekvikontinuiran i neka je $(f_n)_n$ niz u T. Prema (1) postoji podniz $(f_{1,n})_n$ od $(f_n)_n$ takav da je $\delta(T_1) \leq 1$, gdje je $T_1 = \{f_{1,n}; n \in \mathbb{N}\}$. Nadalje, prema (1) postoji podniz $(f_{2,n})_n$ od $(f_{1,n})_n$ takav da je $\delta(T_2) \leq \frac{1}{2}$, gdje je $T_2 = \{f_{2,n}; n \in \mathbb{N}\}$. Induktivno dolazimo do niza nizova $(f_{k,n})_n$ $(k \in \mathbb{N})$ takvih da je $(f_{k+1,n})_n$ podniz od $(f_{k,n})_n$, dakle i od $(f_n)_n$ i takvih da za neprazne skupove $T_k = \{f_{k,n}; n \in \mathbb{N}\}$ vrijedi

$$T \supseteq T_0 \supseteq T_1 \supseteq \cdots \supseteq T_k \supseteq \cdots \ \text{i} \ \delta(T_k) \leq \frac{1}{2^{k-1}}, \ \forall k \in \mathbb{N}.$$

Stavimo $h_n = f_{n,n}$ i dobijemo podniz $(h_n)_n$ niza $(f_n)_n$. Nadalje, $(h_n)_{n \geq k}$ je podniz od $(f_{k,n})_n$.

Neka je $\varepsilon > 0$. Izaberimo $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ takav da je $2^{n_\varepsilon}\varepsilon > 1$. Za $p, q > n_\varepsilon$ su $h_p, h_q \in T_{n_\varepsilon + 1}$, tj. $\|h_p - h_q\| < 2^{-n_\varepsilon} < \varepsilon$. Dakle, niz $(h_n)_n$ je Cauchyjev, pa je konvergentan u $C(K)$.

(3) Pretpostavimo da je $T \subseteq C(K)$ relativno kompaktan skup. Neka je $\varepsilon > 0$ po volji i $t_0 \in K$ bilo koja točka. Neka je $\{f_1, \ldots, f_m\}$ $\frac{\varepsilon}{3}$−mreža za T. Tada je $\|f\| \leq \frac{\varepsilon}{3} + \max_{1 \leq j \leq m} \|f_j\|$, $\forall f \in T$. Dakle, skup T je ograničen.

Neka je U okolina od t_0 takva da vrijedi

$$|f_j(t) - f_j(t_0)| < \frac{\varepsilon}{3}, \ \forall t \in U, \ \forall j \in \{1, \ldots, m\}.$$

Za $f \in T$ i $t \in U$ izaberimo j tako da je $\|f - f_j\| < \frac{\varepsilon}{3}$. Slijedi

$$|f(t) - f(t_0)| \leq |f(t) - f_j(t)| + |f_j(t) - f_j(t_0)| + |f_j(t_0) - f(t_0)| < \varepsilon.$$

Dakle, T je ekvikontinuiran u točki t_0, $\forall t_0 \in K$. $\square$

U daljnjem je Δ zatvoreni n-kvadar u $\mathbb{R}^n$ (segment u $\mathbb{R}$, pravokutnik u $\mathbb{R}^2$, kvadar u $\mathbb{R}^3$, itd.). $C(\Delta)$ je Banachov prostor s normom $\|f\|_\infty = \max\{|f(t)|; t \in \Delta\}$ i unitaran (nepotpun) prostor sa skalarnim produktom $(f|g) = \int_\Delta f(t)\overline{g(t)}dt$ i vrijedi $\|f\|_2 = \sqrt{(f|f)} \leq \sqrt{\mu(\Delta)}\|f\|_\infty$.

$L_2(\Delta)$ je Hilbertov prostor koji je upotpunjenje unitarnog prostora $C(\Delta)$.

Za $k \in C(\Delta \times \Delta))$ definiramo linearan operator J_k na $C(\Delta)$ sa

$$(J_k x)(t) = \int_\Delta k(t,s)x(s)ds, \quad t \in \Delta, x \in C(\Delta). \tag{2.29}$$

2.7.3. Teorem. *Neka je $k \in C(\Delta \times \Delta))$ i J_k definiran sa (2.29). Vrijedi*

(a) *J_k je kompaktan operator s unitarnog prostora $C(\Delta)$ u Banachov prostor $C(\Delta)$.*

(b) *J_k je kompaktan operator s unitarnog prostora $C(\Delta)$ u unitaran prostor $C(\Delta)$.*

(c) *J_k se jedinstveno proširuje do ograničenog linearnog operatora $\widetilde{J}_k$ sa $L_2(\Delta)$ u Banachov prostor $C(\Delta)$. $\widetilde{J}_k$ je kompaktan i kao operator sa $L_2(\Delta)$ u Banachov prostor $C(\Delta)$ i kao operator sa $L_2(\Delta)$ u unitaran prostor $C(\Delta)$ i kao operator sa $L_2(\Delta)$ u $L_2(\Delta)$.*

(d) *Linearno preslikavanje $k \mapsto J_k$ je injektivno.*

(e) *Za $k^*(t,s) = \overline{k(s,t)}$ je $(\widetilde{J}_k x|y) = (x|\widetilde{J}_{k^*}y)$, $\forall x, y \in L_2(\Delta)$, tj. $\widetilde{J}_k^* = \widetilde{J}_{k^*}$.*

(f) *Operator J_k na unitarnom prostoru $C(\Delta)$ je simetričan ako i samo ako je operator $\widetilde{J}_k$ na Hilbertovom prostoru $L_2(\Delta)$ hermitski, a to je ako i samo ako je $k^* = k$, tj. $k(s,t) = \overline{k(t,s)}$, $\forall t, s \in \Delta$.*

Dokaz: (a) Za $t \in \Delta$ neka je $k_t \in C(\Delta)$ definirano sa $k_t(s) = k(t,s)$, $\forall s \in \Delta$. Imamo

$$|(J_k x)(t)| = |(k_t|\overline{x})| \leq \sqrt{(k_t|k_t)}\sqrt{(x|x)} = \left[\int_\Delta |k(t,s)|^2 ds\right]^{\frac{1}{2}} \|x\|_2. \tag{2.30}$$

Dakle, J_k je ograničen operator s unitarnog prostora $C(\Delta)$ u Banachov prostor $C(\Delta)$ i

$$\|J_k\| \leq \sup_{t\in\Delta} \left[\int_\Delta |k(t,s)|^2 ds\right]^{\frac{1}{2}} \leq \sqrt{\mu(\Delta)}\|k\|_\infty.$$

Nadalje, za $t_1, t_2 \in \Delta$ je

$$|(J_k x)(t_1) - (J_k x)(t_2)| = |(k_{t_1} - k_{t_2}|\overline{x})| \leq \left[\int_\Delta |k(t_1,s) - k(t_2,s)|^2 ds\right]^{\frac{1}{2}} \|x\|_2.$$

$\Delta \times \Delta$ je kompaktan skup, pa je $k \in C(\Delta \times \Delta)$ uniformno neprekidna na $\Delta\times\Delta$. Dakle, za dano $\varepsilon > 0$ postoji $\delta > 0$ takav da $|t_1 - t_2| < \delta$ i $|s_1 - s_2| < \delta$ povlače $|k(t_1,s_1) - k(t_2,s_2)| < \varepsilon$.

Neka je $K = \{x \in C(\Delta); \|x\|_2 \leq 1\}$. Za $x \in K$ vrijedi:

$$|t_1 - t_2| < \delta \Rightarrow |(J_k x)(t_1) - (J_k x)(t_2)| \leq \varepsilon\sqrt{\mu(\Delta)}.$$

Dakle, $J_k(K)$ je ekvikontinuiran skup u $C(\Delta)$.

Za $M > 0$ takav da je $\int_\Delta |k(t,s)|^2 ds \leq M^2$, $\forall t \in \Delta$, iz (2.30) slijedi $\|J_k x\|_\infty \leq M$, $\forall x \in K$. Dakle, skup $J_k(K)$ je ograničen. Iz teorema 2.7.2. (Arzelà-Ascoli) slijedi da je J_k kompaktan operator.

(b) Slijedi odmah iz (a) jer konvergencija u $(C(\Delta), \|\cdot\|_\infty)$ povlači konvergenciju u $(C(\Delta), \|\cdot\|_2)$.

(c) $C(\Delta)$ je gust u $L_2(\Delta)$ pa se J_k jedinstveno proširuje po neprekidnosti do ograničenog operatora $\widetilde{J}_k : L_2(\Delta) \to C(\Delta)_{\|\cdot\|_\infty}$. Ostale tvrdnje su također očigledne.

(d) Ako je $J_k = 0$ onda je $J_k x = 0$, $\forall x \in C(\Delta)$. Tada $\forall x \in C(\Delta)$ i $\forall t \in \Delta$ vrijedi $(k_t|\overline{x}) = 0$. Odatle je $k_t = 0$, $\forall t \in \Delta$, a to povlači $k = 0$.

(e) Za $x, y \in C(\Delta)$ vrijedi

$$(J_k x|y) = \int_\Delta (J_k x)(t)\overline{y(t)}dt = \int_\Delta \int_\Delta k(t,s)x(s)ds\overline{y(t)}dt =$$

$$= \int_\Delta x(s) \left[\overline{\int_\Delta k^*(s,t)y(t)dt}\right] ds = \int_\Delta x(s)\overline{(J_{k^*y)(s)}}ds = (x|J_{k^*}y).$$

Odatle slijedi da $\forall x, y \in L_2(\Delta)$ vrijedi $(\widetilde{J}_k x|y) = (x|\widetilde{J}_{k^*}y)$.

(f) slijedi iz (d) i (e). $\square$

U daljnjem je $k \in C(\Delta \times \Delta)$ takav da je $k^* = k$.

2.7.4. Teorem. *Operator J_k je konačnog ranga ako i samo ako postoje $f_1, \ldots, f_n, g_1, \ldots, g_n \in C(\Delta)$ takvi da je*

$$k(t,s) = \sum_{j=1}^{n} f_j(t) g_j(s), \quad \forall t, s \in \Delta.$$

Tada postoje $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ i ortonormirane funkcije $e_1, \ldots, e_n \in C(\Delta)$ takve da je

$$k(t,s) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j e_j(t) \overline{e_j(s)}, \quad \forall t, s \in \Delta,$$

$$J_k x = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j (x|e_j) e_j, \quad \forall x \in C(\Delta).$$

Dokaz: Ako takve f_j, g_j $(j = 1, \ldots, n)$ postoje, očito je $R(J_k) \subseteq [\{f_1, \ldots, f_n\}]$ pa je J_k konačnog ranga jednakog n.

Prema teoremu 2.6.16. postoje $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ i ortonormirane funkcije $e_1, \ldots, e_n \in C(\Delta)$ takvi da je $J_k x = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j (x|e_j) e_j$, $\forall x \in C(\Delta)$. Odatle imamo $\int_\Delta k(t,s) e_j(s) ds = \lambda_j e_j(t)$. Stavimo $a(t,s) = k(t,s) - \sum_{j=1}^{n} \lambda_j e_j(t) \overline{e_j(s)}$, pa $\forall x \in C(\Delta)$ imamo

$$(a_t|\overline{x}) = \int_\Delta a(t,s) x(s) ds = \int_\Delta k(t,s) x(s) ds - \sum_{j=1}^{n} \lambda_j e_j(t) (x|e_j) =$$

$$= (J_k x)(t) - \sum_{j=1}^{n} \lambda_j (x|e_j) e_j(t) = 0, \quad \forall t \in \Delta.$$

Odatle slijedi $a_t = 0$, $\forall t \in \Delta$, tj. $a = 0$. □

Ako J_k nije konačnog ranga, situacija je analogna, s redovima umjesto konačnih suma. Tada postoji niz $(\lambda_n)_n$ u $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ i ortonormirani niz $(e_n)_n$ u $C(\Delta)$ tako da je $\lim_n \lambda_n = 0$, $J_k e_j = \lambda_j e_j$, $\forall j \in \mathbb{N}$, i

$$J_k x = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j (x|e_j) e_j, \quad \forall x \in C(\Delta), \tag{2.31}$$

s tim da red u (2.31) konvergira k $J_k x$ u srednje kvadratnom smislu, tj.

$$\lim_n \int_\Delta |(J_k x)(t) - \sum_{j=1}^{n} \lambda_j (x|e_j) e_j|^2 dt = 0.$$

Međutim vrijedi više:

2.7.5. Teorem. *Red (2.31) konvergira uniformno i apsolutno prema $J_k x$, $\forall x \in C(\Delta)$.*

Dokaz: Imamo $J_k e_j = \lambda_j e_j$, a odatle $\lambda_j \overline{e_j(t)} = \int_\Delta \overline{k(t,s) e_j(s)} ds = (\overline{k_t}|e_j) \forall j \in \mathbb{N}$. Dakle, $\lambda_j \overline{e_j(t)}$ je Fourierov koeficijent funkcije $\overline{k_t} : s \mapsto \overline{k(t,s)}$ u odnosu na ortonormirani niz $(e_j)_j$.

Neka je $M > 0$ takav da je $\|k_t\|^2 = \int_\Delta |k(t,s)|^2 ds \leq M^2$, $\forall t \in \Delta$. Zbog Besselove nejednakosti imamo

$$\sum_{j=1}^{n} |\lambda_j \overline{e_j(t)}|^2 \leq M^2, \ \forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in \Delta. \tag{2.32}$$

Za bilo koji $\varepsilon > 0$, zbog Besselove nejednakosti, postoji $n \in \mathbb{N}$ takav da je $\sum_{j=n+1}^{\infty} |(x|e_j)|^2 < \varepsilon^2$. Sada za $p \in \mathbb{N}$ imamo

$$\sum_{j=n+1}^{n+p} |\lambda_j (x|e_j) e_j(t)| \leq \left(\sum_{j=n+1}^{n+p} |\lambda_j e_j(t)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{j=n+1}^{n+p} |(x|e_j)|^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

a odatle je

$$\sum_{j=n+1}^{n+p} |\lambda_j (x|e_j) e_j(t)| \leq \epsilon M, \quad \forall t \in \Delta, \forall p \in \mathbb{N},$$

odnosno

$$\sum_{j=n+1}^{\infty} |\lambda_j (x|e_j) e_j(t)| \leq \epsilon M, \quad \forall t \in \Delta.$$

Dakle, red (2.31) konvergira uniformno i apsolutno prema $J_k x$. □

2.7.6. Teorem. *Ako je J_k simetričan operator beskonačnog ranga, uz prethodne oznake vrijedi*

$$k(t,s) = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j e_j(t) \overline{e_j(s)}, \quad \forall t, s \in \Delta, \tag{2.33}$$

$$\int_{\Delta \times \Delta} |k(t,s)|^2 dt ds = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j^2, \tag{2.34}$$

Pri tome red (2.33) konvergira prema k u srednje kvadratnom smislu, tj. u unitarnom prostoru $C(\Delta \times \Delta)$.

Dokaz: Integracijom nejednakosti (2.32) dobijemo $\sum_{j=1}^{\infty}\lambda_j^2 \le M^2\mu(\Delta)$, $\forall n\in\mathbb{N}$, pa red $\sum_{j=1}^{\infty}\lambda_j^2$ konvergira. Odatle slijedi da za svaki ortonormirani niz $(\phi_n)_n$ u $C(\Delta\times\Delta)$ red $\sum_{j=1}^{\infty}\lambda_j\phi_j$ konvergira u $L_2(\Delta\times\Delta)$. Stavimo $k_0(t,s)=\sum_{j=1}^{\infty}\lambda_j e_j(t)\overline{e_j(s)}$, $\forall t,s\in\Delta$ i pokažimo da je $k=k_0$. Za $x,y\in C(\Delta)$ i $f(t,s)=y(t)\overline{x(s)}$ imamo

$$(k|f)=\int_{\Delta\times\Delta}k(t,s)\overline{y(t)}x(s)dtds=\int_{\Delta\times\Delta}(J_kx)(t)\overline{y(t)}dt=$$

$$=(J_kx|y)=\sum_{j=1}^{\infty}\lambda_j(x|e_j)(e_j|y)=(\sum_{j=1}^{\infty}\lambda_je_j\overline{e_j}|f)=(k_0|f).$$

Odatle je $(k-k_0|f)=0$ za svaku linearnu kombinaciju funkcija oblika $x\cdot y$, $x,y\in C(\Delta)$. Takve linearne kombinacije su uniformno guste u $C(\Delta\times\Delta)$, pa je $k-k_0=0$. Konačno, $(k|k)=(\sum_{j=1}^{\infty}\lambda_j\phi_j|\sum_{j=1}^{\infty}\lambda_j\phi_j)=\sum_{j=1}^{\infty}\lambda_j^2$. □

2.7.7. Teorem. *Ako je J_k simetričan i $(J_kx|x)\ge 0$, $\forall x\in C(\Delta)$, onda red (2.33) u teoremu 2.7.6. konvergira uniformno prema k.*

Dokaz: Uvjet $(J_kx|x)\ge 0$, $\forall x\in C(\Delta)$, ekvivalentan je uvjetu $\lambda_j\ge 0$, $\forall j\in\mathbb{N}$. Definiramo $a_n\in C(\Delta\times\Delta)$ sa $a_n(t,s)=k(t,s)-\sum_{j=1}^{\infty}\lambda_je_j(t)\overline{e_j(s)}$. Tada je $\overline{a_n(t,s)}=a_n(s,t)$, $\forall t,s\in\Delta$. Za $x\in C(\Delta)$ i $f(t,s)=x(t)\overline{x(s)}$ je

$$(a_n|f)=\int_{\Delta\times\Delta}a_n(t,s)\overline{x(t)}x(s)dtds=\int_{\Delta}\left[\int_{\Delta}a_n(t,s)x(s)ds\right]\overline{x(t)}dt=$$

$$=\int_{\Delta}\left[\sum_{j=n+1}^{\infty}\lambda_j(x|e_j)e_j(t)\right]\overline{x(t)}dt=\sum_{j=n+1}^{\infty}\lambda_j(x|e_j)\int_{\Delta}e_j(t)\overline{x(t)}dt=$$

$=\sum_{j=n+1}^{\infty}\lambda_j|(x|e_j)|^2\ge 0$, gdje, prema teoremu 2.7.5., red (2.31) u uglatoj zagradi uniformno konvergira .

Dokažimo da je $a_n(t,t)\ge 0$, $\forall t\in\Delta$. Pretpostavimo suprotno, tj. da postoji $t_0\in\Delta$ takva da je $a_n(t_0,t_0)<0$. Zbog neprekidnosti postoje $\varepsilon>0$ i otvorena kugla U oko t_0 takva da je $\mathrm{Re}\,(a_n(t,s))\le-\varepsilon$, $\forall t,s\in U$.

Neka je $x\in C(\Delta)$ takva da je $x(t)>0$, $\forall t\in U$ i $x(t)=0$, , $\forall t\in\Delta\backslash U$. Tada za $f(t,s)=x(t)x(s)$ imamo

$$0\le(a_n|f)=\int_{\Delta\times\Delta}a_n(t,s)x(t)x(s)dtds=\int_{\Delta\times\Delta}\mathrm{Re}\,(a_n(t,s))x(t)x(s)dtds=$$

$$= \int_{U \times U} \mathrm{Re}\,(a_n(t,s))x(t)x(s)dtds \leq -\varepsilon \left[\int_U x(t)dt\right]^2 < 0,$$

što je kontradikcija.

Dakle, $a_n(t,t) \geq 0$, $\forall t \in \Delta$, povlači $k(t,t) \geq \sum_{j=1}^n \lambda_j e_j(t)\overline{e_j(t)} = \sum_{j=1}^n \lambda_j |e_j(t)|^2$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall t \in \Delta$.

Odavde zaključujemo da za svako $t \in \Delta$ red s pozitivnim članovima $\sum_{j=1}^n \lambda_j |e_j(t)|^2$ konvergira i suma mu je $\leq k(t,t)$. Stavimo $\gamma = \max\{k(t,t); t \in \Delta\}$, te za $t, s \in \Delta$ imamo

$$\left(\sum_{j=n+1}^{n+p} |\lambda_j e_j(t)\overline{e_j(s)}|\right)^2 = \left(\sum_{j=n+1}^{n+p} \sqrt{\lambda_j}|e_j(t)|\sqrt{\lambda_j}|e_j(s)|\right)^2 \leq$$

$$\leq \left(\sum_{j=n+1}^{n+p} \lambda_j |e_j(t)|^2\right)\left(\sum_{j=n+1}^{n+p} \lambda_j |e_j(s)|^2\right) \leq$$

$$\leq K(s,s) \sum_{j=n+1}^{n+p} \lambda_j |e_j(t)|^2 \leq \gamma \sum_{j=n+1}^{n+p} \lambda_j |e_j(t)|^2.$$

Dakle, red $\sum_{j=1}^\infty \lambda_j e_j(t)\overline{e_j(s)}$ je apsolutno majoriziran s konvergentnim redom $\gamma \sum_{j=1}^\infty \lambda_j |e_j(t)|^2$, $\forall t \in \Delta$. Odatle slijedi da $\forall t \in \Delta$ taj red konvergira k $b_t \in C(\Delta)$ uniformno po $s \in \Delta$, gdje je $b(t,s) = b_t(s) = \sum_{j=1}^\infty \lambda_j e_j(t)\overline{e_j(s)}$. Sada, $\forall x \in C(\Delta)$ imamo

$$\int_\Delta b(t,s)x(s)ds = \sum_{j=1}^\infty \lambda_j e_j(t)(x|e_j) \overset{\text{T.2.7.5.}}{=} (J_k x)(t) = \int_\Delta k(t,s)x(s)ds,$$

odnosno $(b_t|\overline{x}) = (b_t|\overline{x})$, $\forall t \in \Delta$, $\forall x \in C(\Delta)$. Onda je $b_t = k_t$, $\forall t \in \Delta$, što daje $b = k$. Tada je $k(t,t) = b(t,t) = \sum_{j=1}^\infty \lambda_j |e_j(t)|^2$, $\forall t \in \Delta$. Budući da je posljednji red s pozitivnim članovima, to po Dinijevom teoremu taj red uniformno konvergira na Δ. Tada i red $\sum_{j=1}^\infty \lambda_j e_j(t)\overline{e_j(s)}$, kojeg on majorizira, konvergira uniformno na Δ. $\square$

Bibliografija

[1] S. Kurepa : Funkcionalna analiza, Školska knjiga, Zagreb 1981.

[2] G. Bachman, L. Narici : Functional analysis, Academic Press, 1966.

[3] G.K. Pedersen : Analysis NOW, Springer Verlag, 1998.

[4] P.R. Halmos : A hilbert space problem book, Van Nostrand, 1967.

Indeks