MANUALIA UNIVERSITATIS STUDIORUM ZAGRABIENSIS
UDŽBENICI SVEUČILIŠTA U ZAGREBU

LINEARNA ALGEBRA

Zrinka Franušić, Juraj Šiftar

MANUALIA UNIVERSITATIS STUDIORUM ZAGRABIENSIS
UDŽBENICI SVEUČILIŠTA U ZAGREBU

Autori
izv. prof. dr. sc. Zrinka Franušić
prof. dr. sc. Juraj Šiftar

Naslov
Linearna algebra

Recenzenti
prof. dr. sc. Damir Bakić
prof. dr. sc. Mario Krnić
izv. prof. dr. sc. Ilja Gogić

Lektorica
dr. sc. Martina Pavić

Nakladnik
Prirodoslovno-matematički fakultet Sveučilišta u Zagrebu

Mjesto i godina izdavanja
Zagreb, 2022.

ISBN: 978-953-6076-98-7

Status **sveučilišnog udžbenika** odobrio je Senat Sveučilišta u Zagrebu, Odlukom klasa: 032-01/22-02/13, ur. broj: 380-062/250-22-5, sa sjednice Senata 25. listopada 2022.

PREDGOVOR

Ovaj udžbenik nastajao je bez prevelike žurbe, a prije petnaestak godina činilo se da za njega ni nema osobite potrebe. Nastava predmeta Linearna algebra, neovisno o varijantama za različite smjerove studija, o modifikacijama nastavnog programa i načinu podjele svojedobno dvosemestralnog kolegija na dva jednosemestralna, smatrala se oduvijek, to jest više od 40 godina, temeljito pokrivenom opsežnim materijalom koji je napisao prof. Krešo Horvatić. Ni dodatne literature, na hrvatskom ili na stranim jezicima, nije u tom razdoblju nedostajalo, no nastavnici, asistenti i studenti tradicionalno su se većinom pouzdavali u „Horvatićevu Linearnu" ili, još kraće, u „Horvatića". Barem za teoriju, dakako, a brojne, lako dostupne zbirke zadataka i naročito one popularne neslužbene arhive zadataka sa starih rokova upotpunjavale su studentski fond tekstova za pripremu ispita. Dakako, pojedini nastavnici služili su se i drugim izvorima, a pisali su i vlastita skripta, bolje prilagođena polaznicima drugih studija, obično onih nematematičkih.

Znatan pomak načinio je prof. Damir Bakić napisavši na temelju dugogodišnjeg nastavnog iskustva i vlastitih bilješki s predavanja udžbenik „Linearna algebra", objavljen 2008. godine, s idejom, kako je sam napisao, da odabrani materijal organizira u praktičnom i efikasnom obliku. Skripta su i znatno prije bila dostupna na mrežnim stranicama PMF-ova Matematičkog odsjeka. Prema vlastitom komentaru prof. Bakića, te uz malo slobodne interpretacije, cilj mu je bio osigurati studentima i općenito zainteresiranim čitateljima udžbenik kakav im je zaista potreban na razini prve godine studija matematike, kako u smislu pragmatičnosti (ispiti, kolokviji, ispiti na višim godinama...) tako i za stvaranje čvrste podloge razumijevanja materije, neophodne za uspješan studij. Riječ je i o tome da većina studenata nema previše vremena ni volje proučavati izvore opsežnije i zahtjevnije od precizno onog što (smatraju da) im doista treba. Naprednija poglavlja, daljnje primjene... to će se eventualno potražiti kad se bude moralo, diktirano programom (kolegij Vektorski prostori i dalje), ali praktično je raspolagati udžbenikom u kojem se što manje toga može „preskakati" ili birati po vlastitom nahođenju.

Ako je ovo prethodno primjenjivo na studij matematike koji se među matematičarima na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu u Zagrebu još uvijek u žargonu naziva inženjerskim, onda to pogotovo vrijedi za profesorske smjerove. Specifičnosti nastavničkih smjerova s vremenom su sve više dolazile do izražaja, a time je narastala potreba i motivacija pisanja skripata namijenjenih upravo njima. Objektivna je činjenica da studenti nastavničkih smjerova, gledano u cjelini i u prosjeku, dolaze na studij matematike s predznanjem slabijim od onih koji su izabrali inženjerski smjer, a pritom ni jedni ni drugi nemaju osobitog iskustva sa služenjem matematičkom literaturom. Naviknuti se na takvu literaturu i naučiti je čitati važan je dio studija, osobito u početnim semestrima. Naravno da „sve se može naći kod Horvatića", primjerice, ali redoslijed poglavlja i njihove logičke poveznice nisu više jednake kao u nekadašnjem programu. Manje iskusnim čitateljima, dakle većini studenata, ozbiljna je zapreka pri učenju ako moraju sami birati i preslagivati dijelove izlaganja iz različitih izvora, koliko god samih po sebi kvalitetnih.

Pritom, iz uglavnom očitih razloga, mnogim studentima Linearna algebra previše je *apstraktna*, *komplicirana* ili jednostavno *teška*. Snalaženje u nizovima strogo poredanih definicija, propozicija, teorema, dokaza, korolara i primjera, proširenih dodatnim primjedbama, objašnjenjima, napomenama i zadacima za vježbu, doista nije lagano. Posebice kad se nakon uhodanog ″konkretnog″ računanja iz srednje škole, rjeđe prirodoslovno-matematičkog usmjerenja (upamti formule pa uvrsti zadane brojeve, memoriraj korake svakog postupka ne opterećujući se nužno njihovim smislom i slično) valja podići na višu razinu. Na pravu, ozbiljnu matematiku. Na strukture – logičke, skupovne, algebarske, geometrijske... Na ono što studenti neformalno, a neki i s priličnom odbojnošću, sažeto zovu *teorija*.

Prednost je nastavničkih smjerova što prije Linearne algebre slušaju Analitičku geometriju, koja obuhvaća i Klasičnu algebru vektora (dva poglavlja u knjizi prof. Horvatića, u skladu s nekadašnjim programom dvosemestralnog kolegija). Izdvajanje Analitičke geometrije kao kolegija prethodnika Linearne algebre smatramo savršeno opravdanim potezom, a studentima na početku Linearne algebre 1 kao osnovni savjet ističemo da si osvježe gradivo tog predmeta koji su većinom ionako slušali prije nekoliko mjeseci, a položili prije nekoliko tjedana. Mnoge od ključnih koncepata, dakako, trebalo je upoznati i naviknuti se računski primjenjivati u klasičnom modelu vektorskog prostora sa „strelicama", što bi onda moralo bitno olakšati prijelaz na opće vektorske prostore i cjelokupnu pripadnu tehniku. U praksi baš i nije tako.

Ova skripta dostupna su na mrežnim stranicama već nekoliko godina u radnom obliku koji se kontinuirano dopunjavao i korigirao. Značajan je aspekt da nisu koncipirana nakon što su u akademskoj godini 2018./2019. uvedene neke dosta važne promjene u programu, nego da su ažurno odražavala transformacije za koje su se zalagali autori, na temelju iskustva u nastavi i svojih procjena mogućih poboljšanja. Stjecajem okolnosti te su promjene koincidirale s povećanjem broja sati predavanja iz Linearne algebre 2, s s dva na tri sata, čime je, dakako, uveliko olakšano izlaganje gradiva bez forsiranja tempa kakav slušateljima nipošto ne odgovara.

U pisanju ovih skripata gotovo ništa nije izravno preuzimano iz drugih izvora, što bi ponajprije bile već spomenute knjige prof. Horvatića i prof. Bakića, koje redovito navodimo kao obaveznu literaturu. Ipak, sličnosti su vrlo velike, neizbježno, ali ne zbog direktnog kopiranja, nego zato što je to Linearna algebra kakva se, u dobroj tradiciji i uz poneku modifikaciju, predaje i tumači onako kako smo odavno naučili, u uvjerenju da je temeljna koncepcija istinski dobra i vrijedna. Naravno da će dileme poput „što je prije – strelica ili matrica", „idu li prvo sustavi ili linearni operatori" različiti profesori razriješiti po vlastitom shvaćanju, no za nastavničke smjerove dosta takvih nedoumica otpada već samom svrhom atributa nastavnički. Stariji koautor skripata učio je Linearnu algebru kod doc. Zdravka Kurnika, u davnoj godini kad je prvi put predavana pod tim naslovom, a vježbe su držali tadašnji asistenti Dragutin Svrtan i Mirko Polonijo. U „tandemu" s Hrvojem Šikićem izvodio je vježbe kod profesora Horvatića, čija je predavanja, znatno kasnije, slušala koautorica udžbenika. Imena koja danas, nakon više desetljeća, imaju itekakvu težinu na PMF-MO navodimo i iz zahvalnosti za sve naučeno, kao i u smislu naznake o kakvoj je dobroj tradiciji riječ.

U Uvodu ćemo ukratko navesti neke konkretne napomene i komentare o sadržaju udžbenika. Zahvaljujemo svima koji su čitali taj materijal na mrežnim stranicama, u različitim etapama stvaranja te nam dostavili primjedbe, sugestije i korekcije. To su, među ostalima, prof. dr. sc. Damir Bakić, prof. dr. sc. Ljiljana Arambašić i izv. prof. dr. sc. Ilja Gogić, koji su također predavali ove predmete u pojedinim semestrima posljednjih nekoliko godina, kao i nekolicina studentica i studenata. U nastavi je svoj vrijedan doprinos, koji je možda neizravno ostavio traga i u skriptama, dalo i desetak asistentica i asistenata te im svima zajedno također zahvaljujemo.

Zrinka Franušić i Juraj Šiftar

SADRŽAJ

UVOD

Vektorski prostor ključni je pojam u linearnoj algebri. Dosad nam je riječ „vektor" redovito bila povezana s geometrijskom predodžbom „strelice" u euklidskoj ravnini ili prostoru, često motivirane potrebom prikazivanja fizikalnih veličina poput brzine i sile, za čiji je opis uz numerički podatak iznosa potrebno poznavati i smjer te orijentaciju djelovanja. Kako bi takvi vektori-strelice postali zaista korisni, uvode se operacije zbrajanja i množenja realnim brojem. Tada se, primjerice, u geometriji može pregledno i elegantno, jednim računom s vektorima, dokazati da se težišnice svakog trokuta sijeku u jednoj točki, a da ta točka dijeli sve tri težišnice u omjeru $2:1$. U mehanici se takvim metodama izračunavaju rezultante dviju ili više sila. U Analitičkoj geometriji naučili smo kako se matematički korektno definira skup vektora na temelju euklidske geometrije te kako se taj skup snabdijeva strukturom vektorskog prostora, što znači da se definiraju operacije zbrajanja vektora i množenja vektora realnim brojem („skalarom") tako da budu ispunjena određena poželjna svojstva. Uvedene su bile i operacije malo drukčijeg tipa, skalarno množenje vektora i vektorsko množenje vektora, koje su također vrlo korisne, ali ne pripadaju osnovnoj strukturi vektorskog prostora.

Vektorski prostor u općenitom značenju, koje nije ograničeno na pojedini model poput V^2 ili V^3, upravo je pogodan matematički okvir za potpuni uvid u rješavanje sustava linearnih jednadžbi s bilo kojim (konačnim) brojem nepoznanica, a to je jedan od glavnih ciljeva Linearne algebre 1. Uvjerit ćemo se da su nam glavne ideje zapravo već poznate iz Analitičke geometrije, čak i iz srednje škole („geometrijsko rješavanje sustava dviju jednadžbi s dvije nepoznanice"). No u tom prožimanju geometrijske intuicije i algebarskog izražavanja trebat ćemo se „podići" od zornog (vizualnog) predočavanja u dvije ili tri dimenzije i naviknuti se na snalaženje i računanje u općenitom, a prvenstveno konačnodimenzionalnom vektorskom prostoru. Pritom će nam dobro razumijevanje klasične vektorske algebre u „vidljivim" dimenzijama i dalje ostati važna osnova, kroz primjere i analogije, za usvajanje novih pojmova i činjenica.

Preliminarni pojmovi i oznake

Počnimo s pregledom osnovnih pojmova, oznaka i važnijih činjenica elementarne matematike, posebice iz elementarne teorije skupova.

Skup je osnovni matematički pojam koji se ne definira. To je množina (kolekcija, familija ...) elemenata (objekata) koje odlikuju neka zajednička svojstva. Najčešće ih označavamo velikim tiskanim slovima (A, B,... X). Glavni skupovi brojeva s njihovim oznakama su

- skup prirodnih brojeva $\mathbb{N}$,
- skup cijelih brojeva $\mathbb{Z}$,
- skup racionalnih brojeva $\mathbb{Q}$,
- skup realnih brojeva $\mathbb{R}$,
- skup kompleksnih brojeva $\mathbb{C}$.

Skupove uglavnom **zadajemo** tako da navedemo sve njihove elemente ili pomoću karakterističnog svojstva. Na primjer, $A = \{x, y, z\}$ i $B = \{x : x^2 \geq 4\,, x \in \mathbb{Z}\}$. Za **prazan skup** (to jest skup bez ijednog elementa) rabit ćemo oznaku $\emptyset$.

Broj elemenata konačnog skupa A naziva se **kardinalni broj** skupa A i označava se s $\operatorname{card} A$ ili s $|A|$. Za prazan skup $\emptyset$ definira se $\operatorname{card} \emptyset = 0$.

Ukratko ćemo navesti osnovne skupovne relacije i operacije te pripadne oznake.

- Peanova relacija: $a \in A$ ('a je element skupa A'), $b \notin A$ ('b nije element skupa A').
- Podskup skupa: $A \subseteq B$ ($x \in A$ povlači $x \in B$).
- Jednakost skupova: $A = B$ (ako $A \subseteq B$ i $B \subseteq A$).
- Presjek skupova: $A \cap B = \{x : x \in A \text{ i } x \in B\}$.
- Unija skupova: $A \cup B = \{x : x \in A \text{ ili } x \in B\}$.
- Razlika skupova: $A \backslash B = \{x : x \in A \text{ i } x \notin B\}$.
- Simetrična razlika skupova: $A \triangle B = (A \backslash B) \cup (B \backslash A)$.
- Komplement skupa: $A \subseteq S$, $A^c = S \backslash A$.
- Partitivni skup: $\mathcal{P}(A)$ je skup svih podskupova skupa $A \neq \emptyset$.
- Kartezijev produkt skupova: $A \times B = \{(x, y) : x \in A,\ y \in B\}$ (skup svih uređenih parova, pri čemu je prvi član iz skupa A, a drugi iz B). Ako je $B = A$ kratko pišemo $A \times A = A^2$.

Neka su X, Y skupovi i f *pravilo* po kojem se svakom elementu skupa X pridružuje *jedan* element skupa Y. Uređena trojka (X, Y, f) naziva se **preslikavanje** ili **funkcija** skupa X u skup Y koju obično zapisujemo kao

$$f : X \to Y.$$

Skup X naziva se **područje definicije** ili **domena**, skup Y **područje vrijednosti** ili **kodomena**, a f **pravilo** ili **zakon** preslikavanja.

Elementu $x \in X$ je po pravilu f pridružen element $f(x)$ i pišemo

$$x \mapsto f(x).$$

Kažemo da je $f(x)$ **slika elementa** x ili **vrijednost funkcije** f **u varijabli** (točki, argumentu) x.

Slika preslikavanja f je skup

$$f(X) = \{f(x) \,:\, x \in X\}.$$

Ponekad se još označava sa $S(f)$ ili $\mathrm{Im}(f)$. Jasno je da vrijedi da je $f(X) \subseteq Y$. Analogno, možemo definirati i sliku bilo kojeg podskupa $A \subseteq X$, s oznakom $f(A)$.

Skup svih elemenata iz X čija slika pripada skupu $B \subseteq Y$ naziva se **praslika** podskupa B i označava se

$$f^{-1}(B) = \{x \in X \,:\, f(x) \in B\}.$$

Posebno, za $y \in Y$ i $B = \{y\}$ pišemo

$$f^{-1}(y) = \{x \in X \,:\, f(x) = y\}$$

i kažemo da je $f^{-1}(y) \subseteq X$ praslika elementa y. Primijetimo da praslika nekog elementa ili podskupa može biti prazan skup. Naglasimo da se „f^{-1}" u oznakama $f^{-1}(B)$ i $f^{-1}(y)$ ne odnosi na inverznu funkciju od f (koja i ne postoji ako f nije bijekcija).

Dvije funkcije $f : X \to Y$ i $f' : X' \to Y'$ **jednake** su ako su im domene i kodomene jednake, tj. $X = X'$ i $Y = Y'$ te ako je $f(x) = f'(x)$ za sve x iz X. Tada pišemo $f = f'$.

Neka su $f : X \to Y$ i $g : Y \to Z$ preslikavanja. Tada je jedinstveno definirano preslikavanje

$$h : X \to Z, \quad h(x) = g(f(x)), \quad x \in X.$$

Preslikavanje h nazivamo **kompozicijom funkcija** f i g te ga označavamo s $g \circ f$.

Po definiciji možemo ustanoviti da komponiranje funkcija zadovoljava svojstvo *asocijativnosti*, to jest za dana preslikavanja $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ i $h : Z \to V$ kompozicije $(h \circ g) \circ f$, $h \circ (g \circ f) : X \to V$ su jednake.

Komponiranje funkcija nije općenito *komutativno*, to jest općenito $g \circ f \neq f \circ g$.

Na kraju ovog kratkog pregleda ponovimo još tri važna svojstva koja može imati funkcija. Kažemo da je $f : X \to Y$ **injekcija** ili **injektivno preslikavanje** ako

$$\forall x_1, x_2 \in X,\; x_1 \neq x_2 \;\Rightarrow\; f(x_1) \neq f(x_2).$$

Injektivnost se najčešće ispituje ekvivalentnom tvrdnjom: f je injekcija ako za sve $x_1, x_2 \in X$

$$f(x_1) = f(x_2) \;\Rightarrow\; x_1 = x_2.$$

Funkcija f bit će injektivna ako i samo ako se praslika svakog elementa iz Y, $f^{-1}(y)$, sastoji od najviše jednog elementa. Zato se injektivna preslikavanja još nazivaju *1-1 preslikavanjima*.

Kažemo da je $f : X \to Y$ **surjekcija** ili **surjektivno preslikavanje** ako je slika domene jednaka kodomeni,

$$f(X) = Y.$$

Zbog toga se za surjekciju još rabi termin *preslikavanje na.*

Funkcija $f : X \to Y$ je **bijekcija** ako je injekcija i surjekcija. Vrijedi da je f bijektivno preslikavanje ako i samo ako za svaki $y \in Y$ *postoji jedinstven* $x \in X$ takav $f(x) = y$. Na temelju toga dobro je definirano preslikavanje $g : Y \to X$ takvo da je $g(y) = x$ za $y \in Y$, pri čemu je $y = f(x)$. Preslikavanje g naziva se **inverzom** ili **inverznim preslikavanjem** i označava s f^{-1}.

Dakle, za bijekciju $f : X \to Y$ vrijedi da je

$$f^{-1}(f(x)) = x,\ \forall x \in X \quad \text{i} \quad f(f^{-1}(y)) = y,\ \forall y \in Y,$$

to jest drukčije zapisano

$$f^{-1} \circ f = 1_X, \quad f \circ f^{-1} = 1_Y,$$

gdje su preslikavanja 1_X, 1_Y *identitete* na skupovima X, odnosno Y. ($1_X : X \to X$, $1_X(x) = x$ za sve $x \in X$.)

Dio I

Linearna algebra 1

POGLAVLJE 1

VEKTORSKI PROSTORI

1.1 Osnovne algebarske strukture

Algebarska struktura sastoji se, ukratko rečeno, od nepraznog skupa te jedne ili više računskih operacija na tom skupu za koje vrijede određena propisana svojstva.

Naviknuti smo ponajprije na računske operacije u skupovima brojeva, no također smo već različite operacije primjenjivali na polinome, na funkcije općenito, na vektore, pa i na matrice, ali dosad se uglavnom nisu promatrale i uspoređivale „apstraktne" strukture u kojima su objedinjena zajednička svojstva raznovrsnih pojedinačnih modela. Budući da je već sama definicija vektorskog prostora razmjerno složena, jer obuhvaća pojmove važnih struktura *komutativne grupe* i *polja*, izložit ćemo sažet pregled osnovnih algebarskih struktura kako bismo postupno došli do grupe (strukture u kojoj binarna operacija ima svojstvo asocijativnosti, a svaka jednadžba $ax = b$ ima jednoznačno rješenje) i polja, kao prirodne strukture za rješavanje linearnih jednadžbi s dvije i više nepoznanica.

U linearnoj algebri posebno su važne i operacije s matricama, kod kojih postoje sličnosti, ali i bitne razlike u odnosu na operacije u skupovima brojeva. Poznavanje osnovnih algebarskih struktura znatno će nam pomoći i u matričnom računu koji je usko povezan sa sustavima linearnih jednadžbi.

1.1.1 Binarna operacija. Grupoid.

Definicija 1.1.1. *Neka je S neprazan skup. Preslikavanje*

$$\theta : S \times S \to S$$

naziva se ***binarna operacija*** *na skupu S. Binarna operacija θ svakom uređenom paru $(x, y) \in S \times S$ pridružuje element $z = \theta(x, y) \in S$ (ili alternativno $z = x\,\theta\,y$).*

Uređeni par (S, θ) naziva se ***grupoid****, odnosno kažemo da binarna operacija θ određuje na skupu S* ***algebarsku strukturu grupoida****.*

Navedimo primjere nekih binarnih operacija.

- Zbrajanje i množenje na skupovima brojeva ($\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$) nazivamo *standardno zbrajanje* i *standardno množenje*. Dakle, $(\mathbb{N}, +)$, $(\mathbb{N}, \cdot)$, $(\mathbb{Z}, +)$, $(\mathbb{Z}, \cdot)$, $(\mathbb{Q}, +)$, ... su grupoidi.
- Oduzimanje je binarna operacija na $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ i $\mathbb{C}$, ali nije na $\mathbb{N}$.
- Presjek, unija, razlika, simetrična razlika su binarne operacije na partitivnom skupu od nepraznog skupa S, $\mathcal{P}(S)$.
- Vektorsko množenje $(\times)$ je binarna operacija na vektorskom prostoru V^3.
- Na skupu svih funkcija $f : S \to S$, u oznaci S^S, standardnu binarnu operaciju predstavlja kompozicija funkcija (u oznaci $\circ$).
- Binarnu operaciju možemo definirati na različite načine koristeći se već nekim zadanim, poznatim binarnim operacijama na tom skupu. Na primjer, $a*b = a+b-ab$ za $a, b \in \mathbb{Z}$. Uočimo da je $(\mathbb{Z}, *)$ grupoid, ali $(\mathbb{N}, *)$ to nije.

Napomenimo da ćemo u daljnjem izlaganju binarnu operaciju θ zbog jednostavnosti označavati znakom $\cdot$, to jest $\theta(x, y) = x \cdot y = xy$, pri čemu nećemo nužno misliti na standardno množenje. U različitim primjerima i zadacima također se za neku binarnu operaciju mogu upotrebljavati oznake poput $\star$, $\bullet$, $\diamond$, $\oplus$, $\otimes$ i drugi simboli, obično u slučaju kad se uvede neka nestandardna binarna operacija.

Definicija 1.1.2. *Neka je $(S, \cdot)$ grupoid. Elementi $x, y \in S$* ***komutiraju*** *ako vrijedi*

$$xy = yx.$$

Ako svaka dva elementa iz S komutiraju, kažemo da je binarna operacija ***komutativna****, odnosno da je $(S, \cdot)$* ***komutativni grupoid****.*

Standardno zbrajanje i standardno množenje su komutativne operacije, dok vektorsko množenje to nije.

Definicija 1.1.3. *Neka je $(S, \cdot)$ grupoid. Binarna operacija je* ***asocijativna*** *ako je*

$$x(yz) = (xy)z,$$

za sve $x, y, z \in S$. Grupoid s asocijativnom binarnom operacijom naziva se ***polugrupa****. Ako je binarna operacija i komutativna, grupoid se naziva* ***komutativna polugrupa****.*

Neki primjeri polugrupa:

- Skupovi brojeva $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ s obzirom na standardno zbrajanje i standardno množenje su komutativne polugrupe.

- Binarna operacija oduzimanja na $\mathbb{Z}$ nije asocijativna.
- Kompozicija funkcija je asocijativna pa je skup svih funkcija $S \to S$ polugrupa s obzirom na kompoziciju (tj. $(S^S, \circ)$ je polugrupa), no općenito nekomutativna.
- Komutativne polugrupe su $(\mathcal{P}(S), \cap)$ i $(\mathcal{P}(S), \cup)$, ali $(\mathcal{P}(S), \setminus)$ nije polugrupa jer razlika skupova nije asocijativna.

Naglasimo važnost svojstva asocijativnosti za jednostavnu primjenu binarnih operacija. Može se dokazati, metodom matematičke indukcije, da u polugrupi bilo koji raspored zagrada, koje naznačuju prioritet izvođenja operacije, ne utječe na rezultat. Primjerice, u polugrupi $(S, \cdot)$ za svaka 4 elementa vrijedi $(ab)(cd) = a(b(cd))$ i slično. Posebno se može definirati potenciranje a^n za svaki $n \in \mathbb{N}$ i tada vrijede uobičajena svojstva: $a^m a^n = a^{m+n}$ te $(a^m)^n = a^{mn}$.

Definicija 1.1.4. *Neka je $(S, \cdot)$ grupoid. Kažemo da je $e \in S$* ***neutralni element*** *ili* ***jedinica*** *binarne operacije ako je*

$$ex = xe = x,$$

za sve $x \in S$. Ako je binarna operacija asocijativna i dopušta neutralni element, $(S, \cdot)$ se naziva ***monoid****. Ako je operacija i komutativna, govorimo o* ***komutativnom monoidu****. Ponekad se monoid još naziva* polugrupa s jedinicom.

Lako se pokazuje da ako u grupoidu postoji neutralni element tada je on jedinstven. Zaista, ako su $e, e' \in S$ neutralni elementi, mora vrijediti da je $ee' = e$ i $ee' = e'$ pa je $e = e'$.

Navedimo primjere nekih monoida.

- Skupovi brojeva $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ s obzirom na standardno zbrajanje i standardno množenje su komutativni monoidi. Neutralni element zbrajanja je 0, a množenja je 1. Uočimo da je $(\mathbb{N}, \cdot)$ komutativni monoid, ali da $(\mathbb{N}, +)$ to nije.
- Funkcija identiteta ($id(x) = x$, $\forall x \in S$) predstavlja neutralni element kompozicije funkcija i stoga je $(S^S, \circ)$ monoid.
- $(\mathcal{P}(S), \cap)$ i $(\mathcal{P}(S), \cup)$ su komutativni monoidi. Neutralni elementi su redom S i $\emptyset$.

U nekomutativnim strukturama moguće je imati samo jednostranu jedinicu, *lijevu* ili *desnu*. Na primjer grupoid $(\mathcal{P}(S), \setminus)$ ima samo desnu jedinicu ($\emptyset$). No ako istovremeno postoje i desna i lijeva jedinica, one su nužno jednake.

Napomena 1.1.5. Bez obzira na različite oznake za binarnu operaciju i na njezina moguća posebna svojstva, treba zapamtiti da je to prema definiciji preslikavanje (funkcija), dakle da se svakom uređenom paru elemenata nekog nepraznog skupa S pridružuje jednoznačno određen element skupa S.

Često se spominje pojam „zatvorenosti” neke operacije na određenom skupu, osobito ako već imamo neki grupoid $(G, *)$ pa je pitanje je li neki njegov podskup S također grupoid s obzirom na „istu” operaciju. Zapravo je tada riječ o *restrikciji* preslikavanja $* : G \times G \to G$ na podskup $S \times S$. Za $(a, b) \in S \times S$ definiran je $a * b$ kao element skupa G, ali on se općenito ne mora nalaziti u S.

Primjerice, skup $\mathbb{N}$ nije „zatvoren” s obzirom na operaciju oduzimanja, koju primjenjujemo na cijele brojeve, dakle na nadskupu $\mathbb{Z}$ skupa $\mathbb{N}$.

Dakle, izraz „provjerimo zatvorenost operacije” zapravo se odnosi na provjeru je li doista zadana binarna operacija, pa time onda i grupoid, prema definiciji 1.1.1. Treba obratiti pozornost na to o kojoj je domeni i kodomeni riječ, jer se operacija za koju (katkad neprecizno) upotrebljavamo jednaki naziv ne može uvijek suziti (restringirati) na podskup ili proširiti na nadskup nekog grupoida.

1.1.2 Grupa

Kako smo već istaknuli u uvodu, *grupa* je iznimno važna algebarska struktura s jednom binarnom operacijom. Osim u više područja matematike veliku važnost ima i u fizici, npr. kod *grupa simetrija*. U linearnoj algebri pojavljuju se raznovrsni primjeri grupa, a karakteristične su grupe regularnih (invertibilnih) matrica te još nekih posebnih tipova matrica. Također, za definiciju i svojstva determinante trebat će poznavati osnovna svojstva grupe permutacija.

Definicija 1.1.6. *Neka je $(S, \cdot)$ grupoid i neka je e njegov neutralni element. Ako za $x \in S$ postoji $y \in S$ takav da vrijedi*

$$xy = yx = e,$$

kažemo da je element x ***invertibilan****, a element y zovemo* ***inverzni element*** *ili kraće* ***inverz*** *elementa x.*

U nekim nekomutativnim strukturama pojavljuju se jednostrani inverzi, *lijevi* (ako je $yx = e$) ili *desni*(ako je $xy = e$). Ako u monoidu $(S, \cdot)$ neki element x ima lijevi inverz y_L i desni inverz y_D, oni su nužno jednaki. Zaista,

$$y_L = y_L e = y_L(xy_D) = (y_L x)y_D = ey_D = y_D.$$

Nadalje, vrijedi:

Propozicija 1.1.7. *Ako je neki element monoida invertibilan, njegov je inverz jedinstven.*

Dokaz. Dokaz te tvrdnje lako izvodimo iz prethodne, da se jednostrani inverzi nekog elementa, ako postoje, nužno podudaraju. Naime, ako pretpostavimo da su x' i x'' inverzi elementa x, iskoristimo da je x' kao lijevi inverz jednak elementu x'' u svojstvu desnog inverza. $\square$

Inverz elementa x označavamo s x^{-1}, ali u slučajevima kad je binarna operacija označena znakom $+$, uobičajeno se koristiti oznakom $-x$ te inverz nazivati *suprotnim elementom.*

- U grupoidu $(\mathbb{N}, \cdot)$ invertibilan je samo element 1.
- U $(\mathbb{Z}, +)$, $(\mathbb{Q}, +)$, $(\mathbb{R}, +)$ svi su elementi invertibilni, to jest svaki x ima suprotni element $-x$ iz pripadnog skupa.
- U $(\mathbb{Q}, \cdot)$, $(\mathbb{R}, \cdot)$ invertibilni su svi elementi osim 0. Jedini invertibilni elementi u $(\mathbb{Z}, \cdot)$ su 1 i -1.
- U $(\{f \mid f : S \to S\}, \circ)$ invertibilni elementi su bijektivna preslikavanja.

Neutralni element e iz grupoida S uvijek je invertibilan jer je on sam vlastiti inverz, to jest $e^{-1} = e$. Stoga je podskup svih invertibilnih elemenata u monoidu neprazan jer sadrži barem neutralni element.

Propozicija 1.1.8. *Neka je $(G, \cdot)$ monoid.*

(a) *Ako je $x \in G$ invertibilan element, onda je i x^{-1} invertibilan te vrijedi*

$$\left(x^{-1}\right)^{-1} = x.$$

(b) *Ako su $x, y \in G$ invertibilni elementi, onda je i xy invertibilan te vrijedi*

$$(xy)^{-1} = y^{-1}x^{-1}.$$

Dokaz. **(a)** Tvrdnja slijedi iz $xx^{-1} = x^{-1}x = e$ i činjenice da je inverz jedinstven.

(b) Zbog asocijativnosti vrijedi

$$(xy)(y^{-1}x^{-1}) = x(yy^{-1})x^{-1} = xex^{-1} = xx^{-1} = e,$$

te analogno $(y^{-1}x^{-1})(xy) = e$, pa slijedi tvrdnja.

$\square$

Definicija 1.1.9. *Monoid u kojem su svi elementi invertibilni naziva se* ***grupa****. Ako je binarna operacija komutativna, govorimo o* ***komutativnoj*** *ili* ***Abelovoj grupi****.*

Pojam grupe možemo odmah primijeniti u sljedećem, vrlo korisnom korolaru propozicije 1.1.8.

Korolar 1.1.10. *Podskup svih invertibilnih elemenata u monoidu čini grupu.*

Važan primjer grupe invertibilnih elemenata u monoidu je skup svih bijekcija u monoidu $(\{f \mid f : S \to S\}, \circ)$.

Zadatak 1.1. *Dokažite korolar 1.1.10.*

Ustanovimo koji skupovi brojeva s obzirom na standardne operacije zbrajanja i množenja čine Abelove grupe.

- $(\mathbb{Z}, +)$, $(\mathbb{Q}, +)$, $(\mathbb{R}, +)$, $(\mathbb{C}, +)$ su Abelove grupe. $(\mathbb{N}, +)$ je komutativna polugrupa.
- Uočimo da nijedna od struktura $(\mathbb{N}, \cdot)$, $(\mathbb{Z}, \cdot)$, $(\mathbb{Q}, \cdot)$, $(\mathbb{R}, \cdot)$, $(\mathbb{C}, \cdot)$ nije grupa, no nekima od njih nedostaje „malo” da to postanu. Svi elementi različiti od 0 u $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ i $\mathbb{C}$ su invertibilni. Stoga promotrimo te iste skupove bez nule, to jest

  $$\mathbb{Q}^* = \mathbb{Q}\backslash\{0\},\ \mathbb{R}^* = \mathbb{R}\backslash\{0\},\ \mathbb{C}^* = \mathbb{C}\backslash\{0\}.$$

  Bitno je ustanoviti da su svi ovi skupovi „zatvoreni” na operaciju množenja ($a \neq 0$, $b \neq 0$ povlači $ab \neq 0$) pa su $(\mathbb{Q}^*, \cdot)$, $(\mathbb{R}^*, \cdot)$, $(\mathbb{C}^*, \cdot)$ Abelove grupe. Ostala svojstva grupe ovdje se lako provjere, pri čemu se asocijativnost i komutativnost izravno prenose (“nasljeđuju”) na podskup pa ih i ne treba posebno provjeravati.
- $(\{0\}, +)$ i $(\{1\}, \cdot)$ su Abelove grupe. Općenito, jednočlani podskup $\{x\}$ neke grupe $(G, \cdot)$ je grupa u odnosu na binarnu operaciju $\cdot$ ako i samo ako $x = e$.

Jedan od ishoda predmeta *Linearna algebra 1* jest naučiti rješavati sustave linearnih jednadžbi. Ako linearnu jednadžbu s jednom nepoznanicom rješavamo u ambijentalnom skupu koji ima strukturu grupe, ta će jednadžba imati jedinstveno rješenje. O toj važnoj činjenici govori sljedeća propozicija.

Propozicija 1.1.11. *Neka je $(G, \cdot)$ grupa. Jednadžbe*

$$\begin{aligned} ax &= b, \\ ya &= b \end{aligned}$$

imaju jedinstveno rješenje za svaki izbor elemenata $a, b \in G$.

Dokaz. Pretpostavimo da za neki $x \in G$ vrijedi $ax = b$. Primijenimo operaciju u grupi G na inverz a^{-1} elementa a i na ax. Dobivamo

$$a^{-1}(ax) = a^{-1}b.$$

Zbog asocijativnosti je

$$a^{-1}(ax) = (a^{-1}a)x = ex = x$$

pa je $x = a^{-1}b$. Kako je $a^{-1}b \in G$ i $a(a^{-1}b) = b$, doista je $a^{-1}b$ jedno rješenje zadane jednadžbe.

Jedinstvenost se lako pokazuje. Iz pretpostavke da su x_1 i x_2 rješenja slijedi $ax_1 = ax_2$ pa ponovno množenjem slijeva s a^{-1} dobivamo da je $x_1 = x_2$.

Analogno, jednadžba $ya = b$ ima jedinstveno rješenje $y = ba^{-1}$ u grupi G. □

Naglasimo još da u ovoj propoziciji nije pretpostavljeno svojstvo komutativnosti grupe pa treba razlikovati jednadžbe oblika $ax = b$ i $ya = b$, kao što i u dokazu nije svejedno u kojem se redoslijedu primjenjuje operacija u grupi na elemente a^{-1} i b. U slučaju standardnih operacija zbrajanja i množenja naviknuti smo jednostavno „oduzeti a s obje strane", odnosno „skratiti obje strane jednadžbe s a", pod uvjetom da je $a \neq 0$. No primjerice u grupi bijekcija s obzirom na kompoziciju funkcija, gdje komutativnost ne vrijedi općenito, nipošto nije svejedno hoćemo li za rješenje jednadžbe napisati npr. $f^{-1} \circ g$ ili $g \circ f^{-1}$.

Sasvim slično dokazuje se sljedeće svojstvo grupe o rješenju jednostavne, ali važne jednadžbe malo drukčijeg oblika:

Propozicija 1.1.12. *Neka je $(G, \cdot)$ grupa. Jednadžba*

$$x \cdot x = x$$

ima jedinstveno rješenje $x = e$.

U definiciji 1.1.9 grupa je definirana kao monoid u kojem je svaki element invertibilan. Ekvivalentno, grupa se može definirati tako da se navedu sva pojedina svojstva koja grupoid treba ispunjavati kako bi bio grupa, odnosno Abelova grupa, s obzirom na zadanu operaciju. Neka je G neprazan skup i $\cdot$ preslikavanje s domenom $G \times G$. Uređeni par $(G, \cdot)$ je **grupa** ako ima sljedeća svojstva:

(1) $xy \in G$ za sve $x, y \in G$, (*zatvorenost*)

(2) $(xy)z = x(yz)$ za sve $x, y, z \in G$, (*asocijativnost*)

(3) Postoji $e \in G$ takav da je $ex = xe = x$ za sve $x \in G$, (*neutralni element*)

(4) Za svaki $x \in G$ postoji $y \in G$ takav da je $xy = yx = e$. (*inverzni element*)

Ako vrijedi i svojstvo

(5) $xy = yx$ za sve $x, y \in G$, (*komutativnost*)

onda je $(G, \cdot)$ **komutativna** ili **Abelova grupa**.

U konkretnom primjeru ili zadatku svojstva grupe uobičajeno je dokazivati upravo u redoslijedu kako su iskazana. Kao primarno svojstvo koje treba provjeriti ističe se zatvorenost, u smislu napomene 1.1.5, dakle činjenica da je na skupu G doista korektno zadana binarna operacija, čime je $(G, \cdot)$ u prvom redu grupoid. Jasno je da (4) ima smisla samo ako vrijedi (3). Svojstvo komutativnosti (5) može se dokazati ili opovrgnuti nezavisno od ostalih svojstava.

U sljedećih nekoliko primjera detaljno ćemo pokazati kako se provjeravaju svojstva grupe. Napomenimo da se u pojedinim primjerima može dosta razlikovati težina provjere nekog svojstva. Primjerice, svojstvo asocijativnosti katkad se može provjeriti rutinskim računom, ali ponekad je znatno zahtjevnije za provjeru.

Primjer 1.1. ***Grupa ostataka modulo*** m
Neka je $m \in \mathbb{N}$ i $m > 1$. Definiramo skup

$$\mathbb{Z}_m = \{0, 1, 2 \dots, m-1\}.$$

Prije nego što definiramo operaciju na $\mathbb{Z}_m$ prisjetimo se što kaže *Teorem o dijeljenju s ostatkom*: ako su $a \in \mathbb{Z}$ i $m \in \mathbb{N}$, postoje jedinstveni $q \in \mathbb{Z}$ i $r \in \mathbb{Z}_m$ takvi da je $a = mq + r$. Broj r naziva se *ostatak* pri dijeljenju broja a brojem m.

Sada na skupu $\mathbb{Z}_m$ definiramo binarnu operaciju koja svakom uređenom paru $(x, y) \in \mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_m$ pridružuje ostatak pri dijeljenju broja $x + y$ brojem m. Ova operacija naziva se *zbrajanje modulo* m i označava s $+_m$. Pišemo

$$x +_m y = z,$$

pri čemu je $x + y = mq + z$ za neki $q \in \mathbb{Z}$ i $z \in \mathbb{Z}_m$.

Krenimo redom ispitati svojstva grupe. Svojstvo **(1)** vrijedi prema samoj definiciji.

(5) Operacija $+_m$ je očito komutativna.

(2) Svojstvo asocijativnosti nije sasvim jednostavno pokazati. Neka je

$$(x +_m y) +_m z = r +_m z = s,$$

gdje je

$$x + y = km + r, \tag{1.1}$$
$$r + z = lm + s, \tag{1.2}$$

za $k, l \in \mathbb{Z}$ i $r, s \in \mathbb{Z}_m$. Nadalje, neka je $y +_m z = t$, to jest

$$y + z = pm + t, \tag{1.3}$$

za $p \in \mathbb{Z}$ i $t \in \mathbb{Z}_m$. Ako zbrojimo jednakosti (1.1), (1.2) i (1.3) pomnoženu s -1, dobit ćemo

$$x + t = (k + l - p)m + s,$$

odnosno $x +_m t = s$ pa je

$$x +_m (y +_m z) = x +_m t = s,$$

što je i trebalo pokazati.

(3) 0 je neutralni element.

(4) Suprotni element (inverz) od $x \in \mathbb{Z}_m \backslash \{0\}$ je $m - x$, a element 0 je sam sebi inverz.

Zaključujemo da je $(\mathbb{Z}_m, +_m)$ Abelova grupa koja je poznata pod nazivom *grupa ostataka modulo m.* S njom ćemo se susretati na još nekim predmetima na ovom studiju, na primjer na *Elementarnoj teoriji brojeva.*

Za konkretnu vrijednost broja m, na primjer $m = 4$ rezultat operacije na svakom uređenom paru zapisujemo u tablici:

$+_4$	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

Nije rijetko da upravo tablično definiramo binarnu operaciju na nekom konačnom skupu. Tu tablicu binarne operacije nazivamo *Cayleyeva tablica.*

Prirodno je analogno definirati i operaciju *množenja modulo m*, u oznaci $\cdot_m$ i pitati se je li $(\mathbb{Z}_m, \cdot_m)$ također Abelova grupa. Odgovor je *ne.* No situaciju možemo „popraviti” u ovisnosti o tome je li broj m prost ili složen. Promotrimo tablicu za $m = 4$:

$\cdot_4$	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	0	1	2	3
2	0	2	0	2
3	0	3	2	1

Može pokazati da su zadovoljena svojstva komutativnosti, asocijativnosti (– ne lako!) i da je 1 neutralni element, no jasno je da elementi 0 i 2 nemaju multiplikativni inverz. Stoga je $(\mathbb{Z}_4, \cdot_4)$ komutativni monoid. Za $m = 5$ imamo sljedeću tablicu:

$\cdot_5$	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4
2	0	2	4	1	3
3	0	3	1	4	2
4	0	4	3	2	1

Nakon pomnijeg istraživanja tablice možemo zaključiti da je $(\mathbb{Z}_5, \cdot_5)$ komutativni monoid i da jedino 0 nema inverz. Ako iz skupa $\mathbb{Z}_5$ izbacimo nulu, $\mathbb{Z}_5^* = \mathbb{Z}_5 \backslash \{0\}$, struktura se „popravila” i $(\mathbb{Z}_5^*, \cdot_5)$ je Abelova grupa.

♡

Primjer 1.2. Na kolegiju *Analitička geometrija* pokazalo se da operacija *zbrajanja vektora* na V^1, V^2 i V^3 zadovoljava sva svojstva Abelove grupe.

♡

Primjer 1.3. Grupa polinoma.

Neka je $n \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$ i $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$, $a_n \neq 0$. Preslikavanje $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zadano s

$$p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$$

naziva se (realni) *polinom stupnja* n. *Nulpolinom* je polinom za kojeg vrijedi $p(x) = 0$, za sve $x \in \mathbb{R}$ i za njega se ne definira stupanj (ipak ponekad se uzima da mu je stupanj $-\infty$ ili -1). Polinome zbrajamo tako da im zbrojimo koeficijente uz odgovarajuće potencije. Neka je $\mathcal{P}_n$ skup koji se sastoji od nulpolinoma i svih polinoma stupnja manjeg ili jednakog n. Lako je ustanoviti da je $(\mathcal{P}_n, +)$ Abelova grupa. Za razliku od toga množenje polinoma čak nije ni binarna operacija u $\mathcal{P}_n$ (osim u trivijalnom slučaju $n = 0$). Nadalje, ako s $\mathcal{P}$ označimo skup svih polinoma, to jest $\mathcal{P} = \cup_{n \geq 0} \mathcal{P}_n$, tada je $(\mathcal{P}, +)$ također Abelova grupa, a $(\mathcal{P}, \cdot)$ je komutativni monoid.

♡

Primjer 1.4. Grupa n-tih korijena jedinice.
Za $n \in \mathbb{N}$ definiramo

$$K_n = \{z \in \mathbb{C} \,:\, z^n = 1\}.$$

Skup K_n predstavlja skup svih rješenja jednadžbe $z^n - 1 = 0$ u skupu kompleksnih brojeva. Tih rješenja u $\mathbb{C}$ ima točno n i zovu se *n-ti korijeni jedinice* (ili korijeni jedinice stupnja n). Skup možemo i eksplicitno zapisati kao

$$K_n = \{\cos \frac{2k\pi}{n} + i \sin \frac{2k\pi}{n} \,:\, k = 0, 1, 2, \dots, n-1\}.$$

Ispitajmo koju algebarsku strukturu čini ovaj skup s obzirom na operaciju standardnog množenja.

(1) Neka su $z_1, z_2 \in K_n$. Tada vrijedi

$$(z_1 \cdot z_2)^n = z_1^n \cdot z_2^n = 1 \cdot 1 = 1,$$

pa je i $z_1 z_2 \in K_n$.

(2) Standardno množenje je asocijativno.

(3) Postoji neutralni element $1 \in K_n$.

(4) Svaki $z \in K_n$ ima inverz z^{-1} u $\mathbb{C}$ (jer je očito $z \neq 0$). Provjerimo da je $z^{-1} \in K_n$:

$$(z^{-1})^n = (z^n)^{-1} = 1^{-1} = 1.$$

(5) Standardno množenje je komutativno.

Zaključujemo da je $(K_n, \cdot)$ Abelova grupa, a nazivamo je *grupa n-tih korijena jedinice.* Navedimo primjere za prvih nekoliko vrijednosti broja n:

$$K_1 = \{1\},\ K_2 = \{1, -1\},\ K_3 = \{1, \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}, \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}\},\quad K_4 = \{1, i, -1, -i\}, \dots$$

Lako možemo uočiti da elemente grupe K_n možemo shvatiti u kompleksnoj ravnini i kao vrhove pravilnog n-terokuta upisanog u jediničnu kružnicu.

♡

Primjer 1.5. Grupe $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ i $\mathbb{Q}(\sqrt{2})^*$.

Neka je
$$\mathbb{Q}(\sqrt{2}) = \{a + b\sqrt{2} \,:\, a, b \in \mathbb{Q}\}.$$
Uz standardno zbrajanje lako se ustanovljava da $(\mathbb{Q}(\sqrt{2}), +)$ ima strukturu Abelove grupe. Zaista, provjerit ćemo sve aksiome grupe.

(1) Zbrajanje je zatvoreno u $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$, to jest
$$(a + b\sqrt{2}) + (c + d\sqrt{2}) = (a + c) + (b + d)\sqrt{2} \in \mathbb{Q}(\sqrt{2}), \quad \forall\, a, b, c, d \in \mathbb{Q},$$
jer $a + c, b + d \in \mathbb{Q}$.

(2) Standardno zbrajanje je asocijativno. (Još kažemo da se nasljeđuje iz $\mathbb{R}$ jer je $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) \subset \mathbb{R}$.)

(3) Postoji neutralni element $0 \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})$ jer $0 \in \mathbb{Q}$.

(4) Svaki $a + b\sqrt{2} \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})$ ima suprotni element (inverz) $-a - b\sqrt{2} \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})$.

(5) Standardno zbrajanje je komutativno.

Sada ispitajmo koju strukturu čini $\mathbb{Q}(\sqrt{2})^* = \mathbb{Q}(\sqrt{2})\backslash\{0\}$ s obzirom na standardno množenje.

(1) Množenje je zatvoreno u $\mathbb{Q}(\sqrt{2})^*$, to jest
$$(a + b\sqrt{2}) \cdot (c + d\sqrt{2}) = (ac + 2bd) + (ad + bc)\sqrt{2} \in \mathbb{Q}(\sqrt{2}), \quad \forall\, a, b, c, d \in \mathbb{Q},$$
jer $ac + 2bd, ad + bc \in \mathbb{Q}$. Nadalje, $(a + b\sqrt{2}) \cdot (c + d\sqrt{2}) \neq 0$ jer je $a + b\sqrt{2} \neq 0$ i $c + d\sqrt{2} \neq 0$.

(2) Standardno množenje je asocijativno.

(3) Postoji neutralni element $1 \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})^*$.

(4) Svaki $a + b\sqrt{2} \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})^*$ ima inverz
$$(a + b\sqrt{2})^{-1} = \frac{a}{a^2 - 2b^2} - \frac{b}{a^2 - 2b^2}\sqrt{2} \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})^*.$$
Uočimo da je $a^2 - 2b^2 \neq 0$ za $a, b \in \mathbb{Q}$ (jer $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$) i $a^2 + b^2 \neq 0$ te $\frac{a}{a^2-2b^2}, \frac{-b}{a^2-2b^2} \in \mathbb{Q}$.

(5) Standardno množenje je komutativno.

Dakle, $(\mathbb{Q}(\sqrt{2})^*, \cdot)$ je Abelova grupa.

♡

Napomena 1.1.13. Uočimo da u primjerima 1.4 i 1.5 nismo morali dokazivati svojstvo asocijativnosti i komutativnosti s obzirom na to da ta svojstva vrijede na skupovima $\mathbb{C}$ i $\mathbb{R}$ koji sadrže K_n i $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$. Štoviše, u primjeru 1.4 pokazali smo da je skup K_n *podgrupa* Abelove grupe $(\mathbb{C}^*, \cdot)$, a u primjeru 1.5 da je $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ *podgrupa* Abelove grupe $(\mathbb{R}, +)$. Općenito, kažemo da je podskup H grupe G *podgrupa* od G ako je H grupa s obzirom na binarnu operaciju $\cdot$ uz koju je G grupa. Pišemo $H \leq G$. Lako se može ustanoviti da je $H \leq G$ ako i samo ako vrijedi

$$x \cdot y \in H, \; x^{-1} \in H,$$

za sve $x, y \in H$. Odnosno $H \leq G$ ako i samo ako je

$$x \cdot y^{-1} \in H,$$

za sve $x, y \in H$. Napominjemo da je suvišno pokazivati da je neutralni element e operacije $\cdot$ sadržan u H zato što pretpostavke da je $x \in H$ i $x^{-1} \in H$ impliciraju da je $e = x \cdot x^{-1} \in H$.

Primjer 1.6. Struktura s eksplicitno zadanom *novom* operacijom.
Zadan je skup

$$G = \{x \in \mathbb{R} \, : \, x > 0, x \neq 1\}$$

i operacija

$$x * y = x^{\log y}, \quad x, y \in G,$$

pri čemu je log *logaritam po bazi* 10.
Ispitujemo redom aksiome grupe.

(1) Za $x, y \in G$ je $z = x * y = x^{\log y} > 0$. Provjerimo da je $z \neq 1$. Zaista, ako je $z = 1$, onda je $\log y = 0$ (jer $x \neq 1$) pa je $y = 1$, što je u proturječju s činjenicom $y \in G$. Dakle, $z \in G$ i operacija je $*$ je *binarna* operacija na G, to jest ispunjeno je svojstvo *zatvorenosti*.

(2) Asocijativnost moramo provjeriti raspisivanjem. Za $x, y, z \in G$ vrijedi

$$\begin{aligned} (x * y) * z &= (x^{\log y}) * z = (x^{\log y})^{\log z} = x^{\log y \log z}, \\ x * (y * z) &= x * (y^{\log z}) = x^{\log(y^{\log z})} = x^{\log z \log y} = x^{\log y \log z}. \end{aligned}$$

(5) Operacija $*$ je komutativna jer je

$$x * y = x^{\log y} = (10^{\log x})^{\log y} = 10^{\log x \log y} = 10^{\log y \log x} = (10^{\log y})^{\log x} = y^{\log x} = y * x.$$

(3) Pitamo se postoji li $n \in G$ takav da je $x * n = x$ za sve $x \in G$, to jest $x^{\log n} = x$, a to vrijedi ako i samo ako je $n = 10$. Zbog komutativnosti imamo sljedeće:

$$x * 10 = 10 * x = x, \; \forall x \in G.$$

(4) Neka je $x \in G$ i y takav da je $x * y = 10$. Tada je $x^{\log y} = 10$ i slijedi da je

$$y = 10^{\frac{1}{\log x}} = 10^{\log_x 10}.$$

Vrijedi da je $y > 0$ i $y \neq 1$, pa je $y = x^{-1} \in G$. (Provjerite još jednom direktnim uvrštavanjem da je $x * y = y * x = 10$.)

Pokazali smo, eksplicitno provjeravajući sve aksiome grupe, da je $(G, *)$ Abelova grupa.
♡

Napomena 1.1.14. U primjeru 1.6 svojstva asocijativnosti i komutativnosti nisu nipošto očita ni nasljedna, budući da se radilo o *novoj* operaciji. Ta smo svojstva morali provjeriti eksplicitno – raspisivanjem po definiciji same operacije.

Primjer 1.7. Simetrična grupa stupnja n.

Neka je S_n skup svih bijektivnih preslikavanja

$$f : \{1, 2, \ldots, n\} \to \{1, 2, \ldots, n\}.$$

Pokažimo da je S_n grupa s obzirom na operaciju komponiranja funkcija. Vrijede sljedeće tvrdnje:

(1) Kompozicija bijekcija je bijekcija. Dakle, $\circ$ je *binarna* operacija na S_n.

(2) Komponiranje funkcija je asocijativno.

(3) Identiteta je bijekcija.

(4) Svaka bijektivna funkcija ima inverz f^{-1} i on je bijekcija.

Komponiranje funkcija općenito nije komutativno. Pokazali smo da je S_n grupa koja se naziva *simetrična grupa stupnja n*.

Bijekciju $f : \{1, 2, \ldots, n\} \to \{1, 2, \ldots, n\}$ još nazivamo *permutacija* i zapisujemo

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ f(1) & f(2) & f(3) & \cdots & f(n) \end{pmatrix}.$$

Konkretno, za $n = 4$ i za permutacije $f, g \in S_4$

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}, \quad g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix},$$

njihove kompozicije su

$$f \circ g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad g \circ f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

Inverz od f je

$$f^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Jednostavno možemo ustanoviti da S_n ima konačno mnogo elemenata i to njih $n!$. Pišemo $|S_n| = n!$. Kao ilustraciju navedimo sve elemente grupe S_3:

$$S_3 = \{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}\}.$$

♡

Zadatak 1.2. *Neka su $e, f, g \in S_4$ permutacije zadane s*

$$e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \quad g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Je li skup $\{e, f, g\}$ grupa s obzirom na kompoziciju permutacija? Ako nije, postoji li permutacija $h \in S_4$ takva da $(\{e, f, g, h\}, \circ)$ bude grupa?

Uputa: Korisno je, premda ne i nužno, poslužiti se tablicom operacije.

Zadatak 1.3. *Neka je $(G, *)$ grupa. Za svaki $a \in G$ definira se preslikavanje $L_a(x) = a * x$* (množenje slijeva *elementom a) i, analogno, $D_a(x) = x * a$* (množenje zdesna). *Dokažite da su L_a i D_a bijekcije na skupu G. Uočite da su svojstva injektivnosti i surjektivnosti tih preslikavanja usko povezana (kako?) s rješavanjem jednadžbi iz propozicije 1.1.11.*

U slučaju kad je G konačan skup, preslikavanja L_a i D_a su permutacije skupa G. Razmislite kako se ta svojstva odražavaju na tablicu operacije za konačnu grupu.

Zadatak 1.4. *U grupi $(G, *)$ možemo promatrati i jednadžbe oblika $x * x = a$, za zadani $a \in G$. Možemo li zaključiti nešto općenito o postojanju i jedinstvenosti rješenja takvih jednadžbi? Posebno za jednadžbu $x * x = e$? Odgovore argumentirajte primjerima.*

1.1.3 Prsten. Polje

Dolazimo do algebarskih struktura s dvjema operacijama, zbrajanjem i množenjem, koje su međusobno usklađene svojstvom distributivnosti. U strukturi nazvanoj *polje* bit će moguće izvoditi sve osnovne operacije, kako smo već naučeni s racionalnim, realnim ili kompleksnim brojevima, što obuhvaća i „dijeljenje" (osim, dakako, s nulom). To znači da će se u bilo kojem polju moći rješavati linearne jednadžbe s dvije, tri ili više nepoznanica, a stoga i sustavi linearnih jednadžbi. Struktura *prstena* znatno je restriktivnija, ali prsten cijelih brojeva i prsten polinoma važni su primjeri komutativnih prstena s jedinicom, vrlo korisnih, iako njihovi elementi uglavnom nisu invertibilni za operaciju množenja.

Definicija 1.1.15. *Neka je R neprazan skup na kojem su definirane dvije binarne operacije $+$ i $\cdot$. Kažemo da je uređena trojka $(R, +, \cdot)$* ***prsten*** *ako vrijedi*

(i) *$(R, +)$ je Abelova grupa,*

(ii) *$(R, \cdot)$ je polugrupa (to jest operacija $\cdot$ je asocijativna),*

(iii) distributivnost *operacije $\cdot$ obzirom na operaciju $+$:*

$$a(b + c) = ab + ac, \quad (a + b)c = ac + bc,$$

za sve $a, b, c \in R$.

Neutralni element grupe $(R, +)$ naziva se nula *i označava s 0. Ako postoji neutralni element strukture $(R, \cdot)$, on se naziva* jedinica *i označava s 1, a $(R, +, \cdot)$ tada se naziva* ***prsten s jedinicom****. Ako je operacija $\cdot$ komutativna, govorimo o* ***komutativnom prstenu****.*

Prsten koji se sastoji samo od jednog elementa, a taj je neutralni element za zbrajanje i za množenje, tzv. je *trivijalni prsten* $(\{0\}, +, \cdot)$. Nadalje ćemo pod pojmom *prsten* uglavnom smatrati da je riječ o netrivijalnom prstenu, a katkad ćemo to ipak i naglasiti.

Sljedeća propozicija pokazuje svojstvo prstena na koje smo naviknuti iz otprije poznatih primjera, da je umnožak bilo kojeg elementa s 0 jednak 0. To ujedno pokazuje da u netrivijalnom prstenu 0 nema multiplikativni inverz.

Propozicija 1.1.16. *Neka je $(R, +, \cdot)$ prsten. Tada je $a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0$ za sve $a \in R$.*

Dokaz. Vrijedi
$$a \cdot 0 = a \cdot (0 + 0) = a \cdot 0 + a \cdot 0.$$
Pribrajanjem suprotnog elementa od $a \cdot 0$ jednakosti $a \cdot 0 = a \cdot 0 + a \cdot 0$ slijedi tvrdnja. (Ovo posljednje slijedi i prema propoziciji 1.1.12 primijenjenoj na grupu $(R, +)$.) □

Zadatak 1.5. *Dokažite da u svakom prstenu vrijedi*
$$a(-b) = (-a)b = -(ab).$$
Posebno u prstenu s jedinicom vrijedi
$$(-1)a = a(-1) = -a.$$

Primijetimo da smo se u dokazu propozicije 1.1.16 (a i u prethodnom zadatku) morali poslužiti svojstvom distributivnosti jer 0, kao neutralni element za zbrajanje, nema nikakvu posebnu ulogu pri množenju ako ne iskoristimo distributivnost kojom su te operacije povezane. Uočimo još da u svakom prstenu možemo pomnožiti izraze poput $(a+b)(c+d)$ primjenom distributivnosti, no treba pripaziti vrijedi li u pojedinom prstenu i komutativnost množenja. Primjerice,
$$(a + b)^2 = (a + b)(a + b) = a^2 + ab + ba + b^2$$
ili
$$(a + b)(a - b) = a^2 - ab + ba - b^2,$$
ali poznate formule za kvadriranje i za razliku kvadrata primjenjive su samo ako elementi a i b komutiraju (što ne vrijedi općenito, ali vrijedi u komutativnom prstenu).

Propozicija 1.1.17. *Neka je $(R, +, \cdot)$ netrivijalni prsten i neka su elementi $a, b \in R$ invertibilni. Tada je $ab \neq 0$.*

Dokaz. Pretpostavimo suprotno, $ab = 0$. Množenjem slijeva inverzom od a dobivamo $b = a^{-1} \cdot 0$, pa prema propoziciji 1.1.16 slijedi $b = 0$, a to je u proturječju s pretpostavkom da je b invertibilan.

Drukčije, tvrdnja propozicije može se izvesti i primjenom korolara 1.1.10, prema kojem je umnožak invertibilnih elemenata u monoidu također invertibilan, pa je stoga različit od 0. □

U prstenu je općenito moguće postojanje tzv. *djelitelja nule*, a to su elementi prstena čiji je umnožak jednak 0 iako je svaki od njih različit od 0. To nam se može učiniti čudnim jer se to ne može dogoditi za cijele, racionalne, realne ni za kompleksne brojeve.

Prethodne dvije propozicije „sugeriraju" da je smisleno promatrati strukturu definiranu na sljedeći način.

Definicija 1.1.18. *Komutativni prsten s jedinicom $(R, +, \cdot)$ u kojem je svaki element $x \in R\backslash\{0\}$ invertibilan naziva se* **polje**. *Polje se često označava s $\mathbb{F}$.*

Na drugi način možemo reći da je $(\mathbb{F}, +, \cdot)$ polje ako su $(\mathbb{F}, +)$ i $(\mathbb{F}, \cdot)$ grupoidi takvi da vrijedi:

(i) $(\mathbb{F}, +)$ je Abelova grupa,

(ii) $(\mathbb{F}^*, \cdot)$ je Abelova grupa ($\mathbb{F}^* = \mathbb{F}\backslash\{0\}$),

(iii) *distributivnost* operacije $\cdot$ s obzirom na operaciju $+$.

Uočimo da su neutralni elementi za operacije $+$ i $\cdot$, dakle nula i jedinica, nužno različiti jer je F^* grupa pa se podrazumijeva da je to neprazan skup. Budući da je $(\mathbb{F}, \cdot)$ grupoid, definirani su elementi $a \cdot 0$ i $0 \cdot a$ za svaki $a \in \mathbb{F}$. Nije nužno uvrstiti u definiciju zahtjev da bude $a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0$ jer se to može dokazati. Jednakost $0 \cdot 0 = 0$ dokaže se kao u propoziciji 1.1.16. Ako bi za neki $a \neq 0$ vrijedilo $a \cdot 0 = b$ i $b \neq 0$, slijedilo bi $0 = a^{-1}b$, što je u proturječju s propozicijom 1.1.17.

Koristeći se tvrdnjama i primjerima iz prethodnog poglavlja, možemo zaključiti sljedeće:

- $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ je komutativni prsten s jedinicom.
- $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$, $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ i $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ su polja.
- $(\mathbb{Z}_m, +_m, \cdot_m)$ je komutativni prsten s jedinicom koji se naziva *prsten cijelih brojeva modulo m*. $(\mathbb{Z}_m, +_m, \cdot_m)$ je polje ako i samo ako je $m = p$ prosti broj. $\mathbb{Z}_p$ je važan primjer tzv. *konačnog* polja, to jest polja s konačno mnogo elemenata.

  Uočimo da npr. u prstenu $(\mathbb{Z}_6, +_6, \cdot_6)$ postoje djelitelji nule, jer je $2 \cdot 3 = 0 \pmod 6$, a također $3 \cdot 4 = 0 \pmod 6$. Općenito, ako je m složeni broj, u prstenu $(\mathbb{Z}_m, +_m, \cdot_m)$ postoje djelitelji 0 (zašto?) tako da takav prsten ne može biti polje (v. propoziciju 1.1.17). Na postojanje djelitelja nule trebat ćemo se poslije naviknuti i pri množenju kvadratnih matrica.

- $(\mathcal{P},+,\cdot)$ je komutativni prsten s jedinicom ($e(x)=1$ za sve x). Često se $\mathcal{P}$ naziva *prsten polinoma.* Nadalje, za prstene polinoma još se upotrebljavaju oznake $\mathbb{Z}[x]$, $\mathbb{Q}[x]$, $\mathbb{R}[x]$, $\mathbb{C}[x]$ u ovisnosti u tome iz kojeg se skupa uzimaju koeficijenti polinoma ($\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ ili $\mathbb{C}$).
- $(\mathbb{Q}(\sqrt{2}),+,\cdot)$ je polje (što je pokazano u primjeru 1.5). Općenito za broj $d\in\mathbb{N}$ koji nije potpuni kvadrat definira se
$$\mathbb{Q}(\sqrt{d})=\{a+b\sqrt{d}\,:\,a,b\in\mathbb{Q}\}$$
i pokazuje (slično kao u primjeru 1.5) da je $(\mathbb{Q}(\sqrt{d}),+,\cdot)$ polje. Naziv mu je *kvadratno polje.* (Za d koji jest potpuni kvadrat je $\mathbb{Q}(\sqrt{d})=\mathbb{Q}$, a ako nije, vrijedi $\mathbb{Q}\subset\mathbb{Q}(\sqrt{d})$).

1.2 Definicija i osnovna svojstva vektorskog prostora. Primjeri

Slijedi definicija ključnog pojma, a to je vektorski prostor. Ta definicija može se činiti opsežnom i pritom zahtjevnom za razumijevanje, no s obzirom na to da smo već upoznati sa strukturom Abelove grupe, preostaje još pridodati operaciju množenja elemenata te grupe elementima nekog polja, „skalarima” (najčešće realnim ili kompleksnim brojevima). Ta nova operacija nije binarna, nego „hibridna” jer po jednom skalaru i vektoru pridružuje ponovno vektor. Svojstva propisana za tu operaciju podudaraju se sa svojstvima poznatima za množenje vektora iz prostora V^3 realnim brojevima pa neće biti teško naviknuti se na njih.

Počevši od same definicije, služit ćemo se najjednostavnijim oznakama kakve su uobičajene za vektorske prostore. To znači da će jednaku oznaku $+$ imati operacije u dvjema različitim Abelovim grupama, zbrajanje vektora i zbrajanje skalara u polju, a da se za množenje u polju neće upotrebljavati nikakva posebna oznaka. Za umnožak skalara i vektora samo privremeno pisat će se oznaka $\cdot$, koju ćemo kasnije izostavljati jer će iz oblika zapisa uvijek biti jasno koja se operacija primjenjuje. Naglašavamo ipak da je riječ o četiri različite operacije, od toga tri binarne i jednoj „hibridnoj”, a u zapisivanju računa poput
$$(\alpha+\beta)\cdot(a+b)=\alpha\cdot a+\beta\cdot a+\alpha\cdot b+\beta\cdot b$$
ili, još jednostavnije,
$$(\alpha+\beta)(a+b)=\alpha a+\beta a+\alpha b+\beta b$$
podrazumijevat će se da $\alpha+\beta$ predstavlja zbroj skalara, $a+b$ zbroj vektora, dok je $\alpha\cdot a$, odnosno αa umnožak vektora a skalarom α.

Definicija 1.2.1. *Neka je $(V,+)$ Abelova grupa, a $\mathbb{F}$ polje. Ako je zadano preslikavanje $\cdot:\mathbb{F}\times V\to V$ koje zadovoljava sljedeća svojstva:*

(1) $\alpha\cdot(\beta\cdot a)=(\alpha\beta)\cdot a$, *za sve* $\alpha,\beta\in\mathbb{F}$, $a\in V$, *(kvaziasocijativnost)*

(2) $(\alpha+\beta)\cdot a=\alpha\cdot a+\beta\cdot a$, *za sve* $\alpha,\beta\in\mathbb{F}$, $a\in V$,
(distributivnost operacije $\cdot$ u odnosu na zbrajanje u $\mathbb{F}$)

(3) $\alpha \cdot (a+b) = \alpha \cdot a + \alpha \cdot b$, *za sve* $\alpha \in \mathbb{F}$, $a, b \in V$,

(distributivnost operacije $\cdot$ *u odnosu na zbrajanje u* V*)*

(4) $1 \cdot a = a$, *za sve* $a \in V$,

tada se uređena trojka $(V, +, \cdot)$ *naziva* ***vektorski*** *ili* ***linearni prostor nad poljem*** $\mathbb{F}$. *Ako je* $\mathbb{F} = \mathbb{R}$, *govorimo o* ***realnom vektorskom prostoru****, a ako je* $\mathbb{F} = \mathbb{C}$, *o* ***kompleksnom vektorskom prostoru****.*

Elemente skupa V *zovemo* ***vektorima****, a elemente polja* $\mathbb{F}$ ***skalarima****. Neutralni element (nulu) Abelove grupe* $(V, +)$ *zovemo* ***nulvektor*** *i označavamo s* 0_V.

Operaciju $\cdot$ *nazivamo* ***množenje vektora skalarom*** *i umjesto* $\alpha \cdot a$ *često pišemo* αa.

Skup koji se sastoji samo od nulvektora, $\{0_V\}$ *također je vektorski prostor, a nazivamo ga* ***trivijalni prostor****.*

Navedimo nekoliko napomena o načinu označavanja. Vektorski prostor $(V, +, \cdot)$ kratko ćemo označavati s V. Elemente vektorskog prostora V, vektore, označavat ćemo najčešće s a, b, ..., x, y, v (dakle bez strelice!). Ponekad, gdje je iz konteksta nedvosmisleno, nulvektor 0_V označava se samo s 0. Skalare polja $\mathbb{F}$ označavamo u pravilu malim slovima grčkog alfabeta α, β, ..., λ, μ, ...

Primjer 1.8. Vektorski prostori V^1, V^2 i V^3.

Na kolegiju *Analitička geometrija* proučavali smo skup vektora, to jest skup klasa usmjerenih (orijentiranih) dužina na pravcu (V^1), u ravnini (V^2) i u prostoru (V^3). U onom što slijedi pišemo samo V^3, a sve tvrdnje odnose se i na V^1 i V^2. Na skupu V^3 definirali smo zbrajanje vektora pomoću pravila trokuta na odgovarajućim predstavnicima,

$$\vec{a} + \vec{b} = [\overrightarrow{AB}] + [\overrightarrow{BC}] = [\overrightarrow{AC}].$$

Budući da smo pokazali da je tako zadana binarna operacija asocijativna i komutativna, zatim da postoji neutralni element $\vec{0} = [\overrightarrow{AA}]$ te je svakom vektoru $\vec{a} = [\overrightarrow{AB}]$ suprotan $[\overrightarrow{BA}] = -\vec{a}$, zaključujemo da je $(V^3, +)$ Abelova grupa.

Operacija množenja vektora skalarom uređenom paru $(\alpha, \vec{a})$, $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$, $\vec{a} \in V^3\backslash\{\vec{0}\}$ pridružuje vektor $\alpha\vec{a}$ čiji je modul $|\alpha||\vec{a}|$, smjer isti kao smjer vektora $\vec{a}$ i orijentacija ista kao $\vec{a}$ ako je $\alpha > 0$, odnosno suprotna ako $\alpha < 0$. U trivijalnom slučaju ($\alpha = 0$ ili $\vec{a} = \vec{0}$) je $\alpha\vec{a} = \vec{0}$. Pokazali smo da su zadovoljena svojstva (1) do (4) definicije 1.2.1, pa je $(V^3, +, \cdot)$ vektorski prostor. Na sličan način utvrđuje se da je i skup radijvektora $V^3(O)$ vektorski prostor.

♡

U sljedeće tri propozicije sadržana su svojstva koja vrijede u svakom vektorskom prostoru V.

Propozicija 1.2.2. *Vrijedi*

(i) $0 \cdot a = 0_V$, *za sve* $a \in V$,

(ii) $\alpha \cdot 0_V = 0_V$, *za sve* $\alpha \in \mathbb{F}$.

Dokaz. **(i)** S jedne strane je $a = a + 0_V$, a s druge $a = (1+0)a = 1 \cdot a + 0 \cdot a = a + 0 \cdot a$. Stoga je

$$a + 0_V = a + 0 \cdot a,$$

pa pribrajanjem suprotnog vektora $-a$ prethodnoj jednakosti slijedi $0 \cdot a = 0_V$.

(ii) Iz $\alpha a = 0_V + \alpha a$, a s druge $\alpha a = \alpha(0_V + a) = \alpha 0_V + \alpha a$ je

$$0_V + \alpha a = \alpha 0_V + \alpha a.$$

Pribrajanjem suprotnog vektora $-\alpha a$ prethodnoj jednakosti slijedi $\alpha 0_V = 0_V$.

□

Uočimo da smo u vektorskom prostoru V^3 (odnosno V^1 i V^2) definirali da je $\alpha \cdot \vec{0} = \vec{0}$ i $0 \cdot \vec{a} = \vec{0}$ pa propoziciju 1.2.2 nismo trebali dokazivati.

Propozicija 1.2.3. $\alpha \cdot a = 0_V$ *ako i samo ako je* $\alpha = 0$ *ili* $a = 0_V$.

Dokaz. Dovoljnost slijedi iz propozicije 1.1.11.

Pokažimo nužnost. Pretpostavimo da je $\alpha \cdot a = 0_V$. Ako je $\alpha = 0$, pokazali smo tvrdnju. Dakle, pretpostavimo da $\alpha \neq 0$. Stoga postoji inverz $\alpha^{-1} \in \mathbb{F}$. Vrijedi da je

$$a = (\alpha^{-1}\alpha)a = \alpha^{-1}(\alpha a) = \alpha^{-1}0_V = 0_V,$$

što je i trebalo pokazati. □

Propozicija 1.2.4. *Vrijedi*

$$(-\alpha)a = -(\alpha a) = \alpha(-a),$$

za sve $\alpha \in \mathbb{F}$ *i* $a \in V$.

Dokaz. Kako je

$$(-\alpha)a + \alpha a = (-\alpha + \alpha)a = 0 \cdot a = 0_V,$$

slijedi da je suprotan vektor od αa, to jest $-(\alpha a)$ jednak vektoru $(-\alpha)a$. □

Prethodna propozicija posebno kaže da je suprotan vektor od a jednak umnošku vektora a skalarom -1, to jest $-a = (-1)a$.

U nizu primjera koji slijede pokazat ćemo da mnogi matematički objekti (uređene n-torke, polinomi, funkcije ...) imaju „karakter" vektora.

Primjer 1.9. Koordinatni prostor $\mathbb{R}^n$.

Neka je $n \in \mathbb{N}$ i $\mathbb{R}^n$ skup svih uređenih n-torki realnih brojeva, odnosno

$$\mathbb{R}^n = \underbrace{\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}}_{n-puta} = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \,:\, x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}\}.$$

Uz prirodno definirano zbrajanje po koordinatama (ili koordinatno zbrajanje),

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) + (y_1, y_2, \ldots, y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n),$$

je $(\mathbb{R}^n, +)$ Abelova grupa. Množenje uređene n-torke realnim brojem α definira se također koordinatno,

$$\alpha \cdot (x_1, x_2, \ldots, x_n) = (\alpha x_1, \alpha x_2, \ldots, \alpha x_n).$$

Budući da su obje operacije definirane koordinatno, lako se može ustanoviti da je $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$ realan vektorski prostor koji se ponekad naziva *realan n-dimenzionalni koordinatni prostor.*

Općenito svaki skup uređenih n-torki elemenata iz nekog polja $\mathbb{F}$, $\mathbb{F}^n$, uz koordinatno definirane operacije zbrajanja i množenja (iz polja), bit će vektorski prostor nad poljem $\mathbb{F}$. U skladu s tom opaskom istaknimo vektorski prostor $(\mathbb{Z}_p^n, +_p, \cdot_p)$ s konačno mnogo elemenata (p^n).

Posebno za $n = 1$ dobivamo da je polje $\mathbb{F}$ vektorski prostor *nad samim sobom.* Pritom elementi polja imaju dvostruku ulogu – oni su i vektori i skalari, a operacija množenja iz polja predstavlja operaciju množenja skalarom.

♡

Primjer 1.10. Kompleksni brojevi.

Kao što smo vidjeli u prethodnom primjeru, polje kompleksnih brojeva $\mathbb{C}$ možemo shvatiti i kao vektorski prostor nad samim sobom. No možemo ga shvatiti i kao vektorski prostor nad poljem $\mathbb{R}$, odnosno kao realan vektorski prostor. U tom slučaju koristimo se oznakom $\mathbb{C}_{\mathbb{R}}$.

Općenito svaki vektorski prostor nad $\mathbb{C}$ ujedno je vektorski prostor nad $\mathbb{R}$.

♡

Primjer 1.11. Prostor nizova.

Neka je

$$\mathbb{R}^{\mathbb{N}} = \{(x_i) \,:\, x_i \in \mathbb{R}\}$$

skup svih nizova realnih brojeva. Uz koordinatno zbrajanje i množenje skalarom

$$(x_i) + (y_i) = (x_i + y_i), \quad \alpha(x_i) = (\alpha x_i),$$

$\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ je realan vektorski prostor.

♡

Primjer 1.12. Prostor polinoma.

Neka je $n \in \mathbb{N}$. S $\mathcal{P}_n$ označili smo skup svih polinoma u jednoj varijabli s realnim koeficijentima stupnja manjeg ili jednakog n zajedno s nulpolinomom,

$$\mathcal{P}_n = \{p \,:\, \mathrm{st}(p) \leq n\} \cup \{p \,:\, p(x) = 0, x \in \mathbb{R}\}.$$

U prethodnom odsječku ustanovili smo da je $\mathcal{P}_n$ uz uobičajeno zbrajanje polinoma Abelova grupa. Množenje polinoma p realnim brojem α definiramo prirodno, $\alpha p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je polinom definiran s

$$(\alpha p)(x) = \alpha(p(x)) = \sum_{i=0}^{n} (\alpha a_i) x^i, \; x \in \mathbb{R},$$

pri čemu je $p(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$. Odmah se vidi da je uz te operacije $\mathcal{P}_n$ realan vektorski prostor. Analogno, skup svih polinoma u jednoj varijabli s realnim koeficijentima $\mathcal{P}$ također je realan vektorski prostor.

♡

Primjer 1.13. Prostor funkcija.

Prethodni primjer možemo generalizirati na skup realnih funkcija realne varijable kojeg označavamo s $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.
Operacije zbrajanja i množenja funkcija realnim brojem definiramo *po točkama*. Za $f, g \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ i $\alpha \in \mathbb{R}$

$$f + g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \; (f+g)(t) = f(t) + g(t), \; t \in \mathbb{R}.$$

$$\alpha f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \; (\alpha f)(t) = \alpha f(t), \; t \in \mathbb{R}.$$

Kako su operacije zadane po točkama, svojstva komutativnosti, asocijativnosti i distributivnosti vrijede jer vrijede u polju $\mathbb{R}$. Neutralni element zbrajanja je funkcija $n(t) = 0$, za sve $t \in \mathbb{R}$. Svaka funkcija f ima svoju suprotnu $-f$, $(-f)(t) = -f(t)$, $t \in \mathbb{R}$. Stoga je $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ realan vektorski prostor.

♡

Primjer 1.14. Prostor matrica reda 2.

Uređena četvorka $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$ zapisana u kvadratnu shemu

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

naziva se *realna matrica reda* 2. Uobičajeno je matrice označavati velikim tiskanim slovima A, B, ..., te njihove elemente, npr. za matricu A, s a_{ij}, gdje indeks upućuje na položaj elementa u matrici – a_{ij} se nalazi na presjeku i-tog retka i j-tog stupca. Dakle,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

Skup svih realnih matrica reda 2 označavamo s $M_2(\mathbb{R})$.

Na skupu $M_2(\mathbb{R})$ zbrajanje je definirano po elementima (što upravo odgovara koordinatnom zbrajanju),

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} \end{pmatrix}.$$

Stoga je ova binarna operacija očito komutativna i asocijativna. Neutralni element zbrajanja je matrica čiji su svi elementi jednaki 0,

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

a zovemo je *nulmatrica*. Svaka matrica A ima suprotnu matricu $-A$ danu s

$$-A = \begin{pmatrix} -a_{11} & -a_{12} \\ -a_{21} & -a_{22} \end{pmatrix}.$$

Prema svemu navedenom može se zaključiti da je $(M_2(\mathbb{R}), +)$ Abelova grupa.

Operacija množenja skalarom također se definira prirodno, po elementima (odnosno koordinatno). Za $\alpha \in \mathbb{R}$ i $A \in M_2(\mathbb{R})$ je

$$\alpha A = \alpha \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} \end{pmatrix}.$$

Jasno je da je $M_2(\mathbb{R})$ realan vektorski prostor.

Na isti način možemo ustanoviti da je skup svih matrica reda 2 čiji su elementi kompleksni brojevi, odnosno kompleksnih matrica reda 2, u oznaci $M_2(\mathbb{C})$ kompleksan vektorski prostor. U skladu s napomenom iz primjera 1.10 skup $M_2(\mathbb{C})$ ponekad ćemo shvaćati kao realan vektorski prostor i prema tome označavati s $M_2(\mathbb{C})_{\mathbb{R}}$.

♡

Primjer 1.15. *„Egzotičan”* vektorski prostor.

Neka je $V = \mathbb{R}^+ = \{a \in \mathbb{R} : a > 0\}$. Za $a, b \in V$ i $\alpha \in \mathbb{R}$ definiramo „neobične” operacije zbrajanja $\oplus$ i množenja vektora skalarom $\odot$ na sljedeći način:

$$a \oplus b = ab, \quad \alpha \odot a = a^\alpha.$$

Prvo provjerimo da je $(V, \oplus)$ Abelova grupa. Zaista, V je zatvoren u odnosu na operaciju $\oplus$ jer je $ab > 0$ za $a, b > 0$, to jest $a \oplus b \in V$ za sve $a, b \in V$. Operacija $\oplus$ je asocijativna i komutativna jer standardno množenje u $\mathbb{R}$ ima ta svojstva. Neutralni element je $1 \in V$, a inverz od $a \in V$ je $a^{-1} = \frac{1}{a} \in V$.

Sada provjeravamo potrebna svojstva operacije $\odot$. Zatvorenost vrijedi jer je $a^\alpha > 0$ za sve $a > 0$ i $\alpha \in \mathbb{R}$. Ispitujemo kvaziasocijativnost i distributivnosti. Neka su $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ i $a, b \in V$. Vrijedi

$$\alpha \odot (\beta \odot a) = \alpha \odot a^\beta = \left(a^\beta\right)^\alpha = a^{\beta\alpha} = a^{\alpha\beta} = (\alpha\beta) \odot a.$$

Nadalje,

$$(\alpha + \beta) \odot a = a^{\alpha+\beta} = a^\alpha a^\beta = a^\alpha \oplus a^\beta = (\alpha \odot a) \oplus (\beta \odot a),$$

te

$$\alpha \odot (a \oplus b) = \alpha \odot (ab) = (ab)^\alpha = a^\alpha b^\alpha = a^\alpha \oplus b^\alpha = (\alpha \odot a) \oplus (\alpha \odot b).$$

Konačno, jer je $1 \odot a = a^1 = a$, možemo zaključiti da je $(V, \oplus, \odot)$ jedan realan vektorski prostor.

♡

1.3 Linearna ljuska. Sustav izvodnica. Linearna nezavisnost

Višestrukom primjenom operacija zbrajanja vektora i množenja vektora skalarom u vektorskom prostoru dobivamo vektore oblika koji nazivamo *linearna kombinacija* (ili *linearni spoj*) određenih vektora. Linearna kombinacija vektora tipični je izraz pri svakom računu u vektorskom prostoru pa će pojmovi i svojstva povezana s linearnim kombinacijama imati ključnu ulogu u proučavanju i različitim primjenama vektorskih prostora.

Definicija 1.3.1. *Neka je V vektorski prostor nad poljem $\mathbb{F}$ te $k \in \mathbb{N}$. Za α_1, ...,$\alpha_k \in \mathbb{F}$ i a_1, ..., $a_k \in V$ vektor oblika*

$$\alpha_1 a_1 + \cdots + \alpha_k a_k$$

nazivamo ***linearna kombinacija vektora*** *a_1, ..., a_k s koeficijentima α_1, ...,α_k. Primjenom uobičajenog simbola $\sum$ za sumu, linearnu kombinaciju vektora a_1, ..., a_k sažeto zapisujemo kao $\sum_{i=1}^{k} \alpha_i a_i$.*

Neka je $S \subseteq V$, $S \neq \emptyset$. Skup svih linearnih kombinacija vektora iz S naziva se ***linearna ljuska*** *ili* ***linearni omotač skupa*** *S i označava $[S]$. Dakle,*

$$[S] = \{\alpha_1 a_1 + \cdots + \alpha_n a_n \, : \, n \in \mathbb{N}, a_1, \ldots, a_n \in S, \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{F}\}.$$

Ako je $S = \{a_1, \ldots, a_k\}$, onda je

$$[S] = [\{a_1, \ldots, a_k\}] = \{\alpha_1 a_1 + \cdots + \alpha_k a_k \, : \, \alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{F}\},$$

te skup $[\{a_1, \ldots, a_k\}]$ nazivamo linearnom ljuskom *ili* linearnim omotačem vektora *$a_1, \ldots, a_k$.*

Za prazan skup definira se njegova linearna ljuska kao $[\emptyset] = \{0_V\}$.

Radi jednostavnosti zapisa katkad ćemo izostaviti vitičaste zagrade pa linearnu ljusku zadanog skupa vektora $\{a_1, \ldots, a_k\}$, kraće pisati kao $[a_1, \ldots, a_k]$.

Primijetimo da zahvaljujući svojstvima asocijativnosti i komutativnosti zbrajanja vektora pojedinu linearnu kombinaciju možemo pisati na više načina a da se rezultat ne promijeni. Možemo mijenjati poredak pribrojnika, odnosno grupirati pribrojnike po volji, npr.

$$2a - 5b + 2c - 3d = 2a + 2c - 5b - 3d = (2a + 2c) + (-5b - 3d)$$

za vektore $a, b, c, d \in V$. (Dakako, isti vektor dobivamo daljnjim pojednostavljivanjem zapisa i primjenom poznatih svojstava operacija u V, ako želimo, npr. kao $2(a + c) - (5b + 3d)$). Nadalje, uočimo što je sve varijabilno u definiciji linearne ljuske skupa S. Prvo, to je $n \in \mathbb{N}$ koji označava koliko se vektora iz S uzima u linearnu kombinaciju, zatim varijabilan je izbor n vektora iz S i izbor n skalara iz $\mathbb{F}$ kao koeficijenata. Pritom linearne kombinacije dobivene različitim izborom vektora i skalarnih koeficijenata općenito ne daju različite vektore premda formalno „izgledaju različito".

Uočimo da iz definicije linearne ljuske lako slijede sljedeća jednostavna, ali praktično važna svojstva:

- Za bilo koji $S \subseteq V$ vrijedi: $S \subseteq [S] \subseteq V$ te $[[S]] = [S]$.
- Ako su $S_1, S_2 \subseteq V$ i $S_1 \subseteq S_2$, onda je $[S_1] \subseteq [S_2]$.

Također, čim je polje $\mathbb{F}$ beskonačan skup, npr. polje $\mathbb{R}$, postoji beskonačno mnogo linearnih kombinacija vektora skupa S različitog od $\{0_V\}$. Uskoro ćemo se naviknuti na činjenicu da linearna ljuska „malenog” skupa vektora može biti cijeli vektorski prostor, a upravo to bit će nam iznimno važno.

Propozicija 1.3.2. *Neka je V vektorski prostor nad poljem $\mathbb{F}$, $S \neq \emptyset$ i $S \subseteq V$. Onda je $[S]$ vektorski prostor nad poljem $\mathbb{F}$ s obzirom na iste operacije zbrajanja i množenja skalarom koje su definirane u prostoru V.*

Dokaz.

- Neka su $x, y \in [S]$. Tada su vektori x i y linearne kombinacije vektora iz S pa je to i vektor $x + y$. Stoga je zbrajanje vektora binarna operacija na $[S]$.
- Svojstva asocijativnosti i komutativnosti nasljeđuju se jer je $[S] \subseteq V$.
- Neutralni element zbrajanja vektora, nulvektor, nalazi se u $[S]$ jer je $0_V = 0 \cdot a \in [S]$ za bilo koji $a \in S$.
- Za $x \in [S]$ postoje $k \in \mathbb{N}$, $a_1, \ldots, a_k \in S$ i $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{F}$ takvi da je $x = \alpha_1 a_1 + \cdots + \alpha_k a_k$. Suprotni vektor od x je $-x = (-\alpha_1)a_1 + \cdots + (-\alpha_k)a_k$ pa je $-x \in [S]$.

Sada možemo zaključiti da je $([S], +)$ Abelova grupa. Ustanovimo da vrijede i ostala svojstva vektorskog prostora.

- Neka je $x = \alpha_1 a_1 + \cdots + \alpha_k a_k \in [S]$. Onda je $\lambda x = (\lambda\alpha_1)a_1 + \cdots + (\lambda\alpha_k)a_k \in [S]$ za sve $\lambda \in \mathbb{F}$.
- Kvaziasocijativnost i distributivnosti nasljeđuju se iz vektorskog prostora V.

Dakle, $[S]$ je vektorski prostor nad poljem $\mathbb{F}$ s obzirom na operacije iz V. □

Na ovom mjestu može se učiniti zbunjujućom činjenica da je linearna ljuska podskupa S vektorskog prostora V također vektorski prostor, a jasno je da je $[S]$ podskup od V. Istaknut će biti slučaj kad je $[S]$ jednak cijelom prostoru V, no općenito nije tako.

Na primjeru vektorskog prostora V^3 ili $V^3(O)$ možemo lako uočiti neke podskupove kojima je linearna ljuska jednaka cijelom prostoru, kao i podskupove za koje to nije ispunjeno. Razmislite kako može izgledati linearna ljuska $[S]$ za $S \subset V^3(O)$ ako to nije cijeli $V^3(O)$, imajući u vidu prethodnu propoziciju.

Definicija 1.3.3. *Neka je V vektorski prostor nad poljem $\mathbb{F}$ i $G \subseteq V$. Ako je*

$$V = [G],$$

odnosno ako se svaki vektor iz V može prikazati kao linearna kombinacija (konačno mnogo) vektora iz G, onda kažemo da je G ***sustav izvodnica*** *ili* ***generatora*** *za prostor V, odnosno* skup izvodnica *ili* generatora *za V. Još se može reći da skup G* ***razapinje*** *ili* ***generira*** *prostor V.*

Ako je $V = [G]$, za svaki $x \in V$ *postoje* vektori a_1, ..., $a_k \in G$ i skalari α_1, ..., $\alpha_k \in \mathbb{F}$ takvi da se x prikazuje kao

$$x = \alpha_1 a_1 + \cdots + \alpha_k a_k = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i a_i.$$

Prikaz vektora x u obliku linearne kombinacije nekih vektora iz skupa S općenito nije jednoznačan, to jest pojedini vektor općenito se može na više načina prikazati kao linearna kombinacija vektora iz nekog sustava izvodnica. Pitanje jedinstvenosti prikaza je važno, a njime ćemo se baviti malo kasnije.

Za početak se pitamo postoji li za svaki vektorski prostor V sustav izvodnica i zaključujemo da postoji jer cijeli prostor V možemo shvatiti kao sustav izvodnica, to jest $G = V$. Nadalje, ako G generira prostor V, generira ga i svaki njegov nadskup. Stoga je prirodno pokušati odrediti najmanji mogući (minimalan) skup koji predstavlja sustav izvodnica. No prije toga promotrimo primjere nekih sustava izvodnica.

- Ako je $\vec{a} \in V^1$ i $\vec{a} \neq \vec{0}$, onda $\{\vec{a}\}$ generira V^1.
- Neka su $\vec{a}$ i $\vec{b}$ u V^2 nekolinearni vektori. U kolegiju prethodniku, Analitička geometrija, pokazali smo da za svaki $\vec{c} \in V^2$ postoje (jedinstveni) skalari $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ takvi da je $\vec{c} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}$. Dakle, možemo zaključiti da skup koji se sastoji od bilo koja dva nekolinearna vektora predstavlja sustav izvodnica za V^2.
- Analogno, skup od bilo koja tri nekomplanarna vektora predstavlja sustav izvodnica za V^3.
- Neka je $x = (x_1, x_2)$ proizvoljan vektor iz $\mathbb{R}^2$. Tada je

  $$x = x_1(1, 0) + x_2(0, 1).$$

  Zaključujemo da se svi $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ mogu zapisati kao linearna kombinacija vektora $e_1 = (1, 0)$ i $e_2 = (0, 1)$, stoga je $\{e_1, e_2\}$ sustav izvodnica za $\mathbb{R}^2$.

  Općenito, $\mathbb{R}^n = [e_1, e_2, \ldots, e_n]$, gdje je $e_1 = (1, 0, \ldots, 0)$, $e_2 = (0, 1, \ldots, 0)$, ...,$e_n = (0, 0, \ldots, 1)$.
- Neka je $S = \{(1, 0), (1, 1), (1, -1)\} \subset \mathbb{R}^2$. Lako se vidi da vrijedi jednakost

  $$(x_1, x_2) = (x_1 - x_2)(1, 0) + x_2(1, 1),$$

  za sve $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$. Stoga je skup $\{(1, 0), (1, 1)\}$ sustav izvodnica za $\mathbb{R}^2$, pa je to i njegov nadskup S. Nadalje, vrijedi da je

  $$(x_1, x_2) = (x_1 - x_2 - 2t)(1, 0) + (x_2 + t)(1, 1) + t(1, -1),$$

  za sve $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ te proizvoljan $t \in \mathbb{R}$. Dakle, prikaz proizvoljnog vektora iz $\mathbb{R}^2$ kao linearne kombinacije vektora skupa S *nije jednoznačan*. (Štoviše, budući da se $t \in \mathbb{R}$ može izabrati po volji, prikaza ima beskonačno mnogo). Za razliku od toga vektor iz $\mathbb{R}^2$ *jednoznačno* se prikazuje kao linearna kombinacija vektora $(1, 0)$ i $(1, 1)$.

- Neka je $\{p_0, p_1, \ldots, p_n\} \subset \mathcal{P}_n$, pri čemu je $p_i(x) = x^i$ za $i = 0, 1, \ldots, n$. Kako je za $p \in \mathcal{P}_n$
$$p(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i = \sum_{i=0}^{n} a_i p_i(x), \ \forall x \in \mathbb{R},$$
to jest $p = \sum_{i=0}^{n} a_i p_i$, slijedi da je $\{p_0, \ldots, p_n\}$ sustav izvodnica za $\mathcal{P}_n$.

  Skup $\{p_0, p_1, p_2, \ldots\} \subset \mathcal{P}$ razapinje vektorski prostor $\mathcal{P}$. Uočimo da je $\{p_0, p_1, p_2, \ldots\}$ beskonačan skup. Uz to možemo zaključiti da ne postoji konačan skup polinoma koji razapinje prostor $\mathcal{P}$. Naime, u konačnom skupu polinoma postoji jedan ili više polinoma s najvećim stupnjem u tom skupu, recimo stupnjem m. Linearnim kombinacijama polinoma iz tog skupa ne može se dobiti polinom stupnja većeg od m pa taj skup očito ne može generirati cijeli prostor $\mathcal{P}$.

- Kompleksan broj z je oblika $z = \alpha + i\beta$ za neke $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Ako polje $\mathbb{C}$ shvatimo kao realan vektorski prostor, $\mathbb{C}_{\mathbb{R}}$, skup $\{1, i\}$ očito je njegov sustav izvodnica.

  Skup $\{1\}$ ili općenito $\{z\}$ za $z \neq 0$ predstavlja sustav izvodnica za $\mathbb{C}$ – kompleksan vektorski prostor.

Definicija 1.3.4. *Vektorski prostor je* ***konačnogeneriran*** *ako sadrži barem jedan konačan sustav izvodnica.*

Iz navedenih primjera možemo zaključiti da su prostori V^1, V^2, V^3, $\mathbb{R}^2$, $\mathcal{P}_n$ konačnogenerirani, dok je $\mathcal{P}$ primjer prostora koji nije konačnogeneriran. Na ovom predmetu bavit ćemo se konačnogeneriranim vektorskim prostorima, ali ponekad, radi primjera i usporedbe, spomenut ćemo i neke vektorske prostore koji nisu konačnogenerirani.

Propozicija 1.3.5. *Neka je V vektorski prostor nad poljem $\mathbb{F}$ i $G \subseteq V$ skup izvodnica prostora V. Ako se vektor $a \in G$ može prikazati kao linearna kombinacija* preostalih *vektora iz G, onda je $G \backslash \{a\}$ također skup izvodnica prostora V.*

Dokaz. Proizvoljan vektor x iz V može se prikazati kao linearna kombinacija nekih vektora iz G pa pretpostavimo da je
$$x = \alpha a + \sum_{i=1}^{n} \beta_i b_i,$$
za neke $n \in \mathbb{N}$, $b_1, \ldots, b_n \in G\backslash\{a\}$ i $\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_n \in \mathbb{F}$. Nadalje, $a \in G$ se može prikazati kao linearna kombinacija vektora iz $G\backslash\{a\}$, pa postoje $k \in \mathbb{N}$, $b'_1, \ldots, b'_k \in G\backslash\{a\}$ i $\beta'_1, \ldots, \beta'_k \in \mathbb{F}$ takvi da je
$$a = \sum_{j=1}^{k} \beta'_j b'_j.$$

Stoga je

$$x = \alpha(\sum_{j=1}^{k} \beta'_j b'_j) + \sum_{i=1}^{n} \beta_i b_i = \sum_{j=1}^{k} (\alpha\beta'_j) b'_j + \sum_{i=1}^{n} \beta_i b_i,$$

odnosno x je linearna kombinacija vektora iz $G \backslash \{a\}$. □

Primijetimo da se za $S \subseteq V$ i bez pretpostavke da je S sustav izvodnica može ustvrditi: za $a \in S$ vrijedi

$$a \in [S \backslash \{a\}] \ \Leftrightarrow \ [S \backslash \{a\}] = [S].$$

Argument je isti kao u dokazu prethodne propozicije, samo što se promatra prikaz bilo kojeg vektora $x \in [S]$ (a to nije nužno cijeli V kao $[S]$).

Već smo spomenuli da nas zanima odrediti što je moguće manji sustav izvodnica. Propozicija 1.3.5 kaže nam kako operativno smanjiti skup izvodnica konačnogeneriranog vektorskog prostora. Dakle, svaki vektor koji je linearna kombinacija preostalih vektora izbacujemo iz sustava izvodnica i tako dobijemo novi sustav izvodnica kojem se broj vektora smanji za jedan (uz pretpostavku da smo krenuli od konačnog skupa izvodnica). Ponavljajući postupak, doći ćemo do *minimalnog* skupa izvodnica, to jest do skupa u kojem se nijedan vektor ne može prikazati kao linearna kombinacija preostalih. Vidjet ćemo da je takav skup karakteriziran svojstvom *linearne nezavisnosti.*

Definicija 1.3.6. *Neka je V vektorski prostor nad poljem $\mathbb{F}$ i neka je $S = \{a_1, \ldots, a_k\}$ njegov konačan podskup. Kažemo da je S* ***linearno nezavisan*** *skup vektora ako se nulvektor 0_V može na jedinstven način prikazati kao linearna kombinacija vektora iz S, to jest ako iz*

$$\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \cdots + \alpha_k a_k = 0_V \tag{1.4}$$

slijedi da je $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_k = 0$. U suprotnom, to jest ako postoji izbor skalara α_1, $\ldots$, α_k takav da je barem jedan skalar $\alpha_i \neq 0$ i da vrijedi (1.4), kažemo da je skup S ***linearno zavisan****.*

Često kažemo da je S linearno nezavisan ako je prikaz nulvektora u (1.4) *nužno* trivijalan, odnosno ako je (1.4) moguć *samo za trivijalan izbor* skalara $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$, dakle da su svi α_i jednaki nuli. S je linearno zavisan ako u (1.4) imamo *netrivijalan* prikaz, odnosno ako postoji *netrivijalan izbor skalara* $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ za koje vrijedi (1.4).

Napomenimo da se definicija 1.3.6 odnosi samo na konačne skupove, a mi ćemo samo takve i promatrati. *Beskonačan* skup je *linearno nezavisan* samo ako je svaki njegov konačan podskup linearno nezavisan, odnosno *linearno zavisan* ako postoji barem jedan konačan podskup koji je linearno zavisan.

Prisjetimo se nekih primjera linearno nezavisnih skupova vektora o kojima je bilo riječi u *Analitičkoj geometriji.*

- Neka su $\vec{a}, \vec{b}$ u V^2 (ili u V^3) nekolinearni. Onda je skup $\{\vec{a}, \vec{b}\}$ linearno nezavisan.
- Neka su $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ u V^3 nekomplanarni. Onda je skup $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ linearno nezavisan.
- Neka su $e_1 = (1, 0)$ i $e_2 = (0, 1)$ iz $\mathbb{R}^2$. Tada je skup $\{e_1, e_2\}$ linearno nezavisan. Zaista, iz
$$\alpha e_1 + \beta e_2 = 0_V,$$
odnosno $\alpha(1, 0) + \beta(0, 1) = (\alpha, \beta) = (0, 0)$, slijedi $\alpha = 0$ i $\beta = 0$.

  Općenito, skup $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ u $\mathbb{R}^n$ je linearno nezavisan.
- Skup $\{p_0, p_1, \ldots, p_n\}$, gdje je $p_i(x) = x^i$, $x \in \mathbb{R}$, za $i = 0, 1, \ldots, n$, je linearno nezavisan u prostoru $\mathcal{P}$. Zaista, iz
$$\sum_{i=0}^{n} \alpha_i p_i = 0_{\mathcal{P}},$$
pri čemu smo s $0_{\mathcal{P}}$ označili nulpolinom, slijedi da je
$$\sum_{i=0}^{n} \alpha_i p_i(x) = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i x^i = 0,$$
za sve $x \in \mathbb{R}$, a to je jedino moguće za $\alpha_0 = \cdots = \alpha_n = 0$ (Teorem o nulpolinomu).

Propozicija 1.3.7. *Jednočlani skup, $S = \{a\}$, linearno je nezavisan ako i samo ako je $a \neq 0_V$.*

Dokaz. Pokazujemo nužnost: ako je $\{a\}$ je linearno nezavisan, onda je $a \neq 0_V$. Obrat po kontrapoziciji te tvrdnje kaže: ako je $a = 0_V$, $\{a\}$ je linearno zavisan. Zaista, prema propoziciji 1.2.3 jednakost $\alpha \cdot a = \alpha \cdot 0_V = 0_V$ vrijedi za sve $\alpha \in \mathbb{F}$, pa je ispunjena netrivijalno (npr. za $\alpha = 1$).

Obratno, pretpostavimo da $a \neq 0_V$. Prema propoziciji 1.2.3 jednakost $\alpha a = 0_V$ povlači da je $\alpha = 0$ (jer $a \neq 0_V$). Stoga je $S = \{a\}$ linearno nezavisan. □

Korolar 1.3.8. *Jednočlan skup, $S = \{a\}$, linearno je zavisan ako i samo je $a = 0_V$.*

Propozicija 1.3.9. (i) *Podskup linearno nezavisnog skupa je linearno nezavisan.*

(ii) *Nadskup linearno zavisnog skupa je linearno zavisan.*

Dokaz. **(i)** Neka je $S = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ linearno nezavisan skup te S_1 neki njegov pravi podskup. Bez smanjenja općenitosti pretpostavimo da je $S_1 = \{a_1, a_2, \dots, a_k\}$ uz $k < n$. Nadalje, pretpostavimo suprotno, da je S_1 linearno zavisan. Tada postoje skalari α_1, ..., α_k takvi da je barem jedan $\alpha_j \neq 0$, $1 \leq j \leq k$ i

$$\sum_{i=1}^{k} \alpha_i a_i = 0_V.$$

Stavimo da $\alpha_j = 0$ za sve $j = k+1, \dots, n$ i ustanovimo da je

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i a_i = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i a_i + \sum_{i=k+1}^{n} 0 \cdot a_i = 0_V$$

netrivijalan prikaz nulvektora pomoću vektora iz S. Dakle, S je linearno zavisan, što je u proturječju s početnom pretpostavkom. Znači, S_1 je linearno nezavisan.

(ii) Slično kao u (i), za linearno zavisan skup $S = \{a_1, \dots, a_k\}$ i njegov nadskup $S_2 = \{a_1, \dots, a_k, b_1, \dots, b_n\}$ vrijedi da postoji netrivijalan izbor skalara $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ te $\beta_1 = \dots = \beta_n = 0$ takvi da vrijedi

$$\sum_{i=1}^{k} \alpha_i a_i + \sum_{i=1}^{n} \beta_i b_i = 0_V,$$

pa je i S_2 linearno zavisan skup.

□

Budući da smo ustanovili da je skup $\{0_V\}$ linearno zavisan, imamo sljedeću posljedicu prethodne propozicije.

Korolar 1.3.10. *Svaki skup koji sadrži nulvektor je linearno zavisan.*

Propozicija 1.3.11. *Skup od barem dva vektora je linearno zavisan ako i samo ako se barem jedan vektor iz S može prikazati kao linearna kombinacija preostalih vektora iz S.*

Dokaz. Pretpostavimo da je $S = \{a_1, \dots, a_n\}$ linearno zavisan i $n > 1$. Postoje skalari α_1, ..., α_n takvi da je $\alpha_i \neq 0$, za neki $i \in \{1, \dots, n\}$ i $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i a_i = 0_V$. Odatle je

$$\alpha_i a_i = (-\alpha_1)a_1 + \dots + (-\alpha_{i-1})a_{i-1} + (-\alpha_{i+1})a_{i+1} + \dots + (-\alpha_n)a_n,$$

pa množenjem cijelog izraza s α_i^{-1} (što je moguće jer $\alpha_i \neq 0$) slijedi da je

$$a_i = (-\alpha_1\alpha_i^{-1})a_1 + \dots + (-\alpha_{i-1}\alpha_i^{-1})a_{i-1} + (-\alpha_{i+1}\alpha_i^{-1})a_{i+1} + \dots + (-\alpha_n\alpha_i^{-1})a_n,$$

odnosno a_i je linearna kombinacija preostalih vektora iz S.

Obratno, bez smanjenja općenitosti pretpostavimo da se vektor a_n može prikazati kao linearna kombinacija preostalih vektora iz S. Tada postoje skalari $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}$ za koje vrijedi

$$a_n = \alpha_1 a_1 + \cdots + \alpha_{n-1} a_{n-1}.$$

Odatle je

$$0_V = \alpha_1 a_1 + \cdots + \alpha_{n-1} a_{n-1} + (-1) a_n$$

netrivijalan prikaz nulvektora (jer je $\alpha_n = -1 \neq 0$), pa je skup S linearno zavisan. □

Kao i u primjedbi nakon propozicije 1.3.5, činjenica da se neki $a \in S$ može prikazati kao linearna kombinacija ostalih vektora iz S sažeto se zapisuje s $a \in [S \backslash \{a\}]$. Tvrdnja prethodne propozicije može se onda formulirati tako da je skup S od barem dva vektora linearno zavisan ako i samo ako postoji $a \in S$, $a \in [S \backslash \{a\}]$.

Pri ispitivanju linearne (ne)zavisnosti zadanog skupa posebno se korisnom pokazuje sljedeća inačica prethodne propozicije u kojoj se taj skup promatra kao uređen skup. Tada se, umjesto o prikazu vektora pomoću preostalih vektora, govori o prikazu pomoću *prethodnih* vektora, što u konkretnom zadatku može znatno pojednostavniti postupak.

Propozicija 1.3.12. *Neka je $S = \{a_1, \ldots, a_k\}$ skup vektora, $k > 1$, uređen u navedenom redoslijedu, pri čemu je $a_1 \neq 0_V$. Tada je S linearno zavisan skup ako i samo ako se barem jedan vektor iz S može zapisati kao linearna kombinacija svojih prethodnika.*

Dokaz. Pretpostavimo da je S linearno zavisan skup. Tada postoji netrivijalan izbor skalara $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ takvih da je

$$\alpha_1 a_1 + \cdots + \alpha_k a_k = 0_V.$$

Neka je α_i zadnji koeficijent koji je različit od nule, to jest $\alpha_i \neq 0$ i $\alpha_{i+1} = \cdots = \alpha_k = 0$ ako $i < k$ ili $\alpha_k \neq 0$ ako $i = k$. Jasno je da je $i > 1$ jer je $a_1 \neq 0_V$. Zaista, u protivnom iz $\alpha_1 a_1 = 0_V$ i $\alpha_1 \neq 0$ slijedi $a_1 = 0_V$, što je u kontradikciji s pretpostavkom. Konačno, množenjem jednakosti

$$\alpha_1 a_1 + \cdots + \alpha_{i-1} a_{i-1} + \alpha_i a_i = 0_V$$

s α_i^{-1} (koji postoji jer je $\alpha_i \neq 0$) dobivamo da je

$$a_i = (-\alpha_i^{-1} \alpha_1) a_1 + \cdots + (-\alpha_i^{-1} \alpha_{i-1}) a_{i-1}.$$

Dakle, $a_i \in [a_1, \ldots, a_{i-1}]$.

Obrat slijedi izravno iz propozicije 1.3.11. □

Zadatak 1.6. *Ispitajte linearnu (ne)zavisnost danih skupova u $\mathbb{R}^4$. Uočite u čemu je prednost primjene propozicije 1.3.12.*

(a) $\{(1, 0, 1, 3), (-1, 0, 0, 2)\}$,

(b) $\{(1, 1, 2, 2), (-1, 2, -1, 2), (-2, 1, -3, 0)\}$,

(c) $\{(1,1,0,0),(3,3,0,0),(1,0,0,4),(0,0,-1,2)\}$,

(d) $\{(1,0,1,1),(0,1,-1,2),(2,-1,0,0)\}$.

Zadatak 1.7. *Ako barem jedan element skupa $[a_1,\dots,a_n]$ ima jedinstven prikaz u obliku linearne kombinacije elemenata $a_1,\dots,a_n$, onda je skup $\{a_1,\dots,a_n\}$ linearno nezavisan. Dokažite tvrdnju.*

1.4 Baza vektorskog prostora. Dimenzija

Prethodno razmatranje konačnogeneriranih vektorskih prostora dovodi nas do pojmova bitnih za takve prostore i stoga istaknutih u naslovu ovog odjeljka.

Zamisao prikaza svakog vektora pomoću minimalnog sustava izvodnica pokazat će se, kako ćemo sad vidjeti, podudarnom s potrebom da svaki vektor ima jednoznačan prikaz u prikladnom sustavu izvodnica. Obje te poželjne karakteristike sustava izvodnica ostvaruju se svojstvom linearne nezavisnosti i time dolazimo do pojma baze vektorskog prostora.

Kad se jednom izabere baza, svaki vektor jednoznačno je određen uređenom n-torkom koeficijenata svojeg prikaza u toj bazi, pri čemu je n broj vektora te baze. Kako smo već naviknuti iz vektorskih prostora V^2 i V^3, vektori se na taj način praktički poistovjećuju (identificiraju) s uređenim parovima, odnosno uređenim trojkama realnih brojeva, a općenito riječ je onda o uređenim n-torkama skalara iz pripadnog polja $\mathbb{F}$. Dakle, uvođenjem baze zapravo koordinatiziramo vektorski prostor, čime se znatno olakšava izvođenje operacija s vektorima.

Posebnu važnost ima činjenica koja se u površnom pristupu može učiniti „očiglednom”, ali se iskazuje jednim od osnovnih teorema linearne algebre, čiji dokaz nije posve jednostavan: *Svake dvije baze vektorskog prostora su jednakobrojne.* To znači da je broj vektora (bilo koje) baze jednoznačno određen za svaki konačnogenerirani vektorski prostor. Taj broj naziva se *dimenzija* vektorskog prostora i predstavlja za njega bitan podatak.

Definicija 1.4.1. *Podskup B vektorskog prostora V je* **baza** *prostora V ako je B sustav izvodnica za V i linearno nezavisan skup u V.*

U prethodnom smo odsječku za neke skupove već ustanovili da su sustavi izvodnica i linearno nezavisni u konkretnim vektorskim prostorima.

- Skup $\{\vec{a}\} \subset V^1$ za $\vec{a} \neq \vec{0}$ je baza prostora V^1.

  Neka su $\vec{a}$ i $\vec{b}$ nekolinearni vektori u V^2. Skup $\{\vec{a},\vec{b}\}$ je baza za V^2.

  Neka su $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$ nekomplanarni vektori u V^3. Skup $\{\vec{a},\vec{b},\vec{c}\}$ je baza za V^3.

- Skup $\{e_1,e_2,\dots,e_n\}$ je baza za $\mathbb{R}^n$. Ta se baza naziva *kanonska* ili *standardna.* Naime, vrijedi
$$(x_1,x_2,\dots,x_n) = x_1e_1 + x_2e_2 + \cdots + x_ne_n,$$

tako da su koordinate uređene n-torke jednake upravo koeficijentima u njezinu prikazu kao linearne kombinacije vektora $e_1, e_2, \ldots, e_n$. U tom je smislu baza $(e_1, \ldots, e_n)$ najjednostavnija s obzirom na to da se prikaz vektora u toj bazi izravno očita iz njegovih koordinata.

- Skup $\{p_0, p_1, \ldots, p_n\}$ je baza za $\mathcal{P}_n$.
- Skup $\{1\}$ je baza polja $\mathbb{F}$ koje shvaćamo kao vektorski prostor nad samim sobom. Općenito, svaki skup $\{a\}$, $a \neq 0$, je baza za $\mathbb{F}$.

  Skup $\{1, i\}$ baza je za realan vektorski prostor $\mathbb{C}_\mathbb{R}$.

Teorem 1.4.2. *Neka je $B = \{b_1, \ldots, b_n\}$ baza vektorskog prostora V. Tada za svaki $a \in V$ postoje* jedinstveni *skalari $\beta_1, \ldots, \beta_n$ takvi da je $a = \beta_1 b_1 + \cdots + \beta_n b_n$.*
Vrijedi i obrat. Ako se svaki vektor iz V jedinstveno prikazuje kao linearna kombinacija vektora iz B, B je baza za V.

Dokaz. Pretpostavimo da je B baza i da postoje barem dva prikaza vektora a kao linearne kombinacije vektora iz B, to jest

$$a = \beta_1 b_1 + \cdots + \beta_n b_n, \quad a = \alpha_1 b_1 + \cdots + \alpha_n b_n,$$

za neke $\beta_1, \ldots, \beta_n, \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{F}$. Odatle je

$$0_V = (\alpha_1 - \beta_1) b_1 + \cdots + (\alpha_n - \beta_n) b_n.$$

Budući da je B baza, stoga i linearno nezavisan skup, slijedi da je $\alpha_i - \beta_i = 0$, odnosno $\alpha_i = \beta_i$ za sve $i = 1, \ldots, n$.

Obrat. Iz pretpostavke da se svaki vektor iz V prikazuje kao linearna kombinacija vektora iz B slijedi da je B sustav izvodnica za V. Nadalje, prikaz $0_V = \alpha_1 b_1 + \cdots + \alpha_n b_n$ je jedinstven, pa je nužno $\alpha_i = 0$ za sve $i = 1, \ldots, n$. Dakle, B je linearno nezavisan skup, stoga i baza za V. $\square$

Prisjetimo se da smo u kolegiju *Analitička geometrija* pokazali da skup od dva nekolinearna vektora u V^2, odnosno skup od tri nekomplanarna vektora u V^3 zadovoljava svojstvo iskazano u teoremu 1.4.2 i to je bio razlog što smo te skupove tada proglasili bazom.

Napomena. Pretpostavimo da je $S \subseteq V$ neprazan i konačan skup. Tada svaki vektor $x \in [S]$ ima jedinstven prikaz kao linearna kombinacija vektora iz S ako i samo ako je S linearno nezavisan skup. Pritom, ako je S linearno nezavisan skup, on ne mora biti baza prostora V, ali S je tada svakako baza vektorskog prostora $[S]$ (v. propoziciju 1.3.2). Stoga teorem 1.4.2 možemo shvatiti kao poseban (i osobito važan) slučaj općenitije tvrdnje u kojoj se govori o linearnoj ljusci bilo kojeg linearno nezavisnog skupa $S \subseteq V$. Ako se dodatno pretpostavi da je S sustav izvodnica prostora V, dobivamo tvrdnju o jednoznačnom prikazu svakog vektora iz V pomoću baze.

Nameće nam se pitanje postoji li u svakom netrivijalnom vektorskom prostoru baza. Odgovor na to pitanje je potvrdan, a mi ćemo ga obrazložiti za konačnogenerirane vektorske prostore. (Naime, za vektorske prostore koji nisu konačnogenerirani pitanje postojanja baze – kao beskonačnog skupa, dakako – dublje je teorijske naravi, a potvrdni odgovor ovisi o prihvaćanju određenih aksioma te nema neposrednu praktičnu primjenu). Dakle, nadalje je naša pretpostavka da je prostor V netrivijalan i konačnogeneriran, to jest da postoji konačan skup $G = \{a_1, \ldots, a_n\} \subset V$ takav da je $[G] = V$.

Teorem 1.4.3. *Neka je V konačnogeneriran i netrivijalan vektorski prostor. Ako je $G = \{a_1, \ldots, a_n\} \subset V$ sustav izvodnica za V, G sadrži podskup koji je baza za V.*

Dokaz. Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da su vektori u G različiti od nulvektora. Zaista, ako je $0_V \in G$, $G \backslash \{0_V\}$ je neprazan (jer je V netrivijalan) sustav izvodnica za V.

Ako je G linearno nezavisan skup u V, prema definiciji skup G je baza prostora V.

Pretpostavimo da je $G = \{a_1, \ldots, a_n\}$ linearno zavisan skup. Tada prema propoziciji 1.3.11 postoji vektor $a_i \in G$ koji se može prikazati kao linearna kombinacija vektora iz $G \backslash \{a_i\}$. No prema propoziciji 1.3.5 skup $G_1 = G \backslash \{a_i\}$ također je sustav izvodnica za V. Ako je G_1 linearno nezavisan skup, onda je i baza za V pa smo gotovi s dokazom. U protivnom nastavljamo postupak. U svakom koraku uklanjamo neki vektor koji se može prikazati kao linearna kombinacija ostalih vektora skupa, dok god takav vektor postoji. Svakim korakom broj preostalih vektora smanjuje se za 1. Nakon najviše $n - 1$ koraka dobit ćemo linearno nezavisan podskup skupa G. Taj podskup bit će također sustav izvodnica prostora V jer ni u jednom koraku to svojstvo nije narušeno. U krajnjem slučaju, za $n-1$ koraka, dobit ćemo skup koji se sastoji od samo jednog vektora, različitog od 0_V. $\square$

Korolar 1.4.4. *Svaki netrivijalan konačnogeneriran vektorski prostor ima konačnu bazu.*

Definicija 1.4.5. *Vektorski prostor koji ima konačnu bazu naziva se* ***konačnodimenzionalnim****. Trivijalan prostor $V = \{0_V\}$ smatra se konačnodimenzionalnim. Netrivijalan vektorski prostor koji nema konačnu bazu je* ***beskonačnodimenzionalan****.*

Korolar 1.4.6. *Neka je V netrivijalan vektorski prostor. V je konačnogeneriran ako i samo ako je konačnodimenzionalan.*

Budući da je prethodnim korolarom iskazano da su pojmovi konačnogeneriranog i konačnodimenzionalnog prostora ekvivalentni, može se učiniti da je jedan od tih pojmova suvišan. Uočimo ipak da smo do spoznaje o ekvivalentnosti postojanja konačnog sustava izvodnica i (konačne) baze došli postupno, a da će naziv konačnodimenzionalan dobiti puni smisao nakon definiranja dimenzije.

Pitanje jednakobrojnosti (ili ekvipotentnosti) bilo kojih dviju baza postavlja se prirodno već stoga što u netrivijalnom, konačnogeneriranom vektorskom prostoru nad poljem koje se sastoji od beskonačno mnogo elemenata, za nas redovito nad poljem $\mathbb{R}$ ili $\mathbb{C}$, uvijek postoji više od jedne, a zapravo beskonačno mnogo različitih baza.

Kako bismo to uvidjeli, dovoljno je neki vektor baze pomnožiti bilo kojim skalarom različitim od 0 i 1, odnosno, ako baza sadrži barem dva vektora, označimo ih s a i b, zamijeniti vektor a u bazi s $a + b$, a sve ostale vektore baze ostaviti nepromijenjene. Višestrukom primjenom tih jednostavnih operacija možemo iz jedne baze dobiti novu koja će izgledati „sasvim različito" od početne, ali će se i dalje sastojati od jednakog broja vektora. Primjerice, bazu $\{a, b, c\}$ u nekoliko takvih koraka možemo lako „pretvoriti" u bazu $\{a + c, 2b - c, 3c\}$.

U dobro poznatim prostorima V^2 i V^3 imamo geometrijsku argumentaciju zašto se svaka baza sastoji od točno dva (nekolinearna) vektora, odnosno od točno tri (nekomplanarna) vektora. Za dokaz općenitog teorema o jednakobrojnosti baza u konačnogeneriranom vektorskom prostoru potreban je dakako i općenit pristup koji neće ovisiti o specifičnim svojstvima nekih konkretnih prostora.

Najprije ćemo ustanoviti da linearno nezavisan podskup ne može biti „veći" (po broju elemenata) od bilo kojeg sustava izvodnica istog prostora. Pokazat će se da ako se linearno nezavisan podskup sastoji od jednako mnogo vektora kao neki sustav izvodnica, taj je linearno nezavisan podskup i sam također sustav izvodnica, dakle baza prostora.

Teorem 1.4.7. *Neka je V konačnogenerirani vektorski prostor. Ako u tom prostoru postoji sustav izvodnica, različit od $\{0_V\}$, koji se sastoji od n vektora, onda bilo koji linearno nezavisan podskup prostora V može sadržavati najviše n vektora.*

Dokaz. Uočimo da u slučaju $V = \{0_V\}$ ne postoji linearno nezavisan podskup u V. Nadalje, uzimamo da je $V \neq \{0_V\}$.

Pretpostavimo da je $S = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ sustav izvodnica prostora V te da je X linearno nezavisan podskup prostora V koji sadrži barem n vektora. Označimo nekih n vektora iz X s x_1, x_2 , …, x_n. Pokazat ćemo da je tada skup $X' = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ sustav izvodnica prostora V. Odatle će slijediti da X ne može sadržavati nijedan vektor y koji se ne nalazi u X' jer u protivnom bi y pripadao linearnoj ljusci $[X']$ koja je jednaka cijelom V pa bi X bio linearno zavisan, suprotno pretpostavci. Uz to, budući da je X' linearno nezavisan, kao podskup linearno nezavisnog skupa X, slijedit će da je X' baza prostora V.

Dakle, za dokaz teorema preostaje pokazati da je $X' = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ sustav izvodnica prostora V. To ćemo postići postupnom zamjenom vektora iz skupa S vektorima iz X'. Pritom možemo pretpostaviti da su S i X' disjunktni jer ako se neki vektori iz S podudaraju s nekima iz X', zamijenimo ih odmah tim vektorima iz X'.

Uzmimo vektor x_1 te razmotrimo skup

$$S_1 = \{x_1, a_1, a_2, \ldots, a_n\}$$

kao uređen skup u navedenom redoslijedu vektora. S_1 je svakako sustav izvodnica jer sadrži sustav izvodnica S, a pritom je linearno zavisan jer se x_1 može napisati kao linearna kombinacija ostalih vektora tog skupa. Budući da x_1 nije nulvektor, po propoziciji 1.3.12 neki se vektor iz S_1 može napisati kao linearna kombinacija njemu prethodnih vektora tog uređenog skupa. Taj vektor mora biti neki $a_j \in S$. Uklonimo li a_j iz skupa S_1, preostali skup $S_1 \backslash \{a_j\}$ također je sustav izvodnica, kao i S i S_1 (propozicija 1.3.5). Time smo dobili novi sustav izvodnica koji se od S razlikuje time što je neki $a_j \in S$ zamijenjen vektorom $x_1 \in X'$.

Nastavljamo postupak tako da formiramo uređeni skup

$$S_2 = \{x_2, x_1\} \cup S \backslash \{a_j\} = \{x_2, x_1, a_1, \ldots, \widehat{a_j}, \ldots, a_n\},$$

pri čemu oznaka $\widehat{a_j}$ znači da smo vektor a_j izostavili iz nabrajanja. I S_2 je sustav izvodnica, pritom linearno zavisan pa u njemu postoji vektor koji se može prikazati kao linearna kombinacija prethodnih, a taj vektor nije x_2, kao ni x_1, nego neki vektor a_i, $i \neq j$, iz S. Nadalje, jasno je da je $S_2 \backslash \{a_i\} = \{x_2, x_1, a_1, \ldots, \widehat{a_j}, \ldots, \widehat{a_i}, \ldots, a_n\}$ sustav izvodnica za V.

Nakon n koraka dobivamo sustav izvodnica $S_n = \{x_n, \ldots, x_2, x_1\} = X'$, što nam je i bio cilj. Naglasimo još jedanput da je tijekom postupka zamjene vektora u svakom koraku bilo sačuvano svojstvo da je novodobiveni skup također sustav izvodnica prostora V.

Teorem je time dokazan. $\square$

Kao posljedicu prethodnog teorema možemo lako izvesti ključnu činjenicu o jednakobrojnosti bilo kojih dviju baza konačnogeneriranog vektorskog prostora.

Teorem 1.4.8 (Steinitz). *Svake dvije baze netrivijalnog konačnogeneriranog vektorskog prostora su jednakobrojne* (ekvipotentne).

Dokaz. Podsjetimo da po korolaru 1.4.4 netrivijalni konačnogenerirani vektorski prostor V svakako ima bazu. Neka su sada B_1 i B_2 bilo koje dvije baze prostora V. Označimo $\operatorname{card} B_1 = n_1$, $\operatorname{card} B_2 = n_2$ ($\operatorname{card} B$ je kardinalni broj skupa B, dakle broj elemenata tog skupa).

Kako je B_1 linearno nezavisan skup, a B_2 je sustav izvodnica, po teoremu 1.4.7 slijedi $n_1 \leq n_2$. Obrnuto, kako je B_2 linearno nezavisan skup, a B_1 je sustav izvodnica, vrijedi $n_2 \leq n_1$. Očito mora biti $n_1 = n_2$ pa su dvije baze jednakobrojne. $\square$

Na temelju teorema 1.4.8 možemo definirati dimenziju vektorskog prostora.

Definicija 1.4.9. *Neka je V konačnodimenzionalan vektorski prostor i $V \neq \{0_V\}$. Broj vektora u bilo kojoj bazi prostora V naziva se **dimenzija** vektorskog prostora V i označava s* $\dim V$. *Ako je* $\dim V = n$, *kažemo da je V n-**dimenzionalan vektorski prostor**.*

Za $V = \{0_V\}$ stavljamo da je $\dim V = 0$.

Budući da znamo baze nekih vektorskih prostora, lako možemo zaključiti i kolika im je dimenzija:

- $\dim V^1 = 1$, $\dim V^2 = 2$, $\dim V^3 = 3$,
- $\dim \mathbb{R}^n = n$,
- $\dim \mathcal{P}_n = n + 1$,
- $\dim \mathbb{C} = 1$, $\dim \mathbb{C}_{\mathbb{R}} = 2$, i općenito $\dim \mathbb{C}^n = n$, $\dim \mathbb{C}^n_{\mathbb{R}} = 2n$,
- $\dim M_2(\mathbb{R}) = 4$.

Naglasimo još jedanput da pojam dimenzije vektorskog prostora ima smisla tek kad se ustanovi da su sve baze konačnodimenzionalnog vektorskog prostora jednakobrojne. Kažemo li da je dimenzija vektorskog prostora, po definiciji, jednaka broju vektora u bazi tog prostora, podrazumijevamo da to znači u *bilo kojoj bazi* prostora i pozivamo se na teorem o jednakobrojnosti baza. Pojam dimenzije ne bi imao smisla ako bi se broj vektora u bazi mijenjao izborom različitih baza. No sad također znamo da dimenziju određenog vektorskog prostora možemo ustanoviti poznavanjem ili, ako je potrebno, konstrukcijom jedne jedine njegove baze.

Kako općenito možemo odrediti (konstruirati) neku bazu vektorskog prostora? Po teoremu 1.4.3 svaki konačan sustav izvodnica ili je i sam baza ili, ako je to linearno zavisan skup, sadrži neku bazu kao svoj pravi podskup. Takva baza dobiva se redukcijom do linearno nezavisnog podskupa koji je i sam sustav izvodnica.

S druge strane, ako imamo linearno nezavisan podskup konačnogeneriranog vektorskog prostora, bazu možemo izgraditi njegovim proširivanjem do sustava izvodnica, ne narušavajući pritom svojstvo linearne nezavisnosti. Katkad je dosta lako izabrati vektore kojima se zadani linearno nezavisan skup može dopuniti do baze, ali općenito nije dovoljno pouzdati se u „pogađanje”, nego nam treba praktični postupak koji sigurno dovodi do cilja. Takav postupak zapravo je sadržaj dokaza sljedeće propozicije.

Propozicija 1.4.10. *Svaki linearno nezavisan skup u konačnodimenzionalnom vektorskom prostoru V sadržan je u nekoj bazi prostora V.*

Dokaz. Neka je $S = \{a_1, \ldots, a_k\}$ linearno nezavisan podskup prostora V. Označimo $\dim V = n$. Očito je $n \geq 1$ jer po pretpostavci V sadrži linearno nezavisan skup.

Ako je S pritom sustav izvodnica za V tada je to baza pa je tvrdnja propozicije trivijalno ispunjena. Pretpostavimo stoga da S nije sustav izvodnica. Vrijedi $1 \leq k < n$.

Pokazat ćemo da za bilo koju bazu B prostora V možemo skup S proširiti nekim vektorima iz B tako da prošireni skup bude baza prostora V. Ta će baza očito sadržavati skup S.

Neka je, dakle, B bilo koja baza prostora V. U slučaju da je $S \subseteq B$ tvrdnja propozicije već je ispunjena. Odsad uzmimo da S nije sadržan u bazi B pa je tada skup $B \backslash S$ neprazan. Vektore za proširenje birat ćemo iz tog skupa. (Ako su S i B disjunktni, vrijedi $B \backslash S = B$. U suprotnom, zajednički elementi skupova S i B već su u S te ne dolaze u obzir za proširivanje).

Razmotrimo sada skup $S \cup B$, koji također možemo napisati kao uniju disjunktnih skupova $S \cup (B \backslash S)$. Označimo $S_0 = S \cup (B \backslash S)$ te neka je $B \backslash S = \{b_1, \ldots, b_m\}$. Ovdje je $m \geq 1$. Skup $S_0 = \{a_1, \ldots, a_k, b_1, \ldots, b_m\}$ neka je uređen i to u navedenom redoslijedu elemenata, tako da vektori iz S čine početni dio.

Skup S_0 je sustav izvodnica prostora V jer sadrži bazu B. Nadalje, S_0 je linearno zavisan jer postoji vektor iz S koji ne pripada bazi B. Prema propoziciji 1.3.12 u uređenom skupu S_0 postoji vektor koji se može prikazati kao linearna kombinacija svojih prethodnika. Zbog linearne nezavisnosti skupa S taj vektor mora biti neki od vektora $b_j \in B \backslash S$, $j \in \{1, \ldots, m\}$.

Uklonimo li b_j iz skupa S_0, skup $S_1 = S_0 \backslash \{b_j\}$ također je sustav izvodnica prostora V, po propoziciji 1.3.5 Ako je S_1 linearno nezavisan, dobili smo bazu koja sadrži skup S.

U protivnom, nastavimo postupak redukcije uklanjanjem iz S_0 vektora skupa $B \backslash S$ sve dok ne dobijemo linearno nezavisan skup izvodnica prostora V. To će se dogoditi nakon najviše $m - 1$ koraka, a rezultat svakog koraka bit će (sve manji) skup izvodnica koji sadrži skup S. Time je propozicija dokazana.

Uočimo da je ovaj postupak redukcije analogan onom iz dokaza teorema 1.4.3, samo što se ovdje, pomoću uređaja skupa S_0, držimo uvjeta da svaki daljnji podskup sadrži skup S. $\square$

Primijetimo da se u ovom dokazu početnom linearno nezavisnom skupu S najprije „pripoji" cijela jedna baza, a zatim se provodi redukcija dobivenog sustava izvodnica, pri čemu se sačuva skup S. Dakle, $n - k$ vektora za dopunu k-članog podskupa S do baze prostora dimenzije n nalazimo unutar neke „već poznate" baze B. Načelno takva baza postoji po pretpostavci, a u nekom konkretnom slučaju (zadatku) redovito je riječ o prostoru čiju neku bazu znamo otprije, npr. standardnu bazu za prostor $\mathbb{R}^n$ ili $\mathcal{P}_n$.

Kao posljedicu gotovo svega dokazanog u ovom i prethodnom odsječku iskazat ćemo sljedeći korolar koji se sastoji od operativno vrlo korisnih tvrdnji u slučaju kad nam je poznata dimenzija ambijentalnog vektorskog prostora.

Korolar 1.4.11. *Neka je V n-dimenzionalan vektorski prostor i S njegov podskup. Vrijedi:*

(1) *Ako je S linearno nezavisan skup i $|S| = n$, S je baza za V.*

(2) *Ako je S sustav izvodnica za V i $|S| = n$, S je baza za V.*

(3) *Ako je S linearno nezavisan skup, $|S| \leq n$.*
(Drugim riječima, maksimalan broj vektora u linearno nezavisnom skupu je n.)

(4) *Ako je S takav da je $|S| > n$, onda je S linearno zavisan skup.*

(5) *Ako je S sustav izvodnica za V, onda je $|S| \geq n$.*
(Drugim riječima, minimalan broj vektora u sustavu izvodnica za V je n.)

(6) *Ako je S takav da je $|S| < n$, S ne može biti sustav izvodnica za V.*

Za vježbu je važno i korisno samostalno dokazati sve tvrdnje iz prethodnog korolara. Sve one jednostavno slijede iz propozicija i teorema u ovom odjeljku. Posebno uočite kako tvrdnja (1) u korolaru 1.4.11 slijedi iz dokaza teorema 1.4.7.

Primjer 1.16. Neka je $B = \{a, b, c\}$ baza za V. Ispitajte je li neki od danih skupova linearno (ne)zavisan, sustav izvodnica ili baza za V:

(a) $A = \{a + b, a + b + c\}$,

(b) $B = \{a - b, b - c, a - c\}$,

(c) $C = \{a, a + b, a + b + c\}$,

(d) $D = \{a, a + b, a + b + c, b + c\}$.

Odgovori.

(a) A je linearno nezavisan, nije sustav izvodnica ni baza za V.

(b) B je linearno zavisan $(a - c = (a - b) + (b - c))$, nije sustav izvodnica pa stoga ni baza za V.

(c) C je linearno nezavisan, sustav izvodnica i baza za V.

(d) $D = \{a, a + b, a + b + c, b + c\}$ je linearno zavisan, sustav izvodnica (jer sadrži bazu C) ali nije baza za V.

♡

Zadatak 1.8. *U vektorskom prostoru $\mathbb{R}^5$ zadani su vektori $a_1 = (1, 1, 2, 3, 5)$, $a_2 = (2, 0, 1, 9, 3)$ i $a_3 = (1, 0, 5, 0, 12)$. Provjerite da je linearnu nezavisnost skupa $\{a_1, a_2, a_3\}$ te ga dopunite do baze prostora $\mathbb{R}^5$.*

Uputa: Može se primijeniti postupak iz dokaza propozicije 1.4.10 tako da se za proširivanje do baze poslužimo standardnom bazom $\{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$. Nakon što provjerimo linearnu nezavisnost skupa $\{a_1, a_2, a_3\}$, promatramo skup $\{a_1, a_2, a_3, e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$ i ispitujemo redom koji se vektori mogu izraziti kao linearna kombinacija prethodnih. Pokazat će se da e_1 nije takav pa ga možemo uvrstiti u traženu bazu, no za e_2 ustanovit će se da se nalazi u linearnoj ljusci $[a_1, a_2, a_3, e_1]$ pa ne može ući u tu bazu. Sljedeći vektor, e_3, ne pripada navedenoj linearnoj ljusci pa je skup $\{a_1, a_2, a_3, e_1, e_3\}$ jedna (ne i jedina, dakako) baza koja sadrži vektore a_1, a_2 i a_3.

Primjer 1.17. Pretpostavimo da je skup $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ baza vektorskog prostora V nad poljem $\mathbb{F}$. Ako za neke vektore $a, b \in V$ imamo njihove prikaze u toj bazi,

$$a = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i, \ \ b = \sum_{i=1}^{n} \beta_i v_i,$$

provjerite da prikaz zbroja $a + b$ u istoj bazi glasi

$$a + b = \sum_{i=1}^{n} (\alpha_i + \beta_i) v_i.$$

Nadalje, ako je $\lambda \in \mathbb{F}$, onda je

$$\lambda a = \sum_{i=1}^{n} (\lambda \alpha_i) v_i.$$

(Uočite koja svojstva operacija u vektorskom prostoru treba primijeniti u tim jednostavnim računima.) Odatle vidimo da, kad imamo izabranu jednu bazu, operacije zbrajanja i množenja skalarom u V možemo izvoditi i tako da ne pišemo uvijek cjelovite linearne kombinacije, nego se prikazima u bazi služimo kao koordinatnim n- torkama:

$$(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) + (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n) = (\alpha_1 + \beta_1, \alpha_2 + \beta_2, \ldots, \alpha_n + \beta_n),$$

$$\lambda(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) = (\lambda\alpha_1, \lambda\alpha_2, \ldots, \lambda\alpha_n).$$

Kao što smo naviknuti u prostorima V^2 i V^3, računske operacije „prevodimo” u prostor $\mathbb{R}^2$, odnosno $\mathbb{R}^3$ gdje je zapis jednostavniji. Općenito, operacije iz prostora V, posredstvom prikaza u nekoj odabranoj bazi, „prenosimo” u prostor $\mathbb{F}^n$. Na kraju računa treba se ipak vratiti u početni prostor V i krajnje rezultate izraziti u tom prostoru.

Primjerice, neka je riječ o prostoru polinoma $\mathcal{P}_3$ stupnja najviše 3, s realnim koeficijentima i uzmimo da smo se poslužili njegovom standardnom bazom $\{p_0, p_1, p_2, p_3\}$ (v. primjere baze) kako bismo umjesto pisanja polinoma radili u koordinatnom prostoru $\mathbb{R}^4$. Ako je završni rezultat prikazan vektorom $(-3, 2, 0, -1) \in \mathbb{R}^4$, rješenje ćemo napisati kao polinom $-3 + 2t - t^3$.

1.5 Potprostori

U primjerima vektorskih prostora koje smo dosad upoznali mogli smo uočiti kako se neki od njih pojavljuju kao podskupovi drugih vektorskih prostora, a s jednakim (preciznije, naslijeđenim) operacijama zbrajanja i množenja skalarom (nad istim poljem). Zapravo je to vrlo uobičajena situacija, da se unutar nekih „standardnih” vektorskih prostora, poput V^3, $\mathbb{R}^n$ ili $\mathcal{P}$, određenim svojstvima izdvajaju podskupovi koji su također vektorski prostori, a onda ih je, zahvaljujući posjedovanju takve strukture, lakše proučavati.

Također, već smo naučili da će linearna ljuska bilo kakvog nepraznog podskupa S vektorskog prostora V također biti vektorski prostor – katkad identičan cijelom prostoru (tada je S sustav izvodnica za V), a katkad sadržan u V kao njegov pravi podskup. Dobro su nam poznati primjeri vektorskih prostora V^1, V^2 i V^3 koji su „ulančano” sadržani jedan u drugom: $V^1 \subseteq V^2 \subseteq V^3$, a geometrijski ih znamo ostvariti tako da u trodimenzionalnom prostoru V^3 najprije jednim vektorom „razapnemo” pravac, a onda pridodamo neki drugi vektor, nekolinearan s prvim, tako da zajedno „razapinju” ravninu.

Time dolazimo do važnog pojma vektorskog potprostora.

Definicija 1.5.1. *Neka je V vektorski prostor nad poljem $\mathbb{F}$ i $L \neq \emptyset$ neki podskup od V. Kažemo da je L* ***vektorski potprostor*** *prostora V ako je L i sam vektorski prostor nad poljem $\mathbb{F}$ s obzirom na operacije zbrajanja i množenja skalarom definirane u V. Kraće ćemo reći da je L* ***potprostor*** *od V i pisati $L \leq V$.*

Prostore $L = V$ i $L = \{0_V\}$ nazivamo ***trivijalnim potprostorima****.*

Za L ćemo reći da je ***pravi potprostor*** *od V ako je $\{0_V\} \subsetneqq L \subsetneqq V$. U slučaju $L \subsetneqq V$ pišemo $L < V$ ili $L \lneqq V$.*

Da bismo ustanovili da je neki skup L vektorski potprostor potrebno je općenito ispitati deset svojstava – prvih pet odnosi se na strukturu Abelove grupe, koju bi morao posjedovati i podskup L, a drugih pet su svojstva operacije množenja skalarom. No ako je naš skup L podskup nekog vektorskog prostora V i želimo ispitati je li on sam vektorski potprostor s obzirom na iste operacije iz V, onda se mnoga svojstva *nasljeđuju* i stoga ih nema potrebe dokazivati. Konkretno, nasljeđuju se asocijativnost i komutativnost zbrajanja te kvaziasocijativnost množenja skalarom, obje distributivnosti i svojstvo množenja s 1. Dakle, da bismo ustanovili da je L potprostor od V, morali bismo provjeriti sljedeća svojstva:

- $a + b \in L$, za sve $a, b \in L$,
- nulvektor (tj. neutralni element zbrajanja) je u L, odnosno $0_V \in L$,
- za svaki $a \in L$ je i njegov suprotan vektor $-a \in L$,
- $\alpha a \in L$, za sve $a \in L$ i $\alpha \in \mathbb{F}$.

No pokazuje se da je dovoljno provjeriti samo prvo i posljednje svojstvo, odnosno da je skup L zatvoren na zbrajanje vektora i množenje vektora skalarom. (Kad govorimo o „istim” operacijama na vektorskom prostoru i njegovu potprostoru, zapravo imamo restrikciju preslikavanja $+ : V \times V \to V$ na $L \times L \to L$ te restrikciju $\cdot : F \times V \to V$ na $F \times L \to L$, a zatvorenost znači da je kodomena u oba slučaja upravo L).

Teorem 1.5.2. *Neka je $L \neq \emptyset$ neki podskup vektorskog prostora V. L je potprostor od V ako i samo ako je zatvoren u odnosu na operacije iz V, odnosno ako i samo ako vrijedi*

(1) *$a + b \in L$, za sve $a, b \in L$,*

(2) *$\alpha a \in L$, za sve $a \in L$ i $\alpha \in \mathbb{F}$.*

Dokaz. Ako je L potprostor od V, onda je L i sam vektorski prostor pa je zatvoren na zbrajanje vektora i množenje vektora skalarom.

Pokažimo dovoljnost. Pretpostavimo da je L zatvoren na zbrajanje vektora i množenje vektora skalarom. Tada za $a \in L$ vrijedi da je i $(-1)a \in L$. Kako je $-a = (-1)a$, pokazali smo da je suprotan vektor od a također iz L. Nadalje, i $0_V = a + (-a) \in L$ jer je L zatvoren na zbrajanje. Dakle, L je vektorski prostor s obzirom na iste operacije iz V. $\square$

Prisjetimo se da smo u propoziciji 1.3.2 pokazali da je linearna ljuska proizvoljnog skupa S iz V, $[S]$, potprostor od V. Uočimo još da je (samo) nulvektor zajednički element svih potprostora nekog vektorskog prostora V.

Korolar 1.5.3. *Skup $L \subseteq V$, $L \neq \emptyset$, je potprostor od V ako i samo ako je $\alpha a + \beta b \in L$, za sve $a, b \in L$ i $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$.*

Dokaz. Za $\alpha = \beta = 1$ dobivamo svojstvo (1), a za $\beta = 0$ svojstvo (2) teorema 1.5.2. $\square$

Korolar 1.5.4. *Skup $L \subseteq V$, $L \neq \emptyset$, je potprostor od V ako i samo ako je $\alpha a + b \in L$, za sve $a, b \in L$ i $\alpha \in \mathbb{F}$.*

Prisjetimo se propozicije 1.3.2 u kojoj se još nije izričito spominjao pojam potprostora vektorskog prostora, a njezina tvrdnja zapravo govori: *za bilo koji podskup S vektorskog prostora V njegova linearna ljuska $[S]$ je potprostor od V.* Dakle, $S \subseteq V \Rightarrow [S] \leq V$. Iz korolara 1.5.3 očito je $[L] \leq L$ za svaki potprostor $L \leq V$. Budući da trivijalno vrijedi $S \subseteq [S]$ za svaki podskup $S \subseteq V$, dobivamo sljedeću karakterizaciju potprostora kao podskupa koji se podudara s vlastitom linearnom ljuskom. (Iznimka je samo prazan skup.)

Korolar 1.5.5. *Skup $L \subseteq V$, $L \neq \emptyset$, potprostor je od V ako i samo ako je $L = [L]$.*

Dosad navedene tvrdnje o potprostorima vrijede za bilo koje vektorske prostore, ne nužno konačnodimenzionalne. Ako je V konačnodimenzionalan, a L njegov potprostor, zanima nas odnos njihovih dimenzija. Očekivano je da vrijedi $\dim L \leq \dim V$. To će se pokazati istinitim, no važno je najprije ustanoviti da je potprostor konačnodimenzionalnog prostora i sam konačnodimenzionalan. To svojstvo „intuitivno” se čini posve neupitnim, ali zapravo nije sasvim očito te ga ipak treba dokazati.

Propozicija 1.5.6. *Neka je V konačnodimenzionalan vektorski prostor i L njegov potprostor. Tada je i L konačnodimenzionalan vektorski prostor i* $\dim L \leq \dim V$.
Ako je $\dim L = \dim V$, *onda je* $L = V$.

Dokaz. Najprije ustanovimo da je L konačnodimenzionalan vektorski prostor. Ako je $L = \{0_V\}$, tvrdnja trivijalno vrijedi. Pretpostavimo da $L \neq \{0_V\}$. Stoga postoji $a_1 \in L$ i $a_1 \neq 0_V$. Ako je $[a_1] = L$, L je konačnogeneriran, odnosno konačnodimenzionalan prostor. Ako $[a_1] \neq L$, to jest $[a_1] < L$, postoji $a_2 \in L \backslash [a_1]$ i $a_2 \neq 0_V$. Očito je skup $\{a_1, a_2\}$ linearno nezavisan. Ako je $[a_1, a_2] = L$, pokazali smo da je L konačnodimenzionalan. U suprotnom nastavljamo postupak. Broj koraka u ovom postupku je konačan i maksimalno jednak $n = \dim V$, jer je maksimalan broj vektora u linearno nezavisnom skupu u prostoru V jednak n.

Neka je B_L baza za L. Ako je B_L i baza za V, onda je $\dim L = \dim V$ i $L = [B_L] = V$. Ako B_L nije baza za V, to je linearno nezavisan skup u V koji mora biti sadržan kao pravi podskup u nekoj bazi B za V (teorem 1.4.10). Stoga je $\dim L = |B_L| < |B| = \dim V$. □

Slijede još neki primjeri potprostora.

Primjer 1.18. Opišimo sve prave potprostore od V^3. Kako je $\dim V^3 = 3$, dimenzija pravog potprostora L od V^3 može biti 1 ili 2.

Ako je $\dim L = 1$, postoji $\vec{a} \in V^3 \backslash \{\vec{0}\}$ takav da je $L = [\vec{a}]$, to jest $L = \{\alpha \vec{a} : \alpha \in \mathbb{R}\}$.

Ako je $\dim L = 2$, onda postoje nekolinearni vektori $\vec{a}, \vec{b} \in V^3$ takvi da je $L = [\vec{a}, \vec{b}]$, to jest $L = \{\alpha \vec{a} + \beta \vec{b} : \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$.

Ako promatramo prostor $V^3(O)$ radijvektora sa zajedničkim ishodištem O, potprostori dimenzije 1 i 2 odgovaraju upravo pravcima, odnosno ravninama sa zajedničkom točkom O i tako ih geometrijski predočavamo.

♡

Primjer 1.19. Ustanovit ćemo koji je danih skupova potprostor od $\mathbb{R}^n$ te mu odrediti jednu bazu i dimenziju:

(a) $A = \{(x_1, \ldots, x_n) : x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{Z}\}$,

(b) $B = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_1 = 2x_2\}$,

(c) $C = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^n x_i = 0\}$,

(d) $D = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^n x_i = 1\}$,

(e) $E = \{(x_1, x_1, \ldots, x_1) : x_1 \in \mathbb{R}\}$.

(a) A nije potprostor od $\mathbb{R}^n$. Za to je dovoljno pronaći samo jedan primjer koji ne zadovoljava uvjete iz teorema 1.5.2, to jest protuprimjer. Recimo, $e_1 = (1, 0, \ldots, 0) \in A$, ali $\frac{1}{2} e_1 \notin A$.

(b) Neka su $x = (x_1, \ldots, x_n)$ i $y = (y_1, \ldots, y_n)$ elementi skupa B. Tada je $x_1 = 2x_2$ i $y_1 = 2y_2$. Za $\alpha \in \mathbb{R}$ je

$$\alpha x + y = (\alpha x_1 + y_1, \ldots, \alpha x_n + y_n).$$

Kako je $\alpha x_1 + y_1 = \alpha(2x_2) + (2y_2) = 2(\alpha x_2 + y_2)$, slijedi da je $\alpha x + y \in B$. Stoga je B potprostor od $\mathbb{R}^n$.

Odredimo mu sada jednu bazu i dimenziju. Za $x = (x_1, \dots, x_n) \in B$ vrijedi

$$x = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) = (2x_2, x_2, x_3, \dots, x_n) = x_2 \underbrace{(2, 1, 0, \dots, 0)}_{2e_1+e_2} + x_3 e_3 + \dots + x_n e_n.$$

Skup vektora $\{2e_1 + e_2, e_3, \dots, e_n\}$ očito je sustav izvodnica za B. Lako se provjeri da je i linearno nezavisan, pa je to baza za B i $\dim B = n - 1$.

(c) Neka su $x = (x_1, \dots, x_n)$ i $y = (y_1, \dots, y_n)$ elementi skupa C te $\alpha \in \mathbb{R}$. Vrijedi

$$\alpha x + y = (\alpha x_1 + y_1, \dots, \alpha x_n + y_n)$$

te

$$\sum_{i=1}^{n} (\alpha x_i + y_i) = \alpha \sum_{i=1}^{n} x_i + \sum_{i=1}^{n} y_i = \alpha \cdot 0 + 0 = 0,$$

pa je $\alpha x + y \in C$. Stoga je C potprostor od $\mathbb{R}^n$.

Odredimo mu sada jednu bazu i dimenziju. Za $x = (x_1, \dots, x_n) \in C$ vrijedi da je $x_1 = -x_2 \cdots - x_n$ pa je

$$\begin{aligned} x &= (-x_2 - x_3 \cdots - x_n, x_2, x_3, \dots, x_n) \\ &= x_2 \underbrace{(-1, 1, 0, \dots, 0)}_{-e_1+e_2} + x_3 \underbrace{(-1, 0, 1, \dots, 0)}_{-e_1+e_3} + \dots + x_n \underbrace{(-1, 0, \dots, 0, 1)}_{-e_1+e_n}. \end{aligned}$$

Skup vektora $\{-e_1 + e_2, -e_1 + e_3, \dots, -e_1 + e_n\}$ razapinje C i lako se provjeri da je linearno nezavisan, pa je to baza za C i $\dim C = n - 1$.

(d) Skup D nije potprostor od $\mathbb{R}^n$. Zaista, za $e_1, e_2 \in D$ vrijedi da $e_1 + e_2 \notin D$ (jer je zbroj koordinata vektora $e_1 + e_2$ jednak 2).

(e) Uočimo da je $E = [(1, 1, \dots, 1)]$, pa je E jednodimenzionalan potprostor od $\mathbb{R}^n$.

♡

Primijetimo da smo u točkama (b), (c) i (e) mogli odjednom pokazati i to da je zadani skup potprostor i odrediti njegovu bazu. Naime, kad prikažemo opći vektor iz skupa B, C ili E kao linearnu kombinaciju nekih vektora istog skupa, vidimo da je jednak linearnoj ljusci nekog svog podskupa. Samim time skup B, odnosno C i E je potprostor, prema propoziciji 1.3.2. Uočeni podskup tada je sustav izvodnica tog potprostora, a zatim se provjeri je li ujedno baza, kao što je napisano u rješenjima. Na taj način ne moramo izravno primijeniti kriterij pomoću zatvorenosti na operacije iz teorema 1.5.2. Prikladnost takvog pristupa ovisi o načinu kako je skup zadan.

Primjer 1.20. U realnom vektorskom prostoru $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ (realnih funkcija realne varijable) ispitajmo jesu li sljedeći skupovi potprostori:

(a) P – skup svih parnih funkcija u $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$,

(b) N – skup svih neparnih funkcija u $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$,

(c) C – skup svih neprekidnih funkcija u $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

Prisjetimo se da se operacije zbrajanja i množenja skalarom u $\mathbb{R}^\mathbb{R}$ definiraju po točkama, to jest

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x), \quad (\alpha f)(x) = \alpha f(x), \forall x \in \mathbb{R}.$$

(a) Funkcija $f \in \mathbb{R}^\mathbb{R}$ je parna ako je $f(-x) = f(x)$ za sve $x \in \mathbb{R}$. Neka su $f, g \in P$ i $\alpha \in \mathbb{R}$. Tada je

$$(f+g)(-x) = f(-x) + g(-x) = f(x) + g(x) = (f+g)(x), \forall x \in \mathbb{R},$$

$$(\alpha f)(-x) = \alpha f(-x) = \alpha f(x) = (\alpha f)(x), \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Stoga su $f+g$ i αf parne funkcije, odnosno P je potprostor od $\mathbb{R}^\mathbb{R}$.

(b) Funkcija $f \in \mathbb{R}^\mathbb{R}$ je neparna ako je $f(-x) = -f(x)$ za sve $x \in \mathbb{R}$. Neka su $f, g \in N$ i $\alpha \in \mathbb{R}$. Tada je

$$(f+g)(-x) = f(-x)+g(-x) = -f(x)+(-g(x)) = -(f(x)+g(x)) = -(f+g)(x), \forall x \in \mathbb{R},$$

$$(\alpha f)(-x) = \alpha f(-x) = \alpha(-f(x)) = -(\alpha f(x)) = -(\alpha f)(x), \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Stoga su $f+g$ i αf neparne funkcije, odnosno N je potprostor od $\mathbb{R}^\mathbb{R}$.

(c) Ako su f i g neprekidne u točki x, onda su $f+g$ i αf neprekidne u x. Stoga je C potprostor od $\mathbb{R}^\mathbb{R}$.

♡

Primjer 1.21. Neka je Q skup svih polinoma iz $\mathcal{P}_n$ koji imaju nultočku u $c = 1$, to jest

$$Q = \{p \in \mathcal{P}_n \ : \ p(1) = 0\}.$$

Svaki polinom iz Q djeljiv je polinomom $t-1$, to jest $p \in Q$ je oblika

$$p(t) = (t-1)q(t),$$

gdje je q polinom stupnja manjeg ili jednakog od $n-1$. Odatle slijedi da će i linearna kombinacija polinoma iz Q imati nultočku u $c = 1$. Stoga je Q potprostor od $\mathcal{P}_n$.

Odredimo mu jednu bazu i dimenziju. Za $p \in Q$ je

$$p(t) = (t-1)(a_{n-1}t^{n-1} + \cdots + a_1 t + a_0),$$

za neke $a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0 \in \mathbb{R}$, odnosno

$$p(t) = a_{n-1}\underbrace{(t-1)t^{n-1}}_{q_n(t)} + a_{n-2}\underbrace{(t-1)t^{n-2}}_{q_{n-1}(t)} + \cdots + a_1\underbrace{(t-1)t}_{q_2(t)} + a_0\underbrace{(t-1)}_{q_1(t)}.$$

Skup $\{q_1, \ldots, q_n\}$ je sustav izvodnica i očito linearno nezavisan pa predstavlja bazu za Q i $\dim Q = n-1$.

♡

Primjer 1.22. Neka je $\mathcal{L}(V)$ skup svih potprostora vektorskog prostora V. *Biti potprostor* je refleksivna i tranzitivna relacija na skupu $\mathcal{L}(V)$.

♡

Zadatak 1.9. *Neka je S skup svih polinoma $p(t)$ s realnim koeficijentima, stupnja najviše 3, takvih da za svaki $t \in \mathbb{R}$ vrijedi: $p(t-1)+p(t+1) = 2p(t)$. Odredite opći oblik polinoma iz S te pokažite da je S potprostor vektorskog prostora $\mathcal{P}_3$ polinoma stupnja najviše 3. Odredite* $\dim S$*. (Smatramo da skup S obuhvaća i nulpolinom.)*

Zadatak 1.10. *Neka je $B = \{(z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{C}^3 : z_1 + z_2 - z_3 = 0\}$. Je li B potprostor od $\mathbb{C}^3$, odnosno $\mathbb{C}^3_{\mathbb{R}}$? Ako jest, odredite mu bazu i dimenziju. Obratite pozornost na moguće razlike za prostor nad poljem $\mathbb{C}$, odnosno $\mathbb{R}$.*

Zadatak 1.11. *Neka je $n \geq 2$ i $L \leq \mathbb{R}^n$,* $\dim L \geq 2$*. Tada za svaka dva različita $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$ postoji vektor $a = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in L$, različit od nulvektora, takav da je $\alpha_i = \alpha_j$.*

1.6 Presjek i suma potprostora.

Kad promatramo potprostore nekog vektorskog prostora, korisnima i potrebnima pokazuju se operacije kojima se od nekih potprostora dobivaju drugi potprostori. Primjenom skupovne operacije presjeka na bilo koje potprostore uvijek se dobiva potprostor, dok odgovarajuća tvrdnja ne vrijedi općenito za operaciju unije na bilo koje potprostore. No linearna ljuska unije dvaju ili više potprostora bit će također potprostor, takozvana suma potprostora.

Propozicija 1.6.1. *Neka su L i M potprostori vektorskog prostora V. Tada je $L \cap M$ potprostor od V.*

Dokaz. Neka su $a, b \in L \cap M$ te $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$. Tada je $\alpha a + \beta b \in L$ jer su $a, b \in L$ i L je potprostor od V. Na isti način, $\alpha a + \beta b \in M$, pa je $\alpha a + \beta b \in L \cap M$. Prema korolaru 1.5.3 slijedi tvrdnja. □

Na temelju prethodne propozicije lako zaključujemo da je presjek triju ili više potprostora prostora V također potprostor. Primjerice, ako su $L_1, L_2, L_3 \leq V$, onda je $L_1 \cap L_2 \cap L_3 = (L_1 \cap L_2) \cap L_3$ pa je taj skup presjek dvaju potprostora, $L_1 \cap L_2$ i L_3, stoga je i sam potprostor. Takav zaključak možemo induktivno proširiti na presjek konačno mnogo potprostora. Označimo ih $L_1, L_2, \dots, L_k$, tada pišemo $\bigcap_{i=1}^{k} L_i = L$ pa vrijedi $L \leq V$.

Štoviše, presjek bilo koje kolekcije (ili „množine") potprostora, moguće beskonačne, ponovno je potprostor, to jest $\bigcap_{\alpha \in A} L_\alpha \leq V$. Taj presjek uvijek je neprazan skup jer sadrži barem nulvektor. Radi lakšeg predočavanja zamislimo npr. tri različita dvodimenzionalna potprostora vektorskog prostora $V^3(O)$, a geometrijski to su tri ravnine koje sadrže točku O. Njihov presjek je ili $\{O\}$ ili zajednička presječnica (pravac) svih triju ravnina, dakle ili nulpotprostor ili jednodimenzionalni potprostor. Isti su mogući ishodi ako uzmemo bilo koliko ravnina kroz točku O, konačno ili beskonačno mnogo.

Definicija 1.6.2. *Neka su L i M potprostori vektorskog prostora V. Potprostor $L \cap M$ naziva se* ***presjek potprostora*** *L i M.*

Dalje nam se nameće pitanje hoće li i skup $L \cup M$, to jest unija potprostora bit potprostor od V. Općenito, ne! Na primjer, za potprostore $L = [\vec{i}]$ i $M = [\vec{j}]$ od V^3 vidimo da $\vec{i} + \vec{j} \notin L \cup M$, pa $L \cup M$ nije vektorski prostor. Zanimat će nas koji je „najmanji" potprostor koji sadrži dva ili više potprostora vektorskog prostora V, a to onda znači da sadrži njihovu uniju. Pritom se izraz „najmanji" ovdje odnosi na uspoređivanje po relaciji inkluzije među skupovima. Uzmimo da je S neki podskup (ne nužno potprostor) vektorskog prostora S. Za $L \leq V$ kažemo da je *najmanji potprostor* od V koji sadrži S ako je $S \subseteq L$, a ne postoji potprostor $L' \neq L$ takav da je $S \subseteq L' \subseteq L$.

Zadatak 1.12. *Neka su L i M potprostori vektorskog prostora V. Pokažite da je $L \cup M$ potprostor ako i samo ako je $L \leq M$ ili $M \leq L$.*

Propozicija 1.6.3. *Neka je S podskup vektorskog prostora V i L najmanji potprostor od V koji sadrži S. Tada je $L = [S]$.*

Dokaz. Ako je $S = \emptyset$, onda je $L = \{0_V\}$, pa je $L = [S]$.

Pretpostavimo da $S \neq \emptyset$. Jasno je da je $L \subseteq [S]$ jer je $[S]$ potprostor koji sadrži skup S, a L *najmanji* takav potprostor. Pokažimo inkluziju $[S] \subseteq L$. Neka je $x \in [S]$. Tada postoje vektori $a_1, \ldots, a_k \in S$ i skalari $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{F}$ takvi da je $x = \alpha_1 a_1 + \cdots + \alpha_k a_k$. No $a_1, \ldots, a_k \in L$ jer $S \subseteq L$ i kako je L potprostor, slijedi da je $x \in L$. □

Definicija 1.6.4. *Neka su L i M potprostori vektorskog prostora V. Potprostor $[L \cup M]$ naziva se* ***suma potprostora*** *L i M te se označava s $L + M$.*

Na temelju propozicije 1.6.3 znamo da je $L+M$ najmanji potprostor od V koji sadrži L i M. Definicija sume potprostora proširuje se na bilo koji konačan broj potprostora, pa i na bilo koju kolekciju (množinu) potprostora, moguće beskonačnu. Dakle, suma potprostora $L_1, \ldots, L_k$ od V je

$$L_1 + \cdots + L_k = \sum_{i=1}^{k} L_i = [\bigcup_{i=1}^{k} L_i],$$

odnosno suma bilo koje množine potprostora (indeksirane nekim skupom A) je

$$\sum_{\alpha \in A} L_\alpha = [\bigcup_{\alpha \in A} L_\alpha].$$

Sljedeća tvrdnja opravdat će naziv *suma* pokazujući da se svaki vektor iz $L+M$ može prikazati kao zbroj jednog vektora iz L i jednog vektora iz M.

Propozicija 1.6.5. *Neka su L i M potprostori vektorskog prostora V. Vrijedi*

$$L + M = \{a + b \, : \, a \in L, \, b \in M\}.$$

Dokaz. Stavimo $W = \{a + b \, : \, a \in L, \, b \in M\}$. Neka je $a \in L$ i $b \in M$. Tada je $a, b \in L \cup M$, pa je $a + b \in [L \cup M] = L + M$. Stoga smo pokazali da je $W \subseteq L + M$.

S druge strane, ako je $x \in L+M = [L \cup M]$, postoje $a_1, \ldots, a_k \in L \cup M$ i $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{F}$ takvi da je $x = \alpha_1 a_1 + \cdots + \alpha_k a_k$. Kako je $a_i \in L \cup M$, to znači da je $a_i \in L$ ili $a_i \in M$. Bez smanjenja općenitosti pretpostavimo da je prvih $1 \leq l < k$ vektora a_i iz potprostora L, a preostali da su iz M. Tada je

$$x = \underbrace{\alpha_1 a_1 + \cdots + \alpha_l a_l}_{a \in L} + \underbrace{\alpha_{l+1} a_{l+1} + \cdots + \alpha_k a_k}_{b \in M} = a + b.$$

U slučaju da je $l = 0$, tj. ako su svi vektori a_i iz potprostora M, stavljamo $a = 0_V$ i $b = x$ te ako je $l = k$, onda $a = x$ i $b = 0_V$. Time smo pokazali da je $L + M \subseteq W$. $\square$

Teorem 1.6.6. *Neka su L i M konačnodimenzionalni potprostori vektorskog prostora V. Tada je $L + M$ konačnodimenzionalan potprostor te vrijedi*

$$\dim(L + M) = \dim L + \dim M - \dim L \cap M.$$

Dokaz. Ako je neki od potprostora L i M jednak $\{0_V\}$ ili V, jednakost vrijedi trivijalno.

U slučaju kad je jedan od potprostora L i M sadržan u drugom, lako se vidi da tvrdnja teorema vrijedi. Npr. ako je $L \leq M$, onda je $L \cap M = L$ i $L + M = [M] = M$ pa se jednakost svodi na $\dim M = \dim L + \dim M - \dim L$.

Razmotrimo nadalje slučaj kad su L i M netrivijalni potprostori, a $L \cap M = \{0_V\}$. Lako se vidi da će tada unija $B_L \cup B_M$ bilo koje baze od L i bilo koje baze od M biti baza sume $L + M$. Tada očito vrijedi jednakost iz teorema.

Preostaje slučaj kada je $L \cap M \neq \{0_V\}$. Pretpostavimo da je $\dim L = l$, $\dim M = m$ i $\dim L \cap M = k$. Neka je $B_{L \cap M} = \{c_1, \ldots, c_k\}$ baza potprostora $L \cap M$. Kako je $L \cap M \leq L, M$, bazu $B_{L \cap M}$ možemo nadopuniti do baza prostora L i M. Stoga neka su

$$B_L = \{c_1, \ldots, c_k, a_1, \ldots, a_r\}, \; B_M = \{c_1, \ldots, c_k, b_1, \ldots, b_s\}$$

baze za L i M. Uočimo da je $k + r = l$ i $k + s = m$. Sada formiramo skup

$$B = B_L \cup B_M = \{c_1, \ldots, c_k, a_1, \ldots, a_r, b_1, \ldots, b_s\}.$$

Jasno je da je B sustav izvodnica za $[L \cup M] = L + M$. No vrijedi i više – B je baza za $L + M$ jer je B linearno nezavisan skup. Zaista, pretpostavimo da je

$$\sum_{i=1}^{k} \gamma_i c_i + \sum_{i=1}^{r} \alpha_i a_i + \sum_{i=1}^{s} \beta_i b_i = 0_V, \tag{1.5}$$

za neke skalare $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$. Uočimo da je vektor

$$x = \sum_{i=1}^{k} \gamma_i c_i + \sum_{i=1}^{r} \alpha_i a_i = \sum_{i=1}^{s} (-\beta_i) b_i,$$

iz L i iz M, pa je x iz $L \cap M$. Odatle slijedi da je linearna kombinacija vektora a_i, to jest

$$\sum_{i=1}^{r} \alpha_i a_i = x - \sum_{i=1}^{k} \gamma_i c_i$$

također iz $L \cap M$, što je jedino zadovoljeno za 0_V. Kako je $\{a_1, \ldots, a_r\}$ linearno nezavisan skup, nužno vrijedi $\alpha_1 = \cdots = \alpha_r = 0$. Sada (1.5) povlači

$$\sum_{i=1}^{k} \gamma_i c_i + \sum_{i=1}^{s} \beta_i b_i = 0_V,$$

pa je $\gamma_1 = \cdots = \gamma_k = \beta_1 = \cdots = \beta_s = 0$. Dakle, B je baza za $L + M$ i stoga

$$\dim(L + M) = k + r + s = (k + r) + (k + s) - k = \dim L + \dim M - \dim L \cap M.$$

□

Definicija 1.6.7. *Za sumu potprostora L i M kažemo da je* ***direktna suma*** *ako $L \cap M = \{0_V\}$. Tada pišemo $L \dot{+} M$.*

Propozicija 1.6.8. *Suma potprostora L i M je direktna ako i samo ako za svaki $x \in L + M$ postoje jedinstveni $a \in L$ i $b \in M$ takvi da je $x = a + b$.*

Dokaz. Pretpostavimo da je suma direktna, tj. $L \dot{+} M$. Prema propoziciji 1.6.5 znamo da za svaki $x \in L + M$ postoje $a \in L$ i $b \in M$ takvi da je $x = a + b$. Još trebamo pokazati njihovu jedinstvenost. Pretpostavimo suprotno. Neka su i $a' \in L$ i $b' \in M$ takvi da je $x = a' + b'$. Iz $x = a + b = a' + b'$ slijedi da je $a - a' = b' - b$. Stoga je $y = a - a' \in L$ i $y = b' - b \in M$, odnosno $y \in L \cap M$. Kako je suma direktna, $L \cap M = \{0_V\}$, pa je $y = 0_V$, tj. $a = a'$ i $b = b'$.

Sada pokažimo obrat. Pretpostavimo da se svaki vektor iz $L + M$ jedinstveno prikazuje kao zbroj vektora iz L i vektora iz M te pretpostavimo da $L \cap M \neq \{0_V\}$. Znači da postoji $a \in \; L \cap M$ i $a \neq 0_V$. U tom slučaju za nulvektor vrijede dva različita prikaza oblika $a + b$, $a \in L$ i $b \in M$,

$$0_V = 0_V + 0_V, \; 0_V = \underbrace{a}_{\in L \cap M \leq L} + \underbrace{(-a)}_{\in L \cap M \leq M},$$

a to je u kontradikciji s pretpostavkom. Dakle, $L \cap M = \{0_V\}$. □

Korolar 1.6.9. *Suma potprostora L i M je direktna ako i samo ako*

$$\dim(L + M) = \dim L + \dim M.$$

Korolar 1.6.10. *Ako je suma potprostora L i M direktna te ako su B_L i B_M baze potprostora L i M, redom, onda je $B_L \cup B_M$ baza potprostora $L \dot{+} M$.*

Propozicija 1.6.11. *Neka je L potprostor konačnodimenzionalnog vektorskog prostora V. Tada postoji potprostor M od V takav da je $V = L \dot{+} M$.*

Dokaz. Ako je $L = \{0_V\}$, onda je $M = V$. I obrnuto, ako je $L = V$, onda $M = \{0_V\}$.

Neka je L netrivijalan potprostor od V. Stoga je $1 \leq \dim L = k < \dim V = n$. Bazu potprostora L,

$$B_L = \{a_1, \ldots, a_k\}$$

nadopunimo do baze cijelog prostora V:

$$B = \{a_1, \ldots, a_k, a_{k+1}, \ldots, a_n\}.$$

Tvrdimo da je $M = [a_{k+1}, \ldots, a_n]$. Zaista, za $x \in V$ postoje $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{F}$ za koje je

$$x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i a_i = \underbrace{\sum_{i=1}^{k} \alpha_i a_i}_{a \in L} + \underbrace{\sum_{i=k+1}^{n} \alpha_i a_i}_{b \in M} = a + b,$$

pa je $x \in L + M$, odnosno $V \leq L + M$. Kako je uvijek $L + M \leq V$, slijedi $V = L + M$. Još moramo vidjeti da je suma direktna. Ako je $y \in L \cap M$, onda je

$$y = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i a_i \in L, \; y = \sum_{i=k+1}^{n} \alpha_i a_i \in M.$$

Odatle je

$$\sum_{i=1}^{k} \alpha_i a_i + \sum_{i=k+1}^{n} (-\alpha_i) a_i = 0_V.$$

Kako je $\{a_1, \ldots, a_n\}$ baza za V, slijedi $\alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0$. Dakle, $y = 0_V$ i $L \cap M = \{0_V\}$. □

Prema prethodnoj propoziciji sljedeća je definicija smislena.

Definicija 1.6.12. *Ako je L potprostor prostora V, potprostor M za koji vrijedi da je $V = L \dot{+} M$ naziva se* ***direktni komplement*** *potprostora L. Još kažemo da smo V rastavili na direktnu sumu potprostora L i M.*

Propozicija 1.6.11 kaže da svaki potprostor konačnodimenzionalnog vektorskog prostora ima direktni komplement. Važno je naglasiti da on ne mora biti jedinstven.

Primjer 1.23. Pokazat ćemo na dva načina kako pronaći baze za sumu i presjek potprostora M i N u $\mathbb{R}^5$ koji su zadani svojim bazama: $B_M = \{a_1, a_2, a_3\}$ i $B_N = \{b_1, b_2, b_3\}$, gdje su

$$a_1 = (1, 0, 0, 0, 0), a_2 = (0, 1, -1, 0, 0), a_3 = (1, 0, 0, 1, 0)$$

te

$$b_1 = (0, 0, 0, -1, 0), b_2 = (0, 0, 1, 0, 0), b_3 = (1, 1, -2, 0, 0).$$

I. način: Prvo ćemo odrediti bazu sume potprostora, $M+N$, a zatim za presjek $M \cap N$. Skup $B_M \cup B_N$ čini sustav izvodnica za $M + N$, a baza za $M + N$ njezin je maksimalan linearno nezavisan podskup. Do nje operativno dolazimo tako što bazu za M redom nadopunjavamo vektorima iz N i provjeravamo linearnu nezavisnost „nadopunjenog" skupa. Ako je skup linearno zavisan, odbacujemo vektor iz B_N, dok ga u suprotnom zadržavamo. Za provjeru linearne (ne)zavisnosti skupa koristit ćemo se propozicijom 1.3.12 u sljedeća tri koraka:

- Provjeravam linearnu (ne)zavisnost skupa

$$\{ \underbrace{a_1, a_2, a_3}_{lin.\ nezavisan}, b_1\}$$

  tako što ispitujemo može li se nadodani vektor b_1 prikazati kao linearna kombinacija svojih prethodnika:

$$b_1 = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \alpha_3 a_3.$$

  Rješavanjem prethodne jednadžbe dobiva se

$$b_1 = a_1 - a_3. \tag{1.6}$$

  Dakle, skup $\{a_1, a_2, a_3, b_1\}$ je linearno zavisan pa vektor b_1 odbacujemo.

- Ispitujemo linearnu (ne)zavisnost skupa
$$\{\underbrace{a_1, a_2, a_3}_{lin.\ nez.}, b_2\}.$$
Pokazuje se da jednadžba
$$b_2 = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \alpha_3 a_3$$
nema rješenja (tj. odgovarajući sustav linearnih jednadžbi je nekonzistentan) i stoga je skup $\{a_1, a_2, a_3, b_2\}$ linearno nezavisan.

- Ispitujemo linearnu (ne)zavisnost skupa
$$\{\underbrace{a_1, a_2, a_3, b_2}_{lin.\ nez.}, b_3\}.$$
Rješavanjem jednadžbe
$$b_3 = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \alpha_3 a_3 + \beta_2 b_2$$
dobivamo da je
$$b_3 = a_1 + a_2 - b_2, \tag{1.7}$$
odnosno da je skup $\{a_1, a_2, a_3, b_2, b_3\}$ linearno zavisan. Odbacujemo vektor b_3.

Sada možemo zaključiti da je skup $\{a_1, a_2, a_3, b_2\}$ maksimalan linearno nezavisan podskup od $B_M \cup B_N$, pa čini jednu bazu za $M + N$. Nadalje, kako je $\dim(M + N) = 4$, prema formuli za dimenziju presjeka i sume potprostora (teorem 1.6.6) slijedi da je

$$\dim M \cap N = \dim M + \dim N - \dim(M + N) = 2.$$

Kako bismo odredili bazu za $M \cap N$, iskoristit ćemo „odbačene" vektore b_1 i b_3, odnosno preciznije relacije (1.6) i (1.7). Uočimo da nam te relacije daju dva vektora koja se nalaze upravo u presjeku:

$$\underbrace{b_1}_{\in N} = \underbrace{a_1 - a_3}_{\in M}, \quad \underbrace{b_2 + b_3}_{\in N} = \underbrace{a_1 + a_2}_{\in M}.$$

Skup $\{b_1, b_2 + b_3\} = \{(0, 0, 0, -1, 0), (1, 1, -1, 0, 0)\}$ linearno je nezavisan pa je to baza za presjek potprostora $M \cap N$.

II. način: Najprije ćemo odrediti bazu presjeka $M \cap N$. Krenimo od toga da se u presjeku potprostora nalaze svi vektori koji se mogu prikazati kao linearne kombinacije vektora a_i, $i = 1, 2, 3$, a također i vektora b_i, $i = 1, 2, 3$:

$$v \in M \cap N \Leftrightarrow v = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \alpha_3 a_3 = \beta_1 b_1 + \beta_2 b_2 + \beta_3 b_3, \text{ za neke } \alpha_i, \beta_i \in \mathbb{R}.$$

Jednadžba $\sum_{i=1}^{3} \alpha_i a_i = \sum_{i=1}^{3} \beta_i b_i$ svodi se na sustav linearnih jednadžbi

$$\begin{aligned} \alpha_1 + \alpha_3 - \beta_3 &= 0, \\ \alpha_2 - \beta_3 &= 0, \\ -\alpha_2 - \beta_2 + 2\beta_3 &= 0, \\ \alpha_3 + \beta_1 &= 0, \end{aligned}$$

čije je rješenje

$$\alpha_3 = -\alpha_1 + \alpha_2, \beta_1 = \alpha_1 - \alpha_2, \beta_2 = \alpha_2, \beta_3 = \alpha_2,$$

za sve $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$. Stoga je $M \cap N$ skup svih vektora $v \in \mathbb{R}^5$ oblika

$$v = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + (-\alpha_1 + \alpha_2)a_3 = \alpha_1(a_1 - a_3) + \alpha_2(a_2 + a_3), \forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}.$$

Dakle, skup

$$\{a_1 - a_3, a_2 + a_3\} = \{(0, 0, 0, -1, 0), (1, 1, -1, 1, 0)\}$$

razapinje $M \cap N$ i očito je linearno nezavisan pa je to jedna baza za $M \cap N$. Formula za dimenziju presjeka i sume potprostora (teorem 1.6.6) daje nam

$$\dim(M + N) = \dim M + \dim N - \dim M \cap N = 4$$

i stoga bazu za $M \cap N$ trebamo nadopuniti s dva vektora iz $B_M \cup B_N$ tako da taj četveročlani skup bude linearno nezavisan. Pokazuje se da je skup $\{a_1 - a_3, a_2 + a_3, a_1, b_2\}$ linearno nezavisan i stoga predstavlja jednu bazu za $M + N$. (Uočite da skup $\{a_1 - a_3, a_2 + a_3, a_1, b_1\}$ nije baza za $M + N$ jer je $b_1 = a_1 - a_3$, tj. taj skup je linearno zavisan.)

♡

Zadatak 1.13. Zadani su potprostori $L = [(1, 0, -1), (1, 2, 1)]$ i $M = [(0, 0, 1), (1, 1, 0)]$ u $\mathbb{R}^3$. Odredite po jednu bazu za $L \cap M$ i $L + M$.

♡

POGLAVLJE 2

MATRICE

2.1 Definicija matrice. Vektorski prostor $M_{mn}(\mathbb{F})$

Definicija 2.1.1. *Neka su $m, n \in \mathbb{N}$. Preslikavanje*

$$A : \{1, \ldots, m\} \times \{1, \ldots, n\} \to \mathbb{F}$$

*naziva se **matrica tipa** (m, n) (ili $m \times n$) s koeficijentima (ili elementima) iz polja $\mathbb{F}$. Skup svih takvih označavamo s $M_{mn}(\mathbb{F})$.*

Dakle, matrica A uređenom paru (i, j), $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$, pridružuje neki skalar iz polja $\mathbb{F}$. Uobičajeno je te funkcijske vrijednosti $A(i, j)$ označiti s a_{ij} te ih zapisati u pravokutnu shemu, odnosno tabelarno na sljedeći način

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Umjesto uglatih zagrada često upotrebljavamo i okrugle zagrade. Elementi matrice A raspoređeni su u m *redaka* i n *stupaca*. Uređenu n-torku

$$(a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in})$$

nazivamo i-*ti redak* matrice A, a uređenu m-torku

$$(a_{1j}, a_{2j}, \ldots, a_{mj})$$

j-*ti stupac* matrice A. Elementi matrice A indeksirani su na način koji odmah upućuje na njihov položaj u matrici. Element a_{ij} nalazi se na presjeku i-tog retka i j-tog stupca. U različitim situacijama bit će nam praktičnije taj element označiti s $[A]_{ij}$ ili $(A)_{ij}$, a cijelu matricu kraće ćemo zapisati kao $A = (a_{ij})$ ili $A = [a_{ij}]$.

Definicija 2.1.2. *Matrica tipa (n, n) naziva se* ***kvadratna matrica*** *ili* ***matrica reda*** *n. Skup svih matrica reda n s elementima iz $\mathbb{F}$ označavamo s $M_n(\mathbb{F})$.*

Ako je $A = [a_{ij}] \in M_n(\mathbb{F})$, uređenu n-torku

$$(a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn})$$

zovemo ***glavnom dijagonalom*** *(ili samo* dijagonalom*) matrice A. Uređenu n-torku*

$$(a_{1n}, a_{2,n-1}, \ldots, a_{n1})$$

zovemo ***sporednom dijagonalom*** *matrice A.*

Definicija 2.1.3. *Matrica tipa $(m, 1)$ naziva se* ***stupčana****, a matrica tipa $(1, n)$ –* ***retčana****.*

Na primjer, matrica $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ je retčana matrica, a $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ je stupčana matrica.

Definicija 2.1.4. *Matrice $A = [a_{ij}]$ i $B = [b_{ij}]$ su* ***jednake****, što pišemo $A{=}B$ ako su jednake kao preslikavanja, to jest ako su istog tipa te ako su im elementi na odgovarajućim pozicijama jednaki. (Ako su A i B tipa (m, n), onda $a_{ij} = b_{ij}$ za sve $i = 1, \ldots, m$ i $j = 1, \ldots, n$.)*

Sada ćemo uvesti osnovne operacije s matricama – zbrajanje matrica i množenje matrica skalarom. Operacije se definiraju prirodno – po elementima matrice, što je u skladu s činjenicom da smo matrice definirali kao preslikavanja. Naime, zbrajanje funkcija i množenje funkcija skalarom realizirali smo po točkama.

Definicija 2.1.5. ***Zbroj matrica*** *$A = [a_{ij}]$ i $B = [b_{ij}]$ tipa (m, n) je matrica $C = [c_{ij}]$ tipa (m, n) za čije elemente vrijedi*

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij},$$

za sve $i = 1, \ldots, m$ i $j = 1, \ldots, n$. Pišemo $C = A + B$.

Napomenimo da **ne definiramo** zbroj matrica različitog tipa. Na primjer, nije definirano

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Definicija 2.1.6. ***Nulmatrica*** *je matrica čiji su svi elementi jednaki nuli. Označavat ćemo je s* 0 *ili s* 0_{mn} *ako želimo istaknuti da je tipa* (m,n)*.*

Propozicija 2.1.7. *Skup matrica* $M_{mn}(\mathbb{F})$ *uz operaciju zbrajanja matrica je Abelova grupa.*

Dokaz. Zbrajanje matrica je očito binarna operacija koja je asocijativna i komutativna jer se definira po elementima matrice, a oni su iz polja $\mathbb{F}$. Neutralni element je nulmatrica, 0_{mn}. Svaka matrica $A = [a_{ij}]$ ima suprotnu matricu $-A = [-a_{ij}]$. $\square$

Definicija 2.1.8. ***Umnožak matrice*** $A = [a_{ij}]$ *tipa* (m,n) ***skalarom*** $\lambda \in \mathbb{F}$ *je matrica* $B = [b_{ij}]$ *tipa* (m,n) *za čije elemente vrijedi*

$$b_{ij} = \lambda a_{ij},$$

za sve $i = 1,\dots,m$ *i* $j = 1,\dots,n$*. Pišemo* $B = \lambda A$*.*

Teorem 2.1.9. *Skup matrica* $M_{mn}(\mathbb{F})$ *uz operacije zbrajanja matrica i množenje matrica skalarom je vektorski prostor nad poljem* $\mathbb{F}$ *čija je dimenzija jednaka* $m \cdot n$*.*

Dokaz. Pokazali smo da je $(M_{mn}(\mathbb{F}), +)$ Abelova grupa, a ostala svojstva (kvaziasocijativnosti, obje distributivnosti i množenje s 1) vrijede jer su operacije definirane po elementima (točkama).

Neka je $A = [a_{ij}] \in M_{mn}(\mathbb{F})$. Tada je

$$A = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} E_{ij},$$

gdje je E_{ij} matrica čiji su svi elementi jednaki nuli osim elementa na presjeku i-tog retka i j-tog stupca, odnosno

$$[E_{ij}]_{kl} = \begin{cases} 1, & k = i,\, l = j \\ 0, & \text{inače} \end{cases}.$$

Skup $B = \{E_{ij} : i = 1,\dots,m,\, j = 1,\dots,n\}$ je očito sustav izvodnica za $M_{mn}(\mathbb{F})$ i linearno nezavisan skup (jer se očito nijedna matrica E_{ij} ne može prikazati kao linearna kombinacija preostalih matrica iz B). Dakle, skup B je baza za $M_{mn}(\mathbb{F})$, pa je $\dim M_{mn}(\mathbb{F}) = |B| = mn$. $\square$

Napomenimo da se svaka matrica $A = [a_{ij}]$ tipa (m, n) može shvatiti kao uređena mn-torka

$$(a_{11}, \dots, a_{1n}, a_{21}, \dots, a_{2n}, \dots, a_{m1}, \dots, a_{mn}).$$

Dakle, postoji prirodna bijekcija $M_{mn}(\mathbb{F}) \to \mathbb{F}^{mn}$. Stoga je tvrdnja teorema 2.1.9 usklađena s činjenicom da je i $\mathbb{F}^{mn}$ vektorski prostor nad poljem $\mathbb{F}$ dimenzije mn. Takve prostore zovemo *izomorfnima*, a o tome će više biti govora na kolegiju *Linearna algebra 2*.

2.2 Neke posebne matrice

U ovom dijelu istaknut ćemo neke matrice koje su posebne sadržajem odnosno nekim specifičnim svojstvom koje zadovoljavaju.

Definicija 2.2.1. *Matrica reda n*

- *$D = (d_{ij})$ je **dijagonalna** ako $d_{ij} = 0$ za sve $i \neq j$.*
- *$S = (s_{ij})$ je **skalarna** ako je dijagonalna i postoji $\alpha \in \mathbb{F}$ za koji je $s_{ii} = \alpha$ za sve $i = 1, \dots, n$.*
- *$I = (\delta_{ij})$ je **jedinična** ako je skalarna i $\delta_{ii} = 1$ za sve $i = 1, \dots, n$.*
- *$G = (g_{ij})$ je **gornjotrokutasta** ako je $g_{ij} = 0$ za sve $1 \leq j < i \leq n$.*
- *$H = (h_{ij})$ je **donjotrokutasta** ako je $h_{ij} = 0$ za sve $1 \leq i < j \leq n$.*

Pogledajmo neke primjere upravo definiranih matrica:

- $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ je dijagonalna matrica. Kraće pišemo $D = \operatorname{diag}(1, 0, 2)$.
- $S = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ je skalarna matrica.
- $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ je jedinična matrica (reda 3). Uočimo, $S = 2I$.
- $G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ je gornjotrokutasta matrica.

- $H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ je donjotrokutasta matrica.

Primjer 2.1. Sljedeći skupovi:

- skup svih dijagonalnih matrica reda n,
- skup svih skalarnih matrica reda n,
- skup svih gornjotrokutastih (donjotrokutastih) matrica reda n

predstavljaju vektorske potprostore od $M_n(\mathbb{F})$ dimenzija n, 1 i $\frac{n(n+1)}{2}$, redom. Zaista, lako se ustanovi da su gornji skupovi zatvoreni na zbrajanje matrica i množenje matrica skalarom. Dalje, skup

$$B_D = \{E_{ii} \, : \, i = 1, \dots, n\}$$

je baza za potprostor dijagonalnih matrica reda n. Skup

$$B_S = \{I\}$$

je baza za potprostor skalarnih matrica reda n, skup

$$B_G = \{E_{ij} \, : \, 1 \leq i \leq j \leq n\}$$

je baza za potprostor gornjotrokutastih matrica reda n, a skup

$$B_G = \{E_{ij} \, : \, 1 \leq j \leq i \leq n\}$$

je baza za potprostor donjotrokutastih matrica reda n. ♡

Definicija 2.2.2. *Neka je $A = [a_{ij}] \in M_{mn}(\mathbb{F})$.* ***Transponirana matrica*** *matrice A je matrica $B = [b_{ij}] \in M_{nm}(\mathbb{F})$ za čije elemente vrijedi*

$$b_{ij} = a_{ji},$$

za sve $i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, m$. Pišemo $B = A^t$.

Operacija

$$t : M_{mn}(\mathbb{F}) \to M_{nm}(\mathbb{F}), \; A \mapsto A^t,$$

naziva se ***transponiranje****.*

Ponekad se transponirana matrica označava s A^τ ili s A'.

Primjer 2.2. Neka je

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}.$$

Tada je

$$A^t = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}.$$

Uočimo da redci matrice A predstavljaju stupce matrice A^t i obratno.

♡

Propozicija 2.2.3. *Neka su* $A, B \in M_{mn}(\mathbb{F})$ *te* $\lambda \in \mathbb{F}$. *Vrijedi*

(1) $(A^t)^t = A$,

(2) $(A + B)^t = A^t + B^t$,

(3) $(\lambda A)^t = \lambda A^t$.

Dokaz. Svaka od tvrdnji se dokazuje na isti način. Prvo ustanovimo da se s lijeve i desne strane jednakosti nalaze matrice istog tipa, a zatim pokažemo jednakost odgovarajućih elemenata. Na primjer, u (2) vidimo da su $(A + B)^t$ i $A^t + B^t$ tipa (m, n) i vrijedi

$$[(A + B)^t]_{ij} = [A + B]_{ji} = [A]_{ji} + [B]_{ji} = [A^t]_{ij} + [B^t]_{ij} = [A^t + B^t]_{ij},$$

za sve $i = 1, \ldots, n$ i $j = 1, \ldots, m$. □

Definicija 2.2.4. *Matrica* $A \in M_n(\mathbb{F})$ ***simetrična*** *je ako vrijedi*

$$A = A^t,$$

odnosno ***antisimetrična*** *ako*

$$A = -A^t.$$

Primjer 2.3. Neka su $\mathcal{S}$, odnosno $\mathcal{A}$ skup svih simetričnih, odnosno antisimetričnih matrica reda n s elementima iz polja $\mathbb{R}$. Tada su $\mathcal{S}$ i $\mathcal{A}$ vektorski potprostori od $M_n(\mathbb{R})$. Zaista, ako su $A, B \in \mathcal{S}$ i $\lambda \in \mathbb{R}$, tada je

$$(\lambda A + B)^t = \{\textit{Prop. 2.2.3}\} = \lambda A^t + B^t = \lambda A + B,$$

pa je matrica $\lambda A + B$ simetrična, to jest $\lambda A + B \in \mathcal{S}$. Znači, $\mathcal{S} \leq M_n(\mathbb{R})$. Analogno, za $A, B \in \mathcal{A}$ imamo

$$(\lambda A + B)^t = \lambda A^t + B^t = \lambda(-A) + (-B) = -(\lambda A + B),$$

pa je $\lambda A + B \in \mathcal{A}$, odnosno $\mathcal{A} \leq M_n(\mathbb{R})$.

Uočimo da je nulmatrica jedina realna matrica reda n koja je i simetrična i antisimetrična. Naime, ako za matricu A vrijedi $A = A^t$ i $A^t = -A$, to znači da je $A = -A$ pa je tada $A = 0$. Dakle, presjek potprostora $\mathcal{S} \cap \mathcal{A} = \{0\}$.

Odredimo sada dimenzije potprostora $\mathcal{S}$ i $\mathcal{A}$. Prema definiciji simetrične matrice jasno je da je $A \in \mathcal{S}$ ako i samo ako je oblika

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & a_{3n} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Vidimo da je

$$A = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} E_{ii} + \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}(E_{ij} + E_{ji}),$$

gdje je E_{ij} matrica reda n koja na mjestu (i,j) ima vrijednost 1, a na svim ostalim mjestima nalazi se 0. Stoga skup

$$\{E_{ii} \,:\, i = 1, \dots, n\} \cup \{E_{ij} + E_{ji} \,:\, 1 \le i < j \le n\}$$

predstavlja sustav izvodnica za $\mathcal{S}$, ali i bazu jer se lako može ustanoviti da je linearno nezavisan. Broj elemenata tog skupa je

$$n + (1 + 2 + \dots + n - 1) = n + \frac{(n-1)n}{2} = \frac{n(n+1)}{2},$$

pa je

$$\dim \mathcal{S} = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Slično, $B \in \mathcal{A}$ ako i samo ako je

$$B = \begin{pmatrix} 0 & b_{12} & b_{13} & \dots & b_{1n} \\ -b_{12} & 0 & b_{23} & \dots & b_{2n} \\ -b_{13} & -b_{23} & 0 & \dots & b_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ -b_{1n} & -b_{2n} & -b_{3n} & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Uočavamo da su dijagonalni elementi antisimetrične matrice jednaki 0 jer iz definicije slijedi da je $b_{ii} = -b_{ii}$, odnosno $2b_{ii} = 0$, što povlači da je $b_{ii} = 0$ za sve $i = 1, \dots, n$. Dalje, možemo ustanoviti da skup

$$\{E_{ij} - E_{ji} \,:\, 1 \le i < j \le n\}$$

predstavlja bazu za $\mathcal{A}$ pa je

$$\dim \mathcal{A} = 1 + 2 + \dots + n - 1 = \frac{(n-1)n}{2}.$$

Uočimo i ovo:

$$\dim \mathcal{S} + \dim \mathcal{A} = \frac{n(n+1)}{2} + \frac{(n-1)n}{2} = n^2 = \dim M_n(\mathbb{R}).$$

Kako je $\dim(\mathcal{S}\cap\mathcal{A}) = 0$, suma potprostora $\mathcal{S}+\mathcal{A}$ je direktna pa po korolaru 1.6.9 vrijedi $\dim(\mathcal{S}\dot{+}\mathcal{A}) = \dim\mathcal{S} + \dim\mathcal{A}$. Tada je $\dim(\mathcal{S}\dot{+}\mathcal{A}) = n^2 = \dim M_n(\mathbb{R})$. Iz propozicije 1.5.6. slijedi da je

$$\mathcal{S}\dot{+}\mathcal{A} = M_n(\mathbb{R}).$$

Naime, $\mathcal{S}\dot{+}\mathcal{A}$ je potprostor dimenzije jednake dimenziji cijelog prostora pa je ta suma jednaka prostoru $M_n(\mathbb{R})$. Kao posljedicu toga dobivamo da se *svaka kvadratna matrica može jedinstveno prikazati kao zbroj jedne simetrične i jedne antisimetrične matrice.* Konkretno, za $C \in M_n(\mathbb{R})$ iz $C = X + Y$, pri čemu $X = X^t$ i $Y = -Y^t$, lako se dobiva

$$C = \underbrace{\frac{1}{2}(C + C^t)}_{X} + \underbrace{\frac{1}{2}(C - C^t)}_{Y}.$$

♡

Za kvadratne matrice definirat ćemo i pojam *traga matrice*, čija će važnost više doći do izražaja u Linearnoj algebri 2.

Definicija 2.2.5. *Neka je* $A = [a_{ij}] \in M_n(\mathbb{F})$. ***Trag*** *matrice* A*, u oznaci* $\operatorname{tr} A$*, jednak je zbroju svih koeficijenata na dijagonali, to jest*

$$\operatorname{tr} A = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}.$$

Tako je zadano preslikavanje $\operatorname{tr} A : M_n(\mathbb{F}) \to \mathbb{F}$ *koje matrici* A *pridružuje njezin trag* $\operatorname{tr} A$*.*

Zadatak 2.1. *Neka su* $A, B \in M_n(\mathbb{F})$ *te* $\lambda \in \mathbb{F}$*. Dokažite da vrijedi:*

(i) $\operatorname{tr}(A + B) = \operatorname{tr} A + \operatorname{tr} B$, $\operatorname{tr}(\lambda A) = \lambda \operatorname{tr} A$.

(ii) Skup $\{A \in M_n(\mathbb{F}) : \operatorname{tr} A = 0\}$ *je potprostor vektorskog prostora* $M_n(\mathbb{F})$*. Odredite jednu bazu i dimenziju tog potrostora.*

Definicija 2.2.6. *Neka je* $A = [a_{ij}] \in M_{mn}(\mathbb{C})$*.* ***Hermitski adjungirana*** *matrica matrice* A *je matrica* $B = [b_{ij}] \in M_{nm}(\mathbb{C})$ *za čije elemente vrijedi*

$$b_{ij} = \overline{a_{ji}},$$

za sve $i = 1, \dots, n$*,* $j = 1, \dots, m$*. Pišemo* $B = A^*$*.*

Operacija

$$* : M_{mn}(\mathbb{C}) \to M_{nm}(\mathbb{C}),\ A \mapsto A^*,$$

naziva se ***hermitsko adjungiranje****.*

Hermitski adjungirana matrica A^* dobivena je transponiranjem i kompleksnim konjugiranjem matrice A (odnosno njezinih elemenata), pri čemu te dvije operacije komutiraju, to jest

$$A^* = \overline{A}^t = \overline{A^t}.$$

Zbog toga operacija hermitskog adjungiranja ima neka svojstva koja su analogna svojstvima transponiranja.

Zadatak 2.2. *Pokažite da za matrice A i B te skalare α i β vrijede sljedeća svojstva:*

1. $A^* = A^t$ *ako i samo ako su elementi matrice A realni brojevi.*
2. $(A^*)^* = A$
3. $(\alpha A + \beta B)^* = \overline{\alpha} A^* + \overline{\beta} B^*$
4. $(AB)^* = B^* A^*$

Definicija 2.2.7. *Matrica $A \in M_n(\mathbb{C})$* ***hermitski simetrična*** *je ako vrijedi*

$$A = A^*,$$

odnosno ***hermitski antisimetrična*** *ako*

$$A = -A^*.$$

Ponekad se hermitski simetrične matrice kratko nazivaju *hermitske*, a hermitski antisimetrične – *antihermitske*.

Zadatak 2.3. *Dokažite tvrdnje:*

1. *Skup svih hermitskih matrica iz $M_n(\mathbb{C})$ je potprostor realnog prostora $M_n(\mathbb{C})_{\mathbb{R}}$, ali nije potprostor kompleksnog prostora $M_n(\mathbb{C})$.*
2. *Skup svih antihermitskih matrica iz $M_n(\mathbb{C})$ je potprostor realnog prostora $M_n(\mathbb{C})_{\mathbb{R}}$, ali nije potprostor kompleksnog prostora $M_n(\mathbb{C})$.*

Odredite jednu bazu i dimenziju za realni potprostor svih hermitskih matrica reda 3 te za realni potprostor svih antihermitskih matrica reda 3.

2.3 Množenje matrica

Definicija 2.3.1. *Matrice A i B su* ***ulančane*** *ako je broj stupaca matrice A jednak broju redaka matrice B.*

Često govorimo o paru ulančanih matrica (A, B) jer ovo svojstvo nije općenito simetrično. Zaista, ako je A tipa (m, n) i B tipa (n, p), onda je par matrica (A, B) ulančan, dok je par (B, A) ulančan samo ako je $m = p$.

Definicija 2.3.2. *Neka su $A = [a_{ij}]$ i $B = [b_{ij}]$ ulančane matrice tipa (m, n) i (n, p), redom.* ***Umnožak matrica*** *A i B je matrica $C = [c_{ij}]$ tipa (m, p) čiji su elementi dani sljedećom formulom*

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj},$$

za $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, p$. Pišemo, $C = A \cdot B = AB$. Na ovaj način definirali smo operaciju ***množenja matrica***

$$\cdot : M_{mn}(\mathbb{F}) \times M_{np}(\mathbb{F}) \to M_{mp}(\mathbb{F}).$$

Prvo što opažamo da je množenje matrica znatno složenija operacija od svih dosad definiranih operacija na matricama (zbrajanje, množenje matrica skalarom, transponiranje). Možda to na prvi pogled izgleda čudno, no vidjet ćemo da ovakva definicija množenja itekako ima smisla. Ukratko, možemo pamtiti da (i, j)-ti element produkta AB dobivamo tako što i-ti redak matrice A, $(a_{i1}, \ldots, a_{in})$, pomnožimo *skalarno* s j-tim stupcem matrice B, $(b_{1j}, \ldots, b_{nj})$.

Jedan od razloga ovakve definicije množenja matrica možemo vidjeti na sljedećem primjeru.

Primjer 2.4. Zadan je sustav linearnih jednadžbi

$$\begin{array}{rcrcl} 2x_1 & - & 3x_2 & = & 1 \\ 4x_1 & + & 5x_2 & = & 2 \end{array}.$$

Zamislimo da ga želimo zapisati u obliku jedne linearne jednadžbe $ax = b$. Jasno je da umjesto koeficijenta a imamo „paket koeficijenata” uz nepoznanice x_1 i x_2. Taj je „paket koeficijenata” prirodno zapisati kao matricu

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

Analogno tomu slobodne koeficijente zapisujemo kao stupčanu matricu

$$B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix},$$

a nepoznanice kao

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Uočimo da je

$$AX = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 - 3x_2 \\ 4x_1 + 5x_2 \end{pmatrix},$$

pa dani sustav ima isti zapis kao i linearna jednadžba s jednom nepoznanicom, $AX = B$. ♡

Sada ćemo pokazati osnovna svojstva množenja matrica. Neka od tih svojstava na prvi su pogled neobična, baš kao što je i sama definicija množenja. Tako množenje matrica općenito *nije komutativna operacija*. Za početak uočimo da je o komutativnosti smisleno govoriti samo ako su A i B kvadratne matrice istog reda. Zaista, ako nisu i ako je umnožak AB definiran, BA to ne treba biti jer smo već napomenuli da svojstvo *biti ulančan* nije simetrično. Nadalje, ako A i B nisu kvadratne nego tipa (m, n) i (n, m), onda su oba umnoška definirana, AB i BA. No to su kvadratne matrice različitih redova (AB je reda m, a BA je reda n).

Primjer 2.5. Vrijedi

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}, \quad BA = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 7 & 4 \end{pmatrix}.$$

Dakle, $AB \neq BA$, odnosno množenje matrica *nije komutativna operacija*. S druge strane postoje matrice koje *komutiraju*. Na primjer,

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

♡

Propozicija 2.3.3. *Vrijedi*

$$(AB)C = A(BC),$$

za sve matrice za koje je gornji izraz definiran.

Dokaz. Neka je A matrica tipa (m, n), B tipa (n, p) i C tipa (p, q). Lako možemo ustanoviti da su matrice $(AB)C$ i $A(BC)$ tipa (m, q). Zaista, matrica AB je tipa (m, p), pa je $(AB)C$ tipa (m, q). Nadalje, BC je (n, q), pa je $A(BC)$ također tipa (m, q).

Provjerimo sada jednakost odgovarajućih elemenata tih matrice,

$$\begin{aligned} [(AB)C]_{ij} &= \sum_{k=1}^{p} [AB]_{ik} [C]_{kj} = \sum_{k=1}^{p} \left(\sum_{l=1}^{n} [A]_{il} [B]_{lk} \right) [C]_{kj} \\ &= \sum_{l=1}^{n} [A]_{il} \left(\sum_{k=1}^{p} [B]_{lk} [C]_{kj} \right) = \sum_{l=1}^{n} [A]_{il} [BC]_{lj} = [A(BC)]_{ij}, \end{aligned}$$

za sve $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, q$. □

Propozicija 2.3.4. *Množenje matrica je*

(1) *kvaziasocijativno, to jest*

$$(\lambda A)B = \lambda(AB) = A(\lambda B),$$

za sve $\lambda \in \mathbb{F}$ te A i B za koje je gornji izraz definiran.

(2) *distributivno prema zbrajanju matrice, to jest*

$$(A+B)C = AC + BC, \quad A(B+C) = AB + AC$$

za sve A, B i C za koje je gornji izraz definiran.

Dokaz. **(1)** Neka je $A \in M_{mn}(\mathbb{F})$ te $B \in M_{np}(\mathbb{F})$. Tada su matrice $(\lambda A)B$, $\lambda(AB)$ i $A(\lambda B)$ tipa (m,p). Vrijedi

$$[(\lambda A)B]_{ij} = \sum_{k=1}^{n} [\lambda A]_{ik}[B]_{kj} = \sum_{k=1}^{n} (\lambda [A]_{ik})[B]_{kj} = \lambda \sum_{k=1}^{n} [A]_{ik}[B]_{kj} = \lambda [AB]_{ij},$$

za sve $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, p$. Na isti način provjerimo preostalu jednakost.

(2) Neka su $A, B \in M_{mn}(\mathbb{F})$ te $C \in M_{np}(\mathbb{F})$. Tada su $(A+B)C, AC+BC \in M_{mp}(\mathbb{F})$. Vrijedi

$$\begin{aligned} [(A+B)C]_{ij} &= \sum_{k=1}^{n} [A+B]_{ik}[C]_{kj} = \sum_{k=1}^{n} ([A]_{ik} + [B]_{ik})[C]_{kj} \\ &= \sum_{k=1}^{n} [A]_{ik}[C]_{kj} + \sum_{k=1}^{n} [B]_{ik}[C]_{kj} = [AC]_{ij} + [BC]_{ij} = [AC+BC]_{ij}, \end{aligned}$$

za sve $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, p$.

□

Propozicija 2.3.5. *Neka je $A \in M_{mn}(\mathbb{F})$. Vrijedi $I_m A = A$ i $A I_n = A$, gdje su I_m i I_n jedinične matrice reda m, odnosno n.*

Dokaz. Očito je $I_m A$ tipa (m,n). Neka je $I_m = I = (\delta_{ij})$ te $A = (a_{ij})$. Tada

$$[IA]_{ij} = \sum_{k=1}^{m} \delta_{ik} a_{kj} = \{\delta_{ik} = 1, \text{ za } i = k, \text{ inače } \delta_{ik} = 0\} = a_{ij}.$$

□

Množenje matrica na skupu matrica reda n, $M_n(\mathbb{F})$, binarna je operacija. Na temelju svega što smo pokazali u propozicijama 2.3.3, 2.3.4 i 2.3.5 vidimo da $(M_n(\mathbb{F}), \cdot)$ ima algebarsku strukturu koju smo već upoznali.

Korolar 2.3.6. *Skup $M_n(\mathbb{F})$, $n \geq 2$, s obzirom na operaciju množenja matrica je nekomutativni monoid.*

Dokaz. Prema propoziciji 2.3.3 množenja matrica je asocijativno u $M_n(\mathbb{F})$. Propozicija 2.3.5 povlači da je $AI = IA = A$, za sve $A \in M_n(\mathbb{F})$. $\square$

Štoviše, $M_n(\mathbb{F})$ je primjer strukture koja se naziva **asocijativna algebra s jedinicom**. Naime, algebra je svaki vektorski prostor s definiranim tzv. bilinearnim množenjem (to jest množenjem koje zadovoljava svojstva distributivnosti i kvaziasocijativnosti). Budući da je množenje i asocijativno, dobiva pridjev *asocijativna* te zbog postojanja neutralnog elementa množenja (I) ističemo i ono s *jedinicom*. Prisjetimo se da smo se već susreli s ovom strukturom. Na kolegiju *Analitička geometrija* pokazuje se da je prostor V^3 (neasocijativna) algebra, pri čemu ulogu množenja ima operacija vektorskog produkta.

Zadatak 2.4. *Neka je $A \in M_n(\mathbb{R})$, $n \geq 2$ te neka je $C(A) = \{X \in M_n(\mathbb{R}) : AX = XA\}$. Tada je $C(A) \leq M_n(\mathbb{R})$ i $\dim C(A) \geq 2$. Dokažite.*

Primjer 2.6. Sljedeći skupovi:

- skup svih dijagonalnih matrica reda n,
- skup svih skalarnih matrica reda n,
- skup svih gornjotrokutastih (donjotrokutastih) matrica reda n

predstavljaju podalgebre od $M_n(\mathbb{F})$ (i to asocijativne s jedinicom). U primjeru 2.1 pokazali smo da su to potprostori od $M_n(\mathbb{F})$. Sada jedino moramo ustanoviti da su zatvoreni na množenje. Neka su $C = \operatorname{diag}(c_1, \ldots, c_n)$ i $D = \operatorname{diag}(d_1, \ldots, d_n)$ dijagonalne matrice reda n. Za $i \neq j$ vrijedi

$$[CD]_{ij} = \sum_{k=1}^{n} [C]_{ik}[D]_{kj} = c_i[D]_{ij} + [C]_{ij}d_j = 0,$$

za $i = j$ je

$$[CD]_{ii} = \sum_{k=1}^{n} [C]_{ik}[D]_{ki} = c_i d_i,$$

pa je

$$CD = \operatorname{diag}(c_1 d_1, \ldots, c_n d_n).$$

Ako su $S = sI$, $T = tI$ skalarne matrice, onda je i $ST = (st)I$ skalarna matrica.

Neka su G i H gornjotrokutaste matrice. Izračunajmo element njihova umnoška na mjestu (i,j) za $1 \leq j < i \leq n$,

$$[GH]_{ij} = \sum_{k=1}^{n} [G]_{ik}[H]_{kj} = \underbrace{\sum_{k=1}^{i-1} [G]_{ik}[H]_{kj}}_{[G]_{ik}=0,\ k=1,\dots,i-1} + \underbrace{\sum_{k=i}^{n} [G]_{ik}[H]_{kj}}_{[H]_{kj}=0,\ k=i,\dots,n,\ jer\ k>j} = 0.$$

Stoga je GH gornjotrokutasta matrica.

♡

Primjer 2.7. U svakoj asocijativnoj algebri s jedinicom, nad poljem $\mathbb{F}$, ima smisla promatrati polinome s koeficijentima iz $\mathbb{F}$. To vrijedi i za algebru $M_n(\mathbb{F})$ pa tako dobivamo *matrične polinome*. Ako je polinom p s koeficijentima iz polja $\mathbb{F}$ zadan s

$$p(t) = \sum_{i=0}^{k} \alpha_i t^i,$$

definirana je vrijednost polinoma $p(A)$ za matricu $A \in M_n(\mathbb{F})$ kao

$$p(A) = \sum_{i=0}^{k} \alpha_i A^i.$$

Pritom se definira $A^0 = I$.

Očito je $p(A)$ također kvadratna matrica reda n. Matrični polinomi pokazuju se važnima u linearnoj algebri. Svojstva matričnih polinoma ne podudaraju se u svemu s polinomima u kojima varijabla poprima vrijednost u nekom polju. Primjerice, u pogledu nultočaka $p(t) = t^2 - 1$ ima u polju $\mathbb{R}$ točno dvije nultočke, 1 i -1, dok u skupu $M_2(\mathbb{R})$ postoji više matrica koje „poništavaju" taj polinom. Iako vrijedi faktorizacija $A^2 - I = (A+I)(A-I)$, odakle je očito $p(-I) = p(I) = 0$ (nulmatrica), npr. za

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

također vrijedi $p(B) = 0$. Štoviše, u $M_2(\mathbb{R})$ postoji beskonačno mnogo matrica čiji je kvadrat jedinična matrica I.

S druge strane, polinom $q(t) = t^2 + 1$ nema nultočaka u polju $\mathbb{R}$, ali u skupu $M_2(\mathbb{R})$ postoje matrice čiji je kvadrat matrica $-I$, primjerice

$$C = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

pa je $q(C) = 0$. I za ovaj polinom postoji beskonačno mnogo realnih matrica za koje matrični polinom poprima vrijednost 0.

Ovako važne razlike pojavljuju se stoga što je matrična polinomijalna jednadžba ekvivalentna sustavu algebarskih jednadžbi u polju. Određivanje skupa rješenja takvog sustava općenito je znatno složeniji problem. ♡

Propozicija 2.3.7. *Vrijedi*

$$(AB)^t = B^t A^t,$$

čim je umnožak definiran.

Dokaz. Ako je A tipa (m, n) i B tipa (n, p), onda su matrice $(AB)^t$ i $B^t A^t$ tipa (p, m). Za (i, j) takve da je $1 \leq i \leq p$ i $1 \leq j \leq m$ vrijedi

$$[(AB)^t]_{ij} = [AB]_{ji} = \sum_{k=1}^{n} [A]_{jk}[B]_{ki} = \sum_{k=1}^{n} [A^t]_{kj}[B^t]_{ik} = \sum_{k=1}^{n} [B^t]_{ik}[A^t]_{kj} = [B^t A^t]_{ij}.$$

□

Jasno je da prethodni rezultat možemo poopćiti na konačno mnogo matrica, $(A_1 \cdots A_k)^t = A_k^t \cdots A_1^t$.

Ustanovili smo da $(M_n(\mathbb{F}), \cdot)$ monoid. Možemo pitati je li možda ova struktura i grupa. Odgovor je niječan, što možemo zorno vidjeti u sljedećem primjeru.

Primjer 2.8. Zadana je matrica

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Pitamo se postoji li matrica X reda 2 za koju $AX = XA = I$. Neka je

$$X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}.$$

Iz $AX = I$ dobivamo sustav

$$\begin{array}{ccccc} x_1 & + & 2x_3 & = & 1 \\ x_1 & + & 2x_3 & = & 0 \end{array},$$

te isti sustav za x_2 i x_4. Očito ti sustavi nemaju rješenja, pa takva matrica X ne postoji.

♡

Definicija 2.3.8. *Kvadratna matrica $A \in M_n(\mathbb{F})$ je **invertibilna** ili **regularna** ako postoji matrica $B \in M_n(\mathbb{F})$ takva da je*

$$AB = BA = I.$$

*Matricu B zovemo **inverznom matricom** od A i pišemo $B = A^{-1}$. U protivnom je A **singularna** matrica.*

Prisjetimo se nekih tvrdnji koje vrijede u svakom monoidu koje smo pokazali u odsječku 1.1.2 (propozicije 1.1.7 i 1.1.8). Budući da je $(M_n(\mathbb{F}), \cdot)$ multiplikativni monoid, vrijedi sljedeće:

- Ako inverz postoji, on je jedinstven. Stoga je opravdano inverz matrice A označiti s A^{-1}. Nadalje, i A^{-1} je regularna i vrijedi $(A^{-1})^{-1} = A$.
- Ako su A i B regularne matrice, onda je to AB te vrijedi $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$. Tvrdnju možemo poopćiti i na konačno mnogo regularnih matrica A_1, ..., A_k. Tada je $(A_1 \cdots A_k)^{-1} = A_k^{-1} \cdots A_1^{-1}$.

Pri množenju matrica moguće je da umnožak dviju matrica A i B, koje su obje različite od 0, bude nulmatrica, $AB = 0$. To je jedna od važnih razlika u odnosu na množenje brojeva poput cijelih, racionalnih ili realnih.

Primjer 2.9. Za

$$A = [1\ 2\ 3], \ B = [4\ 1\ -2]$$

je $AB^t = [0]$. Slično se može dogoditi i za kvadratne matrice jednakog tipa, npr.

$$G = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}, \ H = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

daju umnožak

$$GH = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

♡

Kod prstena smo spomenuli mogućnost postojanja tzv. djelitelja nule (v. odjeljak 1.1.3), a skup kvadratnih matrica $M_n(\mathbb{R})$ s operacijama zbrajanja i množenja matrica primjer je nekomutativnog prstena s jedinicom u kojem postoje djelitelji nule (čim je $n \geq 2$).

Dakle, za kvadratne matrice A, B i C jednakog reda, pri čemu je $A \neq 0$, ne možemo izvoditi „skraćivanje" na kakvo smo naviknuti kod brojeva, tj. u polju. Iz $AB = AC$ ne slijedi nužno $B = C$ jer $A(B - C) = 0$ općenito ne povlači da je $B - C = 0$. Na tu činjenicu valja pripaziti jer često dovodi do pogrešaka u rješavanju zadataka.

No ako je matrica ne samo različita od 0 nego i invertibilna, skraćivanje se jednostavno izvodi množenjem matricom A^{-1}. U polju je invertibilnost ekvivalentna s različitosti od 0, dok u prstenu, posebno u prstenu kvadratnih matrica, to ne vrijedi općenito.

2.4 Elementarne transformacije i elementarne matrice

Neka je $A = [a_{ij}] \in M_{mn}(\mathbb{F})$. Označimo sa $S_1, \ldots, S_n$ redom stupce matrice A, to jest

$$S_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \ \ldots, S_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} \in M_{m,1}(\mathbb{F}).$$

Kažemo da je

$$(S_1, \ldots, S_n)$$

stupčana reprezentacija matrice A. Doista, ova uređena n-torka jednostupčanih matrica potpuno određuje matricu A, jer važan je redoslijed stupaca, a neki stupci mogu se u matrici i ponavljati pa nije dovoljno precizno govoriti samo o „skupu stupaca” .

Međutim, redoslijed stupaca matrice i moguće jednakosti nekih stupaca ne utječu na linearnu ljusku

$$[S_1, \ldots, S_n]$$

kao potprostora vektorskog prostora $M_{m,1}(\mathbb{F})$, razapetog stupcima matrice. Pritom dimenzija potprostora $[S_1, \ldots, S_n]$ nije veća od $m = \dim M_{m,1}(\mathbb{F})$. S druge strane, dimenzija te linearne ljuske nije veća od n jer skup od n vektora sadrži bazu svoje linearne ljuske. Stoga je

$$\dim[S_1, \ldots, S_n] \leq \min\{m, n\}.$$

Na isti način možemo promatrati redčanu reprezentaciju matrice A:

$$(R_1, \ldots, R_m),$$

gdje je

$$R_1 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \end{pmatrix}, \ldots, R_m = \begin{pmatrix} a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \in M_{1,n}(\mathbb{F}).$$

Analogno, vrijedi

$$\dim[R_1, \ldots, R_m] \leq \min\{m, n\}.$$

Lako je ustanoviti da neke operacije (transformacije) nad skupom vektora koji razapinje ljusku neće promijeniti dimenziju ljuske. Neka je $S = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ podskup nekog vektorskog prostora V nad poljem $\mathbb{F}$. Nad skupom S izvodimo sljedeće operacije:

1. Međusobna zamjena nekih dvaju vektora. Na primjer, imamo $S' = \{x_2, x_1, \ldots, x_n\} = S$. Jasno je $[S] = [S']$.

2. Množenje nekog vektora skalarom $\lambda \neq 0$. Na primjer, $S' = \{\lambda x_1, x_2, \ldots, x_n\}$. I ovdje vrijedi $[S] = [S']$.

3. Pribrajanje nekog vektora nekom drugom vektoru. Na primjer, $S' = \{x_1, x_2 + x_1, x_3, \ldots, x_n\}$. Ponovno, lako je ustanoviti da je $[S] = [S']$.

Opisane operacije izvodit ćemo nad stupcima ili redcima matrice.

Definicija 2.4.1. ***Elementarne transformacije nad matricom*** $A \in M_{mn}(\mathbb{F})$ *su:*

(I) *zamjena dvaju stupaca (redaka),*

(II) *množenje nekog stupca (retka) skalarom* $\lambda \neq 0$*,*

(III) *pribrajanje nekom stupcu (retku) nekog drugog stupca (retka) pomnoženog skalarom* λ*.*

Uočimo da se primjenom elementarnih transformacija nad stupcima matrice A ne mijenja potprostor $[S_1, \dots, S_n] \leq M_{m,1}(\mathbb{F})$ pa se tako ne mijenja ni njegova dimenzija. Analogno, primjenom elementarnih transformacija nad redcima matrice A ne mijenja se potprostor $[R_1, \dots, R_m] \leq M_{1,n}(\mathbb{F})$ pa se tako ne mijenja ni njegova dimenzija.

U sljedećim primjerima uočit ćemo da se sve elementarne transformacije nad matricom mogu realizirati množenjem te matrice slijeva ili zdesna posebnim matricama.

Primjer 2.10. Neka je

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Uočimo,

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}}_{=F} \cdot A = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ \mathbf{-1} & \mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{2} \\ \mathbf{2} & \mathbf{0} & \mathbf{3} & \mathbf{1} \end{pmatrix}}_{zamjena\ 2.\ i\ 3.\ retka}.$$

Dakle, matrica FA dobivena je iz matrice A zamjenom 2. i 3. retka. Na isti način,

$$A \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{=G} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & \mathbf{-1} & \mathbf{2} & 0 \\ 2 & \mathbf{3} & \mathbf{0} & 1 \\ -1 & \mathbf{1} & \mathbf{2} & 2 \end{pmatrix}}_{zamjena\ 2.\ i\ 3.\ stupca},$$

odnosno množenje AG realizira zamjenu 2. i 3. stupca matrice. Uočimo da smo za realizaciju elementarne transformacije nad redcima množili matricu A slijeva, a za transformaciju nad stupcima zdesna. Nadalje, matrice F i G dobili smo upravo transformacijom prve vrste (konkretno zamjenom 2. i 3. stupca ili retka) jedinične matrice I reda 3, odnosno 4. Lako se vidi da je

$$F \cdot F = I_3, \ G \cdot G = I_4.$$

Posebno, matrice F i G su invertibilne. I više, kažemo da su *involutorne* jer im je inverz jednak njima samima.

♡

Primjer 2.11. Neka je A kao u primjeru 2.10 te neka su

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \ G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Uočimo,

$$F \cdot A = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ \mathbf{6} & \mathbf{0} & \mathbf{9} & \mathbf{3} \\ -1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}}_{2.\ redak\ pomnožen\ s\ 3}$$

te

$$A \cdot G = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & \mathbf{6} & -1 & 0 \\ 2 & \mathbf{0} & 3 & 1 \\ -1 & \mathbf{6} & 1 & 2 \end{pmatrix}}_{\textit{2. stupac pomnožen s 3}}.$$

Kao i u prethodnom primjeru množenje 2. retka ili stupca skalarom različitim od 0 realizirali smo množenjem matrice A slijeva, odnosno zdesna s matricom kojoj je 2. redak (ili stupac) jedinične matrice pomnožen odgovarajućim skalarom ($\lambda = 3$). Lako se vidi da su matrice F i G invertibilne. Zaista,

$$F \cdot F' = I_3, \ \ G \cdot G' = I_4,$$

gdje je

$$F' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \ G' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

♡

Primjer 2.12. Neka je A kao u primjeru 2.10 te neka su

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \ G = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Uočimo,

$$FA = \underbrace{\begin{pmatrix} \mathbf{7} & \mathbf{2} & \mathbf{8} & \mathbf{3} \\ 2 & 0 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}}_{\textit{1. retku pribrojen je 2. redak pomnožen s 3}},$$

$$AG = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & \mathbf{5} & -1 & 0 \\ 2 & \mathbf{6} & 3 & 1 \\ -1 & \mathbf{-1} & 1 & 2 \end{pmatrix}}_{\textit{2. stupcu pribrojen je 1. stupac pomnožen s 3}},$$

Matrice F i G su invertibilne. Inverzi su dani s

$$F^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \ G = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

♡

U primjerima 2.10, 2.11 i 2.12 opisali smo matrice F i G koje množenjem slijeva ili zdesna realiziraju elementarne transformacije 1., 2. i 3. vrste nad redcima ili stupcima. Takve se matrice nazivaju *elementarne matrice*. Nadalje, u primjerima smo vidjeli da su te matrice invertibilne, a njihovi inverzi također su elementarne matrice. Te se tvrdnje pokazuju i općenito.

Definicija 2.4.2. ***Elementarna matrica*** *reda n je matrica koja je dobivena jednom elementarnom transformacijom nad stupcima ili redcima jedinične matrice reda n.*

Propozicija 2.4.3. *Svaka elementarna matrica je regularna. Inverz elementarne matrice je elementarna matrica.*

Dokaz. Ako je elementarna matrica dobivena zamjenom dvaju stupaca ili redaka jedinične matrice, ona je involutorna, to jest inverz sama sebi.

Ako je elementarna matrica dobivena množenjem i-tog retka (stupca) jedinične matrice skalarom $\lambda \neq 0$, njoj inverzna matrica dobivena je množenjem i-tog retka (stupca) jedinične matrice skalarom $\frac{1}{\lambda}$.

Ako je elementarna matrica dobivena pribrajanjem i-tog retka (stupca) pomnoženog s λ, j-tom retku (stupcu) jedinične matrice, njoj inverzna matrica dobivena je pribrajanjem i-tog retka (stupca) pomnoženog s $-\lambda$, j-tom retku (stupcu) jedinične matrice.

□

Propozicija 2.4.4. *Neka je $A \in M_{mn}(\mathbb{F})$. Elementarne transformacije nad* redcima *matrice A mogu se realizirati* množenjem slijeva *s odgovarajućim elementarnim matricama reda m. Elementarne transformacije nad* stupcima *matrice A mogu se realizirati* množenjem zdesna *s odgovarajućim elementarnim matricama reda n.*

Definicija 2.4.5. *Neka su $A, B \in M_{mn}(\mathbb{F})$. Matrica A* **ekvivalentna** *je matrici B ako se B može dobiti iz A primjenom konačno mnogo elementarnih transformacija. Pišemo $A \sim B$.*

Prema propoziciji 2.4.4, ako je $A \sim B$, postoje elementarne matrice $F_1, \ldots, F_k$ reda m i elementarne matrice $G_1, \ldots, G_\ell$ reda n takve da je

$$B = (F_k \cdots F_1)A(G_1 \cdots G_\ell).$$

Kako su elementarne matrice regularne, to su i njihovi umnošci $S = F_k \cdots F_1$ i $T = G_1 \cdots G_\ell$ također regularne matrice i vrijedi

$$B = SAT.$$

Ovim smo pokazali sljedeću tvrdnju.

Propozicija 2.4.6. *Neka su A i B ekvivalentne matrice tipa (m, n). Tada postoje regularna matrica S reda m i regularna matrica T reda n za koje vrijedi $B = SAT$.*

Propozicija 2.4.7. *Relacija $'\sim'$ je relacija ekvivalencije na skupu $M_{mn}(\mathbb{F})$.*

Dokaz. Relacija $'\sim'$ je očito refleksivna ($A \sim A$).

Pretpostavimo da je $A \sim B$. Tada postoje elementarne matrice $F_1, \ldots, F_k$ reda m i elementarne matrice $G_1, \ldots, G_\ell$ reda n takve da je $B = (F_k \cdots F_1)A(G_1 \cdots G_\ell)$. Množenjem s inverzima $F_1^{-1}, \ldots, F_k^{-1}$ slijeva te s $G_\ell^{-1}, \ldots, G_1^{-1}$ zdesna dobivamo da je

$$F_k^{-1} \cdots F_1^{-1} B G_\ell^{-1} \cdots G_1^{-1} = A,$$

odnosno $B \sim A$ s obzirom na to da su inverzi elementarnih matrica elementarne matrice.

Pretpostavimo da je $A \sim B$ i $B \sim C$. Tada postoje odgovarajuće elementarne matrice F_i, G_i, H_i, K_i za koje je $B = (F_k \cdots F_1)A(G_1 \cdots G_\ell)$ i $C = (H_p \cdots H_1)B(K_1 \cdots K_q)$. Kako je množenje matrica asocijativno

$$C = (H_p \cdots H_1 F_k \cdots F_1)A(G_1 \cdots G_\ell K_1 \cdots K_q),$$

slijedi $A \sim C$.

$\square$

2.5 Rang matrice

Definicija 2.5.1. *Neka je $A = [a_{ij}] \in M_{mn}(\mathbb{F})$ te $(S_1, \ldots, S_n)$, $S_j \in M_{m1}(\mathbb{F})$, stupčana reprezentacija matrice A.* ***Rang matrice*** *A je dimenzija linearne ljuske razapete skupom stupaca od A. Pišemo*

$$r(A) = \dim[S_1, \ldots, S_n].$$

Uočimo da je nulmatrica jedina matrica (bilo kojeg tipa) ranga 0, tj. $r(A) = 0$ ako i samo ako je $A = 0$.

U uvodnom razmatranju linearne ljuske skupa stupaca matrice A tipa (m, n) u odjeljku 2.4 ustanovili smo da dimenzija te linearne ljuske nije veća ni od m ni od n. Analogna tvrdnja vrijedi i za linearnu ljusku skupa redaka matice A. Te činjenice sad možemo iskazati pomoću pojma ranga matrice.

Propozicija 2.5.2. *Neka je $A \in M_{mn}(\mathbb{F})$. Tada vrijedi:*

(a) $r(A) \leq \min\{m, n\}$,

(b) $r(A^t) \leq \min\{m, n\}$.

Napomenimo da se rang matrice često definira kao *maksimalan broj linearno nezavisnih stupaca matrice A*. Ta je definicija ekvivalentna s našom jer znamo da se svaki sustav izvodnica (to jest skup $\{S_1, \dots, S_n\}$) može reducirati do baze prema teoremu 1.4.3.

U onom što slijedi opisat ćemo kako operativno odrediti rang neke matrice. Ustanovili smo da se dimenzija linearne ljuske ne mijenja ako nad vektorima izvodimo elementarne operacije (transformacije). Dakle, vrijedi sljedeći teorem.

Teorem 2.5.3. *Neka je matrica A' dobivena iz A primjenom elementarnih transformacija nad stupcima. Tada je*

$$r(A) = r(A').$$

Uskoro ćemo pokazati da se rang matrice neće promijeniti ako primjenjujemo elementarne transformacije i nad redcima. Sljedeću tvrdnju katkad se sažeto, iako ne sasvim korektno, iskazuje tako da je *rang matrice po stupcima jednak rangu po redcima.* Pritom „rang po redcima" valja shvatiti kao dimenziju linearne ljuske razapete redcima matrice. Ovakva „ravnopravnost" stupaca i redaka matrice može se učiniti prirodnom, ali zapravo nije nimalo očigledna i dokaz je tehnički dosta zahtjevan.

Teorem 2.5.4. *Neka je dana matrica $A \in M_{mn}(\mathbb{F})$. Maksimalan broj linearno nezavisnih stupaca matrice A jednak je maksimalnom broju linearno nezavisnih redaka matrice A.*

Skica dokaza. Neka je $r(A) = r$. Ako je $(S_1, \dots, S_n)$ stupčana reprezentacija matrice A, onda je

$$\dim[S_1, \dots, S_n] = r.$$

Bez smanjenja općenitosti neka je $\{S_1, \dots, S_r\}$ linearno nezavisan skup (u suprotnom možemo zamijeniti poredak stupaca jer te elementarne transformacije ne mijenjaju rang matrice, prema teoremu 2.5.3). Dakle, $S_j \in [S_1, \dots, S_r]$ za sve $j = r+1, \dots, n$, odnosno

$$S_j = \gamma_{1j} S_1 + \dots + \gamma_{rj} S_r, \ j = r+1, \dots, n,$$

za neke $\gamma_{ij} \in \mathbb{F}$.

Neka je $\overline{A}$ matrica tipa (m, r) čija je stupčana reprezentacija $(S_1, \dots, S_r)$ (to jest matrica koju smo dobili tako što smo iz matrice A izbacili zadnjih $n - r$ stupaca). Pretpostavimo da matrica $\overline{A}$ ima p linearno nezavisnih redaka. Tada je

$$p \leq \min\{m, r\}.$$

Zaista, $p \leq m$ jer m broj redaka u $\overline{A}$ te $p \leq r$ jer je svaki redak vektor iz $M_{1,r}(\mathbb{F})$ (ili $\mathbb{F}^r$). Označimo s $\overline{R_1}, \ldots, \overline{R_m}$ retke u matrici $\overline{A}$ te bez smanjenja općenitosti pretpostavimo da je skup $\{\overline{R_1}, \ldots, \overline{R_p}\}$ linearno nezavisan. Stoga postoje $\lambda_{ki} \in \mathbb{F}$, $k = 1, \ldots, p$, $i = p+1, \ldots, m$ takvi da je

$$\overline{R_i} = \lambda_{1i}\overline{R_1} + \cdots + \lambda_{pi}\overline{R_p}, \ i = p+1, \ldots, n.$$

Može se pokazati da prethodne relacije vrijede i za retke matrice A, odnosno

$$R_i = \lambda_{1i}R_1 + \cdots + \lambda_{pi}R_p, \ i = p+1, \ldots, n.$$

(Napominjemo da smo precizan dokaz prethodne jednakosti izostavili.) Sada je očito maksimalan broj linearno nezavisnih redaka u A manji ili jednak od p, odnosno vrijedi

$$t \leq p \leq r,$$

gdje smo s t označili maksimalni broj linearno nezavisnih redaka u A.

Ako tvrdnju da je maksimalan broj linearno nezavisnih redaka u nekoj matrici manji ili jednak maksimalnom broju linearno nezavisnih stupaca primijenimo na matricu A^t, dobit ćemo upravo nejednakost $r \leq t$. Dakle, $t = r$. □

Korolar 2.5.5. *Vrijedi* $r(A) = r(A^t)$.

Korolar 2.5.6. *Ako je matrica A ekvivalentna matrici B, onda je $r(A) = r(B)$.*

Dokaz. Matrica B dobivena je pomoću konačno mnogo elementarnih transformacija nad stupcima i redcima matrice A, pa tvrdnja slijedi prema teoremima 2.5.3 i 2.5.4. □

Naš je cilj primjenom elementarnih transformacija nad stupcima i redcima matrice pojednostavniti početnu matricu da se rang može lako iščitati.

Primjer 2.13. Zadana je matrica

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & -3 & 1 \\ -1 & -1 & 7 & -3 \end{pmatrix}.$$

Izvodimo sljedeće elementarne transformacije nad stupcima i redcima:

$$A \sim \left\{ \begin{array}{c} \textit{2. retku dodamo 1. redak pomnožen s } -3 \\ \textit{3. retku dodamo 1. redak} \end{array} \right\} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -9 & 4 \\ 0 & -1 & 9 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\sim \left\{ \begin{array}{c} \textit{3. stupcu dodamo 1. stupac pomnožen s } -2 \\ \textit{4. stupcu dodamo 1. stupac} \end{array} \right\} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -9 & 4 \\ 0 & -1 & 9 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\sim \left\{ \text{ 3.retku dodamo 2. redak } \right\} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -9 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\sim \left\{ \begin{array}{c} \text{3. stupcu dodamo 2. stupac pomnožen s } 9 \\ \text{4. stupcu dodamo 2. stupac pomnožen s } -4 \end{array} \right\} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = D_2$$

Jasno je da je $r(D_2) = 2$, jer prva dva stupca očito čine linearno nezavisan skup, pa je i $r(A) = 2$.

♡

Definicija 2.5.7. *Neka je $0 < r \leq \min\{m, n\}$. Matrica $D_r \in M_{mn}(\mathbb{F})$ takva da je $[D_r]_{ii} = 1$, za sve $i = 1, \ldots, r$, a svi ostali elementi jednaki su nuli, naziva se* ***kanonska matrica ranga*** *r i tipa (m, n).*

Matrica

- $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ je tipa $(2, 3)$ i ranga 1,
- $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ je tipa $(2, 3)$ i ranga 2,
- $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ je reda 3 i ranga 3 – maksimalnog ranga te je očito jednaka jediničnoj matrici.

Kanonska matrica D_r određenog tipa (m, n) i ranga r služi nam kao najjednostavniji standardni oblik matrice iz kojeg možemo izravno očitati rang matrice. U primjeru 2.13 prikazan je postupak kakav se zapravo može izvesti općenito, za bilo koju matricu, u svrhu određivanja njezina ranga. U praksi nećemo uvijek morati elementarne transformacije izvoditi sve dok ne dobijemo baš kanonsku matricu, nego će se rang vidjeti i prije toga, kad se uoči maksimalan linearno nezavisan skup stupaca ili redaka. No važno je imati takav standardni oblik kojim se možemo poslužiti u praktičnim postupcima i u dokazima propozicija.

Propozicija 2.5.8. *Neka je $A \in M_{mn}(\mathbb{F})$ ranga r. Tada se matrica A može primjenom konačno mnogo elementarnih transformacija nad stupcima ili redcima svesti na kanonsku matricu tipa (m, n) i ranga r.*

Skica dokaza. Ovu važnu tvrdnju nećemo dokazati formalno i općenito jer je ispisivanje dokaza pomoću općih koeficijenata matrice razmjerno komplicirano, a svi se važni koraci mogu opisati i shvatiti na primjerima. Najprije, ako u matrici postoje stupci ili redci čiji su svi elementi jednaki 0, takve premjestimo na zadnja mjesta (stupce desno, retke dolje). Dalje, uz pomoć elementarnih transformacija ako je potrebno, na poziciji $(1,1)$ dobivamo koeficijent jednak 1. Zatim elementarnim transformacijama 2. i 3. tipa možemo na svim ostalim pozicijama u 1. retku i 1. stupcu dobiti koeficijente 0. Time postižemo da 1. redak i 1. stupac postanu jednaki onima u kanonskoj matrici. Postupak nastavljamo analogno od pozicije $(2,2)$ u matrici, pri čemu više ne mijenjamo ni prvi stupac ni prvi redak. Ako je $r(A) = r$, ovim postupkom doći ćemo do kanonske matrice D_r. □

Iz korolara 2.5.6 i propozicije 2.5.8 izravno slijedi:

Propozicija 2.5.9. *Neka je $A \in M_{mn}(\mathbb{F})$. Vrijedi $r(A) = r$ ako i samo ako $A \sim D_r$.*

Teorem 2.5.10. *Matrice jednakog tipa ekvivalentne su ako i samo ako su jednakog ranga.*

Dokaz. Jedan smjer pokazan je u korolaru 2.5.6. Obrnuto, pretpostavimo da su $A, B \in M_{mn}(\mathbb{F})$ jednakog ranga r. Po propoziciji 2.5.8 obje su ekvivalentne kanonskoj matrici D_r, a kako je ekvivalencija matrica simetrična i tranzitivna relacija (po Propoziciji 2.4.7), slijedi da su A i B ekvivalentne. Konkretno, matricu A možemo elementarnim transformacijama pretvoriti u D_r, a D_r možemo zatim pretvoriti u matricu B, postupkom obrnutim pretvaranju B u D_r. □

Primijetimo još da iz propozicije 2.5.9 slijedi da za svaku matricu A ranga r postoje regularne matrice S i T takve da vrijedi $A = SD_rT$. Pritom su A i D_r jednakog tipa (m, n), S je kvadratna matrica reda m, a T kvadratna matrica reda n. To slijedi iz propozicije 2.4.6, a prikaz oblika $A = SD_rT$ često je koristan.

Propozicija 2.5.11. *Neka su $A \in M_{mn}(\mathbb{F})$ i $B \in M_{np}(\mathbb{F})$ dvije (ulančane) matrice te označimo njihov umnožak sa $C = AB$. Nadalje, neka je $(S_1, \ldots, S_n)$ stupčana reprezentacija matrice A, a $(C_1, \ldots, C_p)$ stupčana reprezentacija matrice C. Tada se svaki stupac $C_k \in M_{m1}(\mathbb{F})$ može napisati kao linearna kombinacija stupaca $S_1, \ldots S_n \in M_{m1}(\mathbb{F})$.*

Dokaz. Po definiciji množenja matrica, uz oznake $A = [a_{ij}]$, $B = [b_{jk}]$, $C = [c_{ik}]$ imamo

$$C_k = \begin{pmatrix} c_{1k} \\ c_{2k} \\ \vdots \\ c_{mk} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n a_{1i}b_{ik} \\ \sum_{i=1}^n a_{2i}b_{ik} \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^n a_{mi}b_{ik} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}\boxed{b_{1k}} \\ a_{21}\boxed{b_{1k}} \\ \vdots \\ a_{m1}\boxed{b_{1k}} \end{pmatrix} + \cdots + \begin{pmatrix} a_{1n}\boxed{b_{nk}} \\ a_{2n}\boxed{b_{nk}} \\ \vdots \\ a_{mn}\boxed{b_{nk}} \end{pmatrix}$$

odnosno

$$C_k = b_{1k} \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}}_{S_1} + \cdots + b_{nk} \underbrace{\begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}}_{S_n} = \sum_{j=1}^{n} b_{jk} S_j.$$

□

Propozicija 2.5.12. *Neka su A i B ulančane matrice. Tada rang njihova umnoška nije veći od ranga pojedinih matrica, to jest $r(AB) \leq \min\{r(A), r(B)\}$.*

Dokaz. Primijenimo prethodnu propoziciju na matrice A i AB, uz iste oznake kao u dokazu te propozicije. Tada je linearna ljuska $[C_1, \dots, C_p]$ potprostor vektorskog prostora $M_{m1}(\mathbb{F})$, sadržan u potprostoru $[S_1, \dots, S_n]$, jer se svaki od stupaca C_k, $k = 1, \dots, p$, može izraziti kao linearna kombinacija stupaca $S_1, \dots, S_n$ matrice A. Stoga je $\dim[C_1, \dots, C_p] \leq \dim[S_1, \dots, S_n]$, dakle $r(AB) \leq r(A)$,

Primjenom dokazanog na matricu $B^t A^t$ dobivamo $r(B^t A^t) \leq r(B^t)$, odakle je $r((AB)^t) = r(B^t A^t) \leq r(B^t)$. Zatim iskoristimo korolar 2.5.5 po kojem se rang matrice ne mijenja transponiranjem pa dobivamo $r(AB) \leq r(B)$. □

Uočimo da se tvrdnja ove propozicije može indukcijom proširiti na umnožak bilo kojeg broja ulančanih matrica.

2.6 Inverzna matrica. Grupa regularnih matrica.

Skup svih regularnih, to jest invertibilnih matrica u multiplikativnom monoidu $M_n(\mathbb{F})$ čini nekomutativnu grupu (v. Korolar 1.1.10). Tu grupu označavat ćemo s $GL(n, \mathbb{F})$ i nazivati *opća linearna grupa.*

Teorem 2.6.1. *Matrica reda n regularna je ako i samo ako je ranga n.*

Dokaz. Pretpostavimo da je matrica $A \in M_n(\mathbb{F})$ regularna i ranga $r \geq 1$. Tada je prema teoremu 2.5.9 $A \sim D_r$, gdje je D_r kanonska matrica ranga r i reda n. Propozicija 2.4.6 povlači da je $D_r = SAT$ za neke regularne matrice S i T reda n. Stoga je i D_r nužno regularna jer je umnožak regularnih matrica. Uočimo da je D_r je regularna ako i samo ako je $r = n$. S jedne strane, uvjet $r = n$ dovoljan je za regularnost kvadratne kanonske matrice jer D_n je jedinična matrica. S druge strane, uvjet je i nužan jer za $r < n$ matrica D_r ima barem jedan nulredak i barem jedan nulstupac (to su n-ti redak i n-ti stupac). Takva matrica nije regularna jer njezin umnožak s bilo kojom kvadratnom matricom reda n također ima nulredak ili nulstupac pa taj umnožak nije jedinična matrica.

Obratno, ako je A ranga n, tada je $A \sim D_n = I$, odnosno zbog simetričnosti $I \sim A$. Prema propoziciji 2.4.6 postoje regularne matrice S i T reda n takve da je $A = SIT = ST$, pa slijedi da je A regularna. □

Korolar 2.6.2. *Svaka regularna matrica može se napisati kao umnožak elementarnih matrica.*

Dokaz. Neka je $A \in M_n(\mathbb{F})$ regularna, tada je prema teoremu 2.6.1 ranga n, a prema teoremu 2.5.9 je $A \sim I$. Stoga postoje elementarne matrice $F_1, \ldots, F_k$ i $G_1, \ldots, G_l$ reda n takve da je $A = (F_k \cdots F_1)I(G_1 \cdots G_l) = F_k \cdots F_1 G_1 \cdots G_l$. Dakle, A je umnožak elementarnih matrica. □

Korolar 2.6.3. *Neka su $A, B \in M_{mn}(\mathbb{F})$. Matrice A i B ekvivalentne su ako i samo postoji regularna matrica S reda m i regularna matrica T reda n za koje vrijedi $B = SAT$.*

Dokaz. Jedan smjer pokazali smo u propoziciji 2.4.6, a drugi slijedi iz prethodnog korolara 2.6.2. □

Regularne matrice posebne su i po tome što se mogu transformirati do jedinične matrice primjenom elementarnih transformacija *samo po redcima* ili *samo po stupcima.* Zaista, neka je $A = (a_{ij})$ regularna, odnosno $r(A) = n$. Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je $a_{11} \neq 0$. (U suprotnom u prvom stupcu mora postojati element $a_{j1} \neq 0$ jer je matrica A punog ranga te zamijenimo prvi i j-ti redak.) Stoga vrijedi

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & a'_{12} & \ldots & a'_{1n} \\ 0 & a'_{22} & \ldots & a'_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ 0 & a'_{n2} & \ldots & a'_{nn} \end{pmatrix} = A',$$

gdje smo matricu A' dobili nakon sljedećih transformacija: pribrajanjem 1. retka pomnoženog s $-a_{j1}/a_{11}$ j-tom retku, za sve $j = 2, \ldots, n$ te množenjem 1. retka s $1/a_{11}$. Sada uočimo da među elementima 2. stupca $\{a'_{22}, \ldots, a'_{n2}\}$ mora postojati barem jedan element različit od nule. Zaista, ako bi svi bili jednaki nuli, drugi bi stupac matrice A' bio nužno kolinearan s prvim stupcem, što bi značilo da je $r(A') < n$, a to je u proturječju s činjenicom da su A i A' ekvivalentne matrice. Stoga, ponovno bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je $a_{22} \neq 0$ te na sličan način transformirajući matricu A' dobivamo

$$A \sim A' \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & a''_{13} & \ldots & a''_{1n} \\ 0 & 1 & a''_{23} & \ldots & a''_{2n} \\ 0 & 0 & a''_{33} & \ldots & a''_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ 0 & 0 & a''_{n3} & \ldots & a''_{nn} \end{pmatrix} = A''.$$

Analognim zaključivanjem dobivamo da među elementima 3. stupca $\{a''_{33}, \ldots, a''_{n3}\}$ mora postojati barem jedan element različit od nule i nastavljamo postupak. U posljednjem koraku imat ćemo

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 & a_{1n}^{(n-1)} \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & a_{2n}^{(n-1)} \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & a_{2,n-1}^{(n-1)} \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & a_{nn}^{(n-1)} \end{pmatrix} = A^{(n-1)},$$

pri čemu je nužno $a_{nn}^{(n-1)} \neq 0$ jer bi u suprotnom imali $r(A) = r(A^{(n-1)}) = n - 1 < n$. Stoga smo dobili da je $A \sim I$, pri čemu smo rabili samo elementarne transformacije nad redcima matrice.

Posve analogno mogli bismo provoditi elementarne transformacije samo nad stupcima matrice i doći do istog zaključka.

Primjer 2.14. Transformirat ćemo zadanu matricu A koristeći se samo elementarnim transformacijama nad redcima matrice.

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 5 \\ 0 & -1 & 9 \end{pmatrix} \\ &\sim \left\{ \textit{2.retku dodamo 1. redak pomnožen } s - 2 \right\} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 7 \\ 0 & -1 & 9 \end{pmatrix} \\ &\sim \left\{ \begin{array}{c} \textit{1. retku dodamo 2. redak pomnožen } s\ 2 \\ \textit{3. retku dodamo 2. redak pomnožen } s - 1 \end{array} \right\} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 13 \\ 0 & -1 & 7 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \\ &\sim \left\{ \begin{array}{c} \textit{2. redak pomnožimo } s\ -1 \\ \textit{3. redak pomnožimo } s\ \frac{1}{2} \end{array} \right\} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 13 \\ 0 & 1 & -7 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\sim \left\{ \begin{array}{c} \textit{1. retku dodamo 3. redak pomnožen } s\ -13 \\ \textit{2. retku dodamo 3. redak pomnožen sa } 7 \end{array} \right\} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I.$$

♡

Svojstvo da se regularna matrica može svesti na jediničnu matricu upotrebljavajući elementarne transformacije samo nad redcima matrice (ili samo nad stupcima) može se iskoristiti za *postupak određivanja inverza.* Zaista, ako je $A \in GL(n, \mathbb{F})$, postoje elementarne matrice $F_1, \ldots, F_k$ reda n takve da je

$$I = F_k \cdots F_1 A.$$

Zbog jedinstvenosti inverza jasno je da je

$$A^{-1} = F_k \cdots F_1.$$

No i više jer je
$$A^{-1} = (F_k \cdots F_1)I,$$
slijedi da ćemo inverz A^{-1} dobiti transformirajući matricu I istim transformacijama koje činimo nad redcima matrice A s ciljem dobivanja jedinične matrice A. Prirodno je da se te transformacije izvode istodobno. Ukratko, događa se sljedeće

$$(A \vdots I) \sim \{ \text{ elementarne transformacije nad redcima } \} \sim (I \vdots A^{-1}).$$

Primjer 2.15. Odredimo inverz matrice A iz prethodnog primjera.

$$\begin{aligned}
(A \vdots I) &= \left(\begin{array}{ccc|ccc} \boxed{1} & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 9 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \\
&\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{-1} & 7 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 9 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \\
&\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 13 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 7 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & -1 & 1 \end{array}\right) \\
&\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 13 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -7 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right) \\
&\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -16 & \frac{17}{2} & \frac{-13}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 9 & -\frac{9}{2} & \frac{7}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right) = (I \vdots A^{-1}).
\end{aligned}$$

Oznaka elementa $\boxed{a_{ij}}$ znači da se transformacije izvode nad svim redcima matrice osim na i-tom s ciljem da svi elementi j-tog stupca postanu nule, osim samog elementa a_{ij}. Taj se element često zove *pivotni*.

♡

Propozicija 2.6.4. *Umnožak dviju kvadratnih matrica je regularna matrica ako i samo ako su obje matrice regularne.*

Dokaz. Otprije znamo da je umnožak regularnih matrica A i B reda n također regularna matrica.

Obrnuto, ako je AB regularna matrica, onda je $r(AB) = n$ po teoremu 2.6.1. Prema propoziciji 2.5.12 tada obje matrice A i B imaju rang jednak n.

□

Primjer 2.16. Kažemo da je matrica $A \in M_n(\mathbb{F})$ *ortogonalna* ako je $AA^t = A^tA = I$, to jest ako je $A^{-1} = A^t$. Skup ortogonalnih matrica reda n s elementima iz $\mathbb{F}$ označavamo s

$O(n,\mathbb{F})$ i on čini podgrupu opće linearne grupe $GL(n,\mathbb{F})$. Zaista, ako su $A,B \in O(n,\mathbb{F})$, tada je

$$(AB)(AB)^t = (AB)(B^tA^t) = A(BB^t)A^t = AIA^t = AA^t = I.$$

Dakle, $AB \in O(n,\mathbb{F})$. Nadalje, inverz $A^{-1} = A^t$ je ortogonalna matrica, pa je $O(n,\mathbb{F})$ podgrupa od $GL(n,\mathbb{F})$.

Matrica

$$A = \begin{pmatrix} 3/5 & 4/5 \\ -4/5 & 3/5 \end{pmatrix}$$

je ortogonalna matrica reda 2. Uočimo da je

$$\left(\frac{3}{5}\right)^2 + \left(\frac{4}{5}\right)^2 = 1,\ \left(-\frac{4}{5}\right)^2 + \left(\frac{3}{5}\right)^2 = 1,\ \frac{3}{5}\cdot\frac{4}{5} + \left(-\frac{4}{5}\right)\frac{3}{5} = 0.$$

Dakle, zbroj kvadrata elemenata svakog retka je 1, a zbroj umnožaka odgovarajućih koeficijenata prvog i drugog retka je 0. Lako se vidi da isto vrijedi i za stupce matrice A. No opaženo svojstvo vrijedi i općenito za $A = [a_{ij}] \in O(n,\mathbb{F})$. Kako je $AA^t = I$, slijedi da je $[AA^t]_{ij} = [I]_{ij} = \delta_{ij}$ te

$$[AA^t]_{ij} = \sum_{k=1}^{n} [A]_{ik}[A^t]_{kj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}a_{jk},$$

pa je

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}a_{jk} = \delta_{ij}.$$

Za $i = j$ je

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}^2 = 1,$$

a za $i \neq j$

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}a_{jk} = 0.$$

Na temelju ovih relacija naziv *ortogonalna matrica* postat će jasniji u Linearnoj algebri 2, kad se bude proučavala operacija *skalarnog množenja* na vektorskom prostoru. Redci ortogonalne matrice činit će tada tzv. ortonormirani skup vektora.

Analogno svojstvo imaju stupci matrice A jer iz jednakosti $A^tA = I$ dobivamo

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ki}^2 = 1,\ \sum_{k=1}^{n} a_{ki}a_{kj} = 0,\ i \neq j.$$

Dakle, i stupci matrice A su normirani vektori i međusobno ortogonalni.

Poznati primjer ortogonalne matrice je

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix},\ \alpha \in \mathbb{R}.$$

♡

POGLAVLJE 3

SUSTAVI LINEARNIH JEDNADŽBI

3.1 Osnovni pojmovi i definicije

Definicija 3.1.1. ***Linearna jednadžba s*** n ***nepoznanica nad poljem*** $\mathbb{F}$ *je svaka jednadžba oblika*

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b, \tag{3.1}$$

pri čemu su $x_1, \ldots, x_n$ *nepoznanice,* $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{F}$ *koeficijenti te* $b \in \mathbb{F}$ *slobodni koeficijent. Ako je* $b = 0$*, jednadžba (3.1) naziva se* ***homogenom****.*

Rješenje jednadžbe *(3.1) je svaka uređena* n*-torka* $(\gamma_1, \ldots, \gamma_n) \in \mathbb{F}^n$ *takva da supstitucijom* $x_1 = \gamma_1, \ldots, x_n = \gamma_n$ *u (3.1) dobivamo numerički identitet.*

Riješiti jednadžbu *(3.1) znači odrediti skup svih njezinih rješenja.*

Primjer 3.1. Jednadžba

$$2x - y + z + 3 = 0$$

predstavlja opći ili implicitni oblik jednadžbe ravnine u E^3 (odnosno $\mathbb{R}^3$). Za $x = t$ i $y = s$ dobivamo pripadni parametarski koordinatni oblik jednadžbe te ravnine

$$\begin{aligned} x &= t, \\ y &= s, \\ z &= -2t + s - 3, \quad s, t \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

iz kojeg možemo iščitati skup rješenja početne jednadžbe

$$\{(t, s, -2t + s - 3) \,:\, t, s \in \mathbb{R}\} = \{(0, 0, -3) + t(1, 0, -2) + s(0, 1, 1) \,:\, t, s \in \mathbb{R}\}.$$

Još kažemo da ova ravnina prolazi točkom $(0, 0, -3)$ i razapeta je vektorima $(1, 0, -2)$ i $(0, 1, 1)$.

♡

Definicija 3.1.2. *Neka su $m, n \in \mathbb{N}$.* ***Sustav od*** m ***linearnih jednadžbi s*** n ***nepoznanica nad poljem*** $\mathbb{F}$ *je sustav jednadžbi oblika*

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1, \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2, \\ \vdots & & \vdots & & \cdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & b_m, \end{array} \tag{3.2}$$

pri čemu su $x_1, \ldots, x_n$ nepoznanice, $a_{ij} \in \mathbb{F}$ koeficijenti te $b_i \in \mathbb{F}$ slobodni koeficijenti, $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$. Ako je $b_1 = \cdots = b_m = 0$, sustav (3.2) naziva se ***homogeni sustav****.*

Rješenje sustava *(3.2) je svaka uređena n-torka $(\gamma_1, \ldots, \gamma_n) \in \mathbb{F}^n$ takva da supstitucijom $x_1 = \gamma_1, \ldots, x_n = \gamma_n$ u (3.2) dobivamo m numeričkih identiteta.*

Riješiti sustav *(3.2) znači odrediti skup svih njegovih rješenja.*

Ako je R_i skup svih rješenja i-te jednadžbe u (3.2), skup svih rješenja sustava (3.2) jednak je

$$R = \bigcap_{i=1}^{m} R_i.$$

Sustav je *rješiv* ili *konzistentan* ako ima barem jedno rješenje, odnosno ako $R \neq \emptyset$.

Primjer 3.2. Sustav

$$\begin{array}{ccccc} 2x & + & y & = & -1 \\ x & - & y & = & 4 \end{array}$$

je rješiv. Štoviše, ima jedinstveno rješenje $(1, -3)$. Dakle, $R = \{(1, -3)\}$.

Sustav

$$\begin{array}{ccccc} 2x & + & y & = & -1 \\ -4x & - & 2y & = & 2 \end{array}$$

je također rješiv. Na primjer, uređeni par $(0, -1)$ zadovoljava sustav. No ovaj sustav ima beskonačno mnogo rješenja. Skup svih rješenja jednak je

$$R = \{(t, -2t - 1) \,:\, t \in \mathbb{R}\}.$$

Sustav

$$\begin{array}{ccccc} 2x & + & y & = & -1 \\ -4x & - & 2y & = & 5 \end{array}$$

nema rješenja, to jest nekonzistentan je.

Navedeni primjeri opisuju sve slučajeve koje možemo dobiti pri rješavanju sustava s dvije linearne jednadžbe s dvije nepoznanice. Zaista, kako se jedna linearna jednadžba s dvije nepoznanice geometrijski interpretira kao pravac u ravnini, rješavanje sustava „2 puta 2” interpretiramo kao traženje presjeka dvaju pravaca u ravnini. Pravci se mogu sjeći u jednoj točki (jedinstveno rješenje sustava), mogu se poklapati (beskonačno rješenja sustava) ili mogu biti paralelni (sustav nema rješenja).

♡

Primjer 3.3. Svaki homogeni sustav je rješiv jer ima barem jedno, očigledno rješenje:

$$x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0,$$

to jest $(0, 0, \dots, 0)$. To rješenje naziva se *trivijalnim.* Dakle, za homogene sustave od interesa je pitanje ima li samo trivijalno rješenje ili ima i drugačijih, netrivijalnih rješenja. Pokazat će se da je to pitanje važno za opis strukture svakog sustava linearnih jednadžbi.

♡

Pitanja koja se nameću i s kojima ćemo se baviti u nastavku su sljedeća:

- Koji nužni i dovoljni uvjeti trebaju biti ispunjeni da bi sustav bio rješiv?
- Ako je sustav linearnih jednadžbi rješiv, kako opisati skup svih njegovih rješenja?
- Postoji li univerzalna metoda rješavanja sustava linearnih jednadžbi?

Prije toga uvest ćemo kraći, odnosno *matrični zapis* sustava (3.2). Koeficijente sustava (3.2) smjestimo u matricu tipa (m, n),

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

a slobodne koeficijente i nepoznanice u stupčane matrice tipa $(m, 1)$, odnosno $(n, 1)$

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Sada uočimo da je sustav (3.2) ekvivalentan *matričnoj jednadžbi*

$$AX = B, \tag{3.3}$$

pri čemu AX predstavlja umnožak matrica A i X. Riješiti sustav (3.2) ekvivalentno je rješavanju matrične jednadžbe (3.3). Iz tog razloga rješenja sustava (3.2) često prikazujemo i zapisujemo kao stupčane matrice iz $M_{n1}(\mathbb{F})$,

$$\mathbb{F}^n \ni (\gamma_1, \dots, \gamma_n) \quad \leftrightsquigarrow \quad \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \vdots \\ \gamma_n \end{pmatrix} \in M_{n1}(\mathbb{F}).$$

Matrica A naziva se *matrica sustava* (3.2). Sustavu (3.2) pridružujemo i takozvanu *proširenu matricu sustava*,

$$A_p = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix} = (A \vdots B).$$

Uočimo, $A_p \in M_{m,n+1}(\mathbb{F})$.

3.2 Rješivost sustava. Kriterij jednoznačnosti rješenja.

Propozicija 3.2.1. *Neka je $(\gamma_1, \dots, \gamma_n) \in \mathbb{F}^n$ rješenje sustava (3.2). Tada je*

$$B = \gamma_1 S_1 + \dots + \gamma_n S_n,$$

gdje je $(S_1, \dots, S_n)$ stupčana reprezentacija matrice sustava A te B matrica slobodnih koeficijenata sustava.

Obratno, ako se B može prikazati u obliku $B = \gamma_1 S_1 + \dots + \gamma_n S_n$, pri čemu su $\gamma_1, \dots, \gamma_n \in \mathbb{F}$, onda je uređena n-torka $(\gamma_1, \dots, \gamma_n)$ jedno rješenje sustava (3.2).

Dokaz. Najprije primijetimo da prva tvrdnja slijedi iz propozicije 2.5.11 kao poseban slučaj kad se matrica tipa (m, n) množi jednostupčanom matricom tipa $(n, 1)$. Radi preglednosti pri rješavanju sustava linearnih jednadžbi napišimo to ipak i ovdje, za rješenje $(\gamma_1, \dots, \gamma_n) \in \mathbb{F}^n$ sustava (3.2). Vrijedi

$$\begin{aligned} B &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \vdots \\ \gamma_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^n a_{1k}\gamma_k \\ \sum_{k=1}^n a_{2k}\gamma_k \\ \vdots \\ \sum_{k=1}^n a_{mk}\gamma_k \end{pmatrix} \\ &= \gamma_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + \gamma_2 \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix} + \dots + \gamma_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Odavde je očito da vrijedi i obrat tvrdnje. □

Uočimo da je homogenom sustavu pridružena matrična jednadžba $AX = 0$ te da za trivijalno rješenje vrijedi $0 = 0 \cdot S_1 + \dots + 0 \cdot S_n$.

Teorem 3.2.2 (Kronecker-Capelli). *Sustav $AX = B$ je rješiv ako i samo ako je rang matrice sustava A jednak rangu proširene matrice sustava A_p.*

Dokaz. Prisjetimo se,

$$r(A) = \dim[S_1, \ldots, S_n],$$

gdje je $(S_1, \ldots, S_n)$ stupčana reprezentacija matrice sustava A.

Prema propoziciji 3.2.1 sustav $AX = B$ je rješiv ako i samo ako je $B \in [S_1, \ldots, S_n]$. Uočimo da je ovo ispunjeno ako i samo ako vrijedi jednakost potprostora

$$[S_1, \ldots, S_n] = [S_1, \ldots, S_n, B].$$

Budući da svakako vrijedi $[S_1, \ldots, S_n] \leq [S_1, \ldots, S_n, B]$, ovi potprostori jednaki su ako i samo ako su im jednake dimenzije,

$$r(A) = \dim[S_1, \ldots, S_n] = \dim[S_1, \ldots, S_n, B] = r(A_p).$$

□

Korolar 3.2.3. *Sustav (3.2) ima jedinstveno rješenje ako i samo ako je*

$$r(A) = r(A_p) = n.$$

Dokaz. Ako sustav (3.2) ima jedinstveno rješenje $(\gamma_1, \ldots, \gamma_n) \in \mathbb{F}^n$, prikaz vektora B kao linearne kombinacije, $B = \gamma_1 S_1 + \cdots + \gamma_n S_n$, je jedinstven. Stoga je skup $\{S_1, \ldots, S_n\}$ linearno nezavisan, pa i baza linearne ljuske $[S_1, \ldots, S_n]$. Naime, ako bi postojala netrivijalna linearna kombinacija $\lambda_1 S_1 + \cdots + \lambda_n S_n = 0$ onda bi uređena n-torka $(\gamma_1 + \lambda_1, \ldots, \gamma_n + \lambda_n)$ bila rješenje sustava različito od $(\gamma_1, \ldots, \gamma_n)$, suprotno pretpostavci. Dakle, $r(A) = n$, a $r(A) = r(A_p)$ (prema propoziciji 3.2.1).

Obratno, ako je $r(A) = r(A_p) = n$, sustav je rješiv i $B \in [S_1, \ldots, S_n]$ (propozicija 3.2.1). Kako je $r(A) = n$, skup $\{S_1, \ldots, S_n\}$ je linearno nezavisan, pa je prikaz vektora B u bazi $\{S_1, \ldots, S_n\}$ jedinstven, što povlači jedinstvenost rješenja sustava. □

Napomenimo da smo u prvom dijelu dokaza ovog korolara mogli primijeniti tvrdnju zadatka 1.7. Umjesto toga, radi cjelovitosti dokaza korolara, tvrdnju smo dokazali u kontekstu koji nam je ovdje važan. Uz prilagodbu oznaka tu zapravo vidimo rješenje zadatka 1.7. Uvjerite se u to sami, za vježbu.

3.3 Homogeni sustav. Struktura skupa rješenja.

Već znamo da homogeni sustav $AX = 0$ uvijek ima barem trivijalno rješenje 0, to jest $(0, 0, \ldots, 0)$. Uočimo jedan jednostavan dovoljan uvjet (ne i nužan) za postojanje netrivijalnog rješenja homogenog sustava: ako je $m < n$, dakle broj jednadžbi homogenog sustava manji od broja nepoznanica, onda taj sustav ima neko rješenje različito od trivijalnog. Naime, kako rang matrice nije veći od broja redaka matrice, u tom slučaju imamo $r(A) \leq m < n$ pa iz korolara 3.2.3 slijedi da rješenje sustava nije jedinstveno. Sad ćemo pokazati da skup svih rješenja homogenog sustava ima strukturu koja nam je vrlo dobro poznata.

Propozicija 3.3.1. *Skup svih rješenja homogenog sustava $AX = 0$ čini vektorski potprostor prostora $M_{n1}(\mathbb{F})$, odnosno prostora $\mathbb{F}^n$.*

Dokaz. Označimo s
$$\mathcal{H} = \{H \in M_{n1}(\mathbb{F}) \,:\, AH = 0\}.$$
Neka su $H_1, H_2 \in \mathcal{H}$ te $\lambda \in \mathbb{F}$. Tada je
$$A(\lambda H_1 + H_2) = \lambda(AH_1) + AH_2 = 0,$$
pa je i $\lambda H_1 + H_2$ rješenje homogenog sustava $AX = 0$, odnosno $\lambda H_1 + H_2 \in \mathcal{H}$. Dakle, $\mathcal{H} \leq M_{n1}(\mathbb{F})$. □

Neka je $\{H_1, \ldots, H_d\}$ baza potprostora $\mathcal{H}$. Tada je
$$\mathcal{H} = \{\lambda_1 H_1 + \cdots + \lambda_d H_d \,:\, \lambda_1, \ldots, \lambda_d \in \mathbb{F}\}.$$
Drugim riječima, svako rješenje H homogenog sustava $AX = 0$ oblika je
$$H = \lambda_1 H_1 + \cdots + \lambda_d H_d,$$
za neke $\lambda_1, \ldots, \lambda_d \in \mathbb{F}$. Prethodno opažanje vrijedi u svakom vektorskom prostoru, no za sada još ne znamo kako pronaći bazu i dimenziju za $\mathcal{H}$. Na ta pitanja dat ćemo odgovor u sklopu metode za rješavanje sustava.

Skup svih rješenja nehomogenog sustava $AX = B$ usko je povezan sa skupom svih rješenja pripadnog homogenog sustava $AX = 0$.

Teorem 3.3.2. *Neka je $R_0 \in M_{n1}(\mathbb{F})$ rješenje sustava $AX = B$. Skup svih rješenja sustava $AX = B$ je*
$$\mathcal{R} = R_0 + \mathcal{H} = \{R_0 + H \,:\, H \in \mathcal{H}\}.$$

Dokaz. Treba pokazati inkluzije, $\mathcal{R} \subseteq \{R_0 + H \,:\, H \in \mathcal{H}\}$ i $\{R_0 + H \,:\, H \in \mathcal{H}\} \subseteq \mathcal{R}$. Ako je $R_1 \in \mathcal{R}$, onda je $A(R_1 - R_0) = B - B = 0$, pa je $R_1 - R_0 \in \mathcal{H}$ i
$$R_1 = R_0 + (\underbrace{R_1 - R_0}_{=H}) \in \{R_0 + H \,:\, H \in \mathcal{H}\}.$$

S druge strane, za sve $H \in \mathcal{H}$ je $A(R_0 + H) = AR_0 + AH = B + 0 = B$, pa je $R_0 + H \in \mathcal{R}$. □

Istaknuto rješenje R_0 sustava $AX = B$ naziva se *partikularno rješenje.* Teorem 3.3.2 kaže nam da se svako rješenje nehomogenog sustava može izraziti kao zbroj *nekog* partikularnog rješenja i *nekog* rješenja pripadnog homogenog sustava. Skup oblika $R_0 + \mathcal{H}$ naziva se *linearna mnogostrukost* (pri čemu je bitno da je $\mathcal{H}$ potprostor). Uočimo da bilo koje rješenje sustava može poslužiti kao odabrano partikularno rješenje. Naravno, ako sustav $AX = B$ ima jedinstveno rješenje R_0, onda je $\mathcal{H} = \{0\}$ i $\mathcal{R} = \{R_0\}$.

Linearnu mnogostrukost možemo geometrijski shvatiti kao translatirani potprostor. U slučaju sustava s tri nepoznanice to može biti točka, pravac ili ravnina kao translatirani potprostor dimenzije 0, 1 ili 2. U primjeru 3.1 skup rješenja zapisan je kao jednadžba ravnine u parametarskom obliku. To je linearna mnogostrukost $R_0 + \mathcal{H} = (0, 0, -3) + [(1, 0, -2), (0, 1, 1)]$.

3.4 Postupak rješavanja sustava. Gaussova metoda.

Definicija 3.4.1. *Dva sustava linearnih jednadžbi nad istim poljem $\mathbb{F}$ su* ***ekvivalentna*** *ako imaju jednaki broj nepoznanica i jednaki skup rješenja.*

Ideja našeg postupka rješavanja sustava bit će u tome da sustav transformiramo u njemu ekvivalentan, ali jednostavniji od početnog u smislu da iz njega možemo lako iščitati rješenje.

Primjer 3.4. Sljedeća tri sustava su ekvivalentna:

$$(1)\quad \left\{\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & 3x_2 & + & 2x_3 & = & -1 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & + & 8x_3 & = & 1 \\ x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 & = & 1 \end{array}\right. ,$$

$$(2)\quad \left\{\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & = & 0 \\ & - & x_2 & + & 2x_3 & = & 1 \\ & & & & x_3 & = & 0 \end{array}\right. ,$$

$$(3)\quad \left\{\begin{array}{ccccr} x_1 & & & = & 2 \\ & x_2 & & = & -1 \\ & & x_3 & = & 0 \end{array}\right. .$$

Rješenje tih sustava je jedinstveno – $(2, -1, 0)$. Lako je odabrati koji je od tih sustava najlakše riješiti – to je sustav (3), čiji oblik je ujedno zapis rješenja. I sustav (2) lako se rješava, supstitucijom unazad, dok je sustav (1) potrebno dodatno transformirati kako bi se došlo do rješenja.

♡

Iz prethodnog primjera možemo zaključiti da jednostavnim sustavima smatramo one čija je matrica sustava dijagonalna (jedinična) ili gornjotrokutasta. No to nije uvijek moguće dobiti jer matrica sustava ne mora biti kvadratna, a i rješenje ne mora biti nužno jedinstveno. Ipak, koristeći se elementarnim transformacijama nad redcima proširene matrice, moguće je dobiti takvu matricu da ćemo rješenje samo „pročitati”.

Propozicija 3.4.2. *Primjenom elementarnih transformacija na jednadžbama sustava, odnosno na redcima pripadne proširene matrice, dobivamo sustav ekvivalentan polaznom.*

Dokaz. Zadan je sustav $AX = B$, $A \in M_{mn}(\mathbb{F})$. Elementarne transformacije na redcima pripadne proširene matrice realiziraju se množenjem slijeva s elementarnim matricama, odnosno nekom regularnom matricom $T \in M_m(\mathbb{F})$. Stoga nakon provedenih transformacija dobivamo sustav $(TA)X = TB$.

Ako je $R \in M_{n1}(\mathbb{F})$ rješenje sustava $AX = B$, to jest $AR = B$, onda je i $(TA)R = TB$. Obratno, ako $(TA)R = TB$, množenjem inverzom T^{-1} slijeva slijedi da je $AR = B$. Dakle, ako je bilo koji od ta dva sustava rješiv onda je rješiv i drugi sustav te im se skupovi rješenja podudaraju. Stoga su sustavi ekvivalentni.

Primijetimo još da možemo posebno provjeriti uvjete rješivosti oba sustava pomoću teorema 3.2.2. Vrijedi $r(A) = r(TA)$, $r(A_p) = r(TA_p)$ i $(TA)_p = (TA \vdots TB) = TA_p$ pa je $r(A) = r(A_p)$ ako i samo ako je $r(TA) = r((TA)_p)$. $\square$

Pretpostavimo prvo da je $r(A) = r < n$. Primjenom konačno mnogo elementarnih transformacija nad redcima proširene matrice A_p (i uz eventualnu zamjenu redoslijeda varijabli) možemo dobiti sljedeće

$$A_p \sim \left(\begin{array}{cccc|ccc|c} 1 & 0 & \cdots & 0 & a'_{1,r+1} & \cdots & a'_{1,n} & b'_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & a'_{2,r+1} & \cdots & a'_{2,n} & b'_2 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & a'_{r,r+1} & \cdots & a'_{r,n} & b'_r \\ \hline 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & b'_{r+1} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & b'_m \end{array}\right), \tag{3.4}$$

gdje su $a'_{ij} \in \mathbb{F}$ za $i = 1, \ldots, r$, $j = r+1, \ldots, n$, zatim $b'_1, \ldots, b'_r \in \mathbb{F}$ te $(b'_{r+1}, \ldots, b'_m) = (0, \ldots, 0)$ ili $(b'_{r+1}, \ldots, b'_m) = (1, \ldots, 0)$. Uočimo da je jedinična podmatrica (blok) reda r. Postupak transformiranja primjenom elementarnih transformacija nad redcima proširene matrice sustava na matricu u (3.4) zovemo *Gaussova metoda eliminacije.*

Ako je $(b'_{r+1}, \ldots, b'_m) = (0, \ldots, 0)$, onda očito $r(A) = r(A_p) = r$, pa prema Kronecker-Capellijevu teoremu 3.2.2 sustav $AX = B$ ima rješenje. Ako je $(b'_{r+1}, \ldots, b'_m) = (1, \ldots, 0)$, onda $r(A) = r < r(A_p) = r + 1$, pa sustav nije konzistentan.

Pretpostavimo da je sustav rješiv i da je $r < n$. Stoga je prema (3.4) početni sustav ekvivalentan sljedećem:

$$\begin{array}{ccccccccccc} x_1 & & & + & a'_{1,r+1}x_{r+1} & + & \cdots & + & a'_{1,n}x_n & = & b'_1 \\ & x_2 & & + & a'_{2,r+1}x_{r+1} & + & \cdots & + & a'_{2,n}x_n & = & b'_2 \\ & & & & & & & & & \vdots & \\ & & x_r & + & a'_{r,r+1}x_{r+1} & + & \cdots & + & a'_{r,n}x_n & = & b'_r \end{array} . \tag{3.5}$$

U (3.5) vidimo da se nepoznanice $x_1, \ldots, x_r$ mogu izraziti pomoću nepoznanica $x_{r+1}, \ldots, x_n$. Zaista,

$$\begin{array}{ccl} x_1 & = & b'_1 - a'_{1,r+1}x_{r+1} - \cdots - a'_{1,n}x_n \\ x_2 & = & b'_2 - a'_{2,r+1}x_{r+1} - \cdots - a'_{2,n}x_n \\ \vdots & & \\ x_r & = & b'_r - a'_{r,r+1}x_{r+1} - \cdots - a'_{r,n}x_n \end{array} . \tag{3.6}$$

Stoga je prirodno nepoznanice $x_1, \ldots, x_n$ razvrstati u dvije skupine: skup $\{x_1, \ldots, x_r\}$ i skup $\{x_{r+1}, \ldots, x_n\}$. Nepoznanice iz druge skupine proglasit ćemo *slobodnim parametrima* u $\mathbb{F}$. Za svaki izbor $(x_{r+1}, \ldots, x_n) \in \mathbb{F}^{n-r}$ dobivamo točno jedno rješenje sustava. Stavljamo

$$\lambda_1 = x_{r+1},\ \lambda_2 = x_{r+2},\ \ldots,\ \lambda_{n-r} = x_n,$$

i (3.6) zapisujemo matrično

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_r \\ x_{r+1} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b'_1 - a'_{1,r+1}\lambda_1 - \cdots - a'_{1,n}\lambda_{n-r} \\ b'_2 - a'_{2,r+1}\lambda_1 - \cdots - a'_{2,n}\lambda_{n-r} \\ \vdots \\ b'_r - a'_{r,r+1}\lambda_1 - \cdots - a'_{r,n}\lambda_{n-r} \\ \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_{n-r} \end{pmatrix},$$

odnosno

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_r \\ x_{r+1} \\ x_{r+2} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} b'_1 \\ b'_2 \\ \vdots \\ b'_r \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}}_{R_0} + \lambda_1 \underbrace{\begin{pmatrix} -a'_{1,r+1} \\ -a'_{2,r+1} \\ \vdots \\ -a'_{r,r+1} \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}}_{H_1} + \lambda_2 \underbrace{\begin{pmatrix} -a'_{1,r+2} \\ -a'_{2,r+2} \\ \vdots \\ -a'_{r,r+2} \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}}_{H_2} + \cdots + \lambda_{n-r} \underbrace{\begin{pmatrix} -a'_{1,n} \\ -a'_{2,n} \\ \vdots \\ -a'_{r,n} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}}_{H_{n-r}}.$$

Uočimo,

$$AR_0 = B,\ AH_1 = 0,\ \ldots, AH_{n-r} = 0,$$

odnosno R_0 je partikularno rješenje sustava očito dobiveno izborom $(\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-r}) = (0, \ldots, 0)$, dok su $H_1, \ldots, H_{n-r}$ rješenja pripadnog homogenog sustava $AX = 0$. Lako možemo ustanoviti da je skup $\{H_1, \ldots, H_{n-r}\}$ linearno nezavisan i razapinje potprostor $\mathcal{H}$ – skup svih rješenja homogenog sustava $AX = 0$. Dakle, $\{H_1, \ldots, H_{n-r}\}$ je baza za $\mathcal{H}$. Time smo dokazali sljedeći teorem.

Teorem 3.4.3. *Neka je $\mathcal{H}$ skup svih rješenja homogenog sustava $AX = 0$, za $A \in M_{mn}(\mathbb{F})$. Tada je $\mathcal{H}$ vektorski potprostor od $M_{n1}(\mathbb{F})$ (odnosno $\mathbb{F}^n$) dimenzije $n - r$, gdje je $r = r(A)$.*

Napomenimo da u slučaju $n = r$ i $n < m$ umjesto (3.4) imamo

$$A_p \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \cdots & 0 & b'_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & b'_n \\ \hline 0 & \cdots & 0 & b'_{n+1} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & b'_m \end{array}\right),$$

pa ako je $b'_{n+1} = \cdots = b'_m = 0$, sustav ima jedinstveno rješenje

$$R_0 = \begin{pmatrix} b'_1 \\ \vdots \\ b'_n \end{pmatrix}.$$

U slučaju kvadratnog sustava ($n = m$) i $n = r$ slijedi da je

$$A_p \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \cdots & 0 & b'_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & b'_n \end{array}\right).$$

Dakle, kvadratni sustav kojem je pripadna matrica punog ranga ima uvijek jedinstveno rješenje R_0. Tada je matrica A i regularna (prema teoremu 2.6.1), pa je $R_0 = A^{-1}B$.

Primjer 3.5. Gaussovom metodom riješit ćemo sustav:

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & + & 3x_4 & = & 8, \\ 2x_1 & + & 3x_2 & & & - & x_4 & = & 8, \\ & & x_2 & - & 2x_3 & + & 7x_4 & = & 8, \\ 3x_1 & + & 5x_2 & - & x_3 & + & 2x_4 & = & 16. \end{array}$$

Primjenjujemo elementarne transformacije nad redcima proširene matrice:

$$A_p = \left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & 2 & -1 & 3 & 8 \\ 2 & 3 & 0 & -1 & 8 \\ 0 & 1 & -2 & 7 & 8 \\ 3 & 5 & -1 & 2 & 16 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 & 8 \\ 0 & \boxed{-1} & 2 & -7 & -8 \\ 0 & 1 & -2 & 7 & 8 \\ 0 & -1 & 2 & -7 & -8 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 3 & -11 & -8 \\ 0 & -1 & 2 & -7 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc|c} 1 & 0 & 3 & -11 & -8 \\ 0 & 1 & -2 & 7 & 8 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Uočimo da smo matricu A_p upravo sveli na oblik (3.4) iz kojeg možemo iščitati rješenje sustava:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} -8 \\ 8 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{R_0} + \lambda_1 \underbrace{\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{H_1} + \lambda_2 \underbrace{\begin{pmatrix} 11 \\ -7 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{H_2}, \quad \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}.$$

R_0 je partikularno rješenje sustava, a skup $\{H_1, H_2\}$ je baza za potprostor svih rješenja pripadnog homogenog sustava. Rješenje možemo provjeriti uvrštavanjem u dani sustav linearnih jednadžbi: $x_1 = -8 - 3\lambda_1 + 11\lambda_2$, $x_2 = 8 + 2\lambda_1 - 7\lambda_2$, $x_3 = \lambda_1$, $x_4 = \lambda_2$, ili množenjem matrica:

$$AR_0 = \begin{pmatrix} 8 \\ 8 \\ 8 \\ 16 \end{pmatrix}, \quad AH_1 = AH_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

♡

U sljedećem primjeru pokazujemo da nije potrebno „forsirati" dobivanje jedinične matrice u gornjem lijevom kutu proširene matrice sustava, a to ponekad nije ni moguće bez zamjene redoslijeda nepoznanica. Dakle, sustav linearnih jednadžbi Gaussovom metodom nastojimo riješiti optimalno – u što manje koraka.

Primjer 3.6. Zadan je sustav linearnih jednadžbi:

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcr} & & 2x_2 & + & x_3 & - & 3x_4 & & & = & 2, \\ & & 3x_2 & + & x_3 & - & x_4 & + & x_5 & = & 5, \\ & - & 4x_2 & - & x_3 & - & x_4 & - & 2x_5 & = & -8, \\ 2x_1 & & & - & x_3 & + & x_4 & + & x_5 & = & 4. \end{array}$$

Proširena matrica danog sustava je

$$A_p = \left(\begin{array}{rrrrr|r} 0 & 2 & 1 & -3 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & -1 & \boxed{1} & 5 \\ 0 & -4 & -1 & -1 & -2 & -8 \\ 2 & 0 & -1 & 1 & 1 & 4 \end{array}\right).$$

Plavom bojom označili smo elemente podmatrice A iz koje je optimalno izabrati pivotni element, jer izaberemo li element iz zadnjeg, četvrtog, retka, „pokvarit" ćemo prvi stupac. Odlučili smo se za pivotni element na mjestu $(2, 5)$ jer ćemo u sljedećem koraku provesti samo dvije elementarne transformacije:

$$A_p \sim \left(\begin{array}{rrrrr|r} 0 & 2 & \boxed{1} & -3 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & -1 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & 1 & -3 & 0 & 2 \\ 2 & -3 & -2 & 2 & 0 & -1 \end{array}\right).$$

Izbor pivotnog elementa dodatno se suzio – na elemente prvog retka (jer je treći redak jednak prvom). Zbog preglednosti dopušteno je u zapisu izbaciti jednake retke ili nulretke iako to nije sasvim korektno s obzirom na zapis jer relacija $\sim$ ne mijenja tip matrice.

$$A_p \sim \left(\begin{array}{rrrrr|r} 0 & 2 & 1 & -3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & -4 & 0 & 3 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ / \cdot \frac{1}{2} \end{array} \sim \left(\begin{array}{rrrrr|r} 0 & 2 & 1 & -3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & \frac{1}{2} & 0 & -2 & 0 & \frac{3}{2} \end{array}\right).$$

Naš sustav je sada sređen i možemo iščitati rješenje, no ovaj put ćemo prije toga istaknuti sustav ekvivalentan početnom koji smo dobili opisanim postupkom. Nepoznanice koje ćemo zamijeniti tzv. slobodnim parametrima označili smo zelenom bojom.

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & 2 & 1 & -3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & \frac{1}{2} & 0 & -2 & 0 & \frac{3}{2} \end{array}\right) \end{array} \rightsquigarrow \begin{array}{rcccccccccc} & & 2x_2 & + & x_3 & - & 3x_4 & & & = & 2, \\ & & x_2 & & & + & 2x_4 & + & x_5 & = & 3, \\ x_1 & + & \frac{1}{2}x_2 & & & - & 2x_4 & & & = & \frac{3}{2}; \\ & & \downarrow & & & & \downarrow & & & & \\ & & t_1 & & & & t_2 & & & & \end{array}$$

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & = & \frac{3}{2} & - & \frac{1}{2}t_1 & + & 2t_2, \\ x_2 & = & & & t_1 & & , \\ x_3 & = & 2 & - & 2t_1 & + & 3t_2, \\ x_4 & = & & & & & t_2, \\ x_5 & = & 3 & - & t_1 & - & 2t_2, \end{array} \rightsquigarrow X = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + t_1 \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ -2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, t_1, t_2 \in \mathbb{R}.$$

♡

Primjer 3.7. Riješimo sustav u ovisnosti o parametru $t \in \mathbb{R}$:

$$\begin{array}{rcrcrcr} 2x_1 & + & tx_2 & - & x_3 & = & 2, \\ x_1 & + & x_2 & & & = & 1, \\ & - & 2x_2 & + & (t-1)x_3 & = & 3-t. \end{array}$$

Gaussovom metodom dobivamo:

$$A_p = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & t & -1 & 2 \\ 1 & \boxed{1} & 0 & 1 \\ 0 & -2 & t-1 & 3-t \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2-t & 0 & \boxed{-1} & 2-t \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & t-1 & 5-t \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2-t & 0 & -1 & 2-t \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ \boxed{(3-t)t} & 0 & 0 & (3-t)(t+1) \end{array}\right).$$

Sljedeći korak nije moguće provesti bez odgovarajuće diskusije, pa tako razlikujemo slučajeve: $(3-t)t \neq 0$, $t = 0$ i $t = 3$.

<u>Slučaj $(3-t)t \neq 0$:</u>

$$A_p \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & -1 & \frac{t-2}{t} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{t} \\ 1 & 0 & 0 & \frac{t+1}{t} \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{t+1}{t} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{t} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2-t}{t} \end{array}\right)$$

U ovom slučaju rješenje je jedinstveno:

$$X = \begin{pmatrix} \frac{t+1}{t} \\ -\frac{1}{t} \\ \frac{2-t}{t} \end{pmatrix}. \tag{3.7}$$

Slučaj $t = 0$:

$$A_p(t=0) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right).$$

Sustav nema rješenja (uočimo da zadnji redak matrice „znači” $0 = 3$, što nije moguće).

Slučaj $t = 3$:

$$A_p(t=3) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Rješenje je jednoparametarsko:

$$X = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \ \lambda \in \mathbb{R}. \tag{3.8}$$

Rezimirajmo: za

$\lambda \in \mathbb{R}\backslash\{0,3\}$ sustav ima jedinstveno rješenje (3.7),
$\lambda = 0$ sustav nema rješenja,
$\lambda = 3$ sustav ima beskonačno rješenja koja su dana s (3.8).

♡

POGLAVLJE 4

DETERMINANTE

4.1 Definicija determinante. Grupa permutacija.

Na kolegiju Analitička geometrija definirali smo determinantu reda 2 i reda 3, odnosno determinantu matrice reda 2 i 3, jer se pokazala vrlo korisnim alatom za ispitivanje linearne nezavisnosti, računanje vektorskog i mješovitog produkta, itd. Prisjetimo se, determinanta reda 2 definira se kao

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21},$$

a determinanta reda 3 kao

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{23}a_{32}a_{11}.$$

Formula kojom je zadana determinanta reda 3 može se učiniti prilično kompliciranom, no uočimo u njoj određenu pravilnost koja će nam pomoći da shvatimo kako se definira determinanta matrice općenitog reda n. Vidimo da se u toj formuli pojavljuje šest članova, od kojih tri s predznakom $+$, a tri s predznakom $-$. Zanemarimo li privremeno izbor tih predznaka, uočimo da je svaki član umnožak triju koeficijenta iz matrice. Pritom se svaki od brojeva 1, 2 i 3 u svakom takvom umnošku pojavljuje i na mjestu prvog indeksa i na mjestu drugog indeksa za neki koeficijent. Jednostavno rečeno, u svakom članu pomnožena su neka tri koeficijenta iz matrice, ali tako da je svaki redak i svaki stupac matrice zastupljen s jednim koeficijentom.

Za formiranje svakog člana trebamo „proći kroz matricu" tako da iz svakog retka izaberemo jedan koeficijent, ali pazeći pritom da izabrani koeficijenti budu iz različitih stupaca. Primjerice, u prvom članu gornjeg izraza prošli smo matricom „dijagonalno" od gornjeg lijevog kuta do donjeg desnog kuta, a u četvrtom članu također „dijagonalno", ali po onoj drugoj dijagonali. Ovakvi članovi formirani su na sve moguće načine. Kako to vidimo? Istaknemo li prvi indeks svakog izabranog koeficijenta (možemo isto tako početi od drugog indeksa), pojedini umnožak mora imati oblik $a_{1\ldots}a_{2\ldots}a_{3\ldots}$, pri čemu su na mjestu drugog indeksa također brojevi 1, 2, 3 raspoređeni na bilo koji način. Takvih poredaka ima šest, to su permutacije skupa $\{1, 2, 3\}$. Svaki izbor po tri koeficijenta u skladu s navedenim pravilom može se zadati jednom permutacijom i primjena takvog zapisa ključna je za općenitu definiciju determinante.

$$\left|\begin{array}{ccc|cc} \cancel{a_{11}} & \cancel{a_{12}} & \cancel{a_{13}} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & \cancel{a_{22}} & \cancel{a_{23}} & \cancel{a_{21}} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & \cancel{a_{33}} & \cancel{a_{31}} & \cancel{a_{32}} \end{array}\right. \quad \rightsquigarrow \quad a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13},$$

$$\left|\begin{array}{ccc|cc} a_{11} & a_{12} & \cancel{a_{13}} & \cancel{a_{11}} & \cancel{a_{12}} \\ a_{21} & \cancel{a_{22}} & \cancel{a_{23}} & \cancel{a_{21}} & a_{22} \\ \cancel{a_{31}} & \cancel{a_{32}} & \cancel{a_{33}} & a_{31} & a_{32} \end{array}\right. \quad \rightsquigarrow \quad -a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{23}a_{32}a_{11}.$$

(Za determinantu reda 2 vrijedi isto pravilo, ali rezultat je krajnje jednostavan jer postoje samo dvije mogućnosti „prolaza" kroz matricu reda 2, oba „dijagonalna").

Permutacije će nam, dakle, poslužiti kako bismo pregledno i jednostavno zapisali pravilo formiranja umnožaka po n koeficijenata matrice koji pripadaju različitim redcima i različitim stupcima, odnosno tako da je svaki redak i svaki stupac zastupljen u umnošku s točno jednim koeficijentom. Znamo da skup od n elemenata ima točno $n!$ permutacija, tako da determinanta reda 2 ima $2! = 2$ članova, reda 3 ima $3! = 6$ članova, reda 4 ima $4! = 24$ članova itd. Broj članova stoga vrlo brzo raste s povećavanjem reda matrice tako da eksplicitno ispisivanje članova postaje vrlo nepraktično za $n > 3$. (No uglavnom nam takvo ispisivanje nije ni potrebno.)

Sljedeće pitanje, izbor predznaka koji se pridružuju pojedinim članovima, iznimno je važno jer o njemu ovise neka bitna svojstva determinante. Već se prije moglo uočiti kako se pri rješavanju sustava linearnih jednadžbi s dvije nepoznanice metodom *suprotnih koeficijenata* pojavljuje izraz koji prepoznajemo kao determinantu reda 2 (i za koji je važno je li različit od 0 ili je jednak 0). Slično, uz više truda, mogli bismo rješavati sustav od tri linearne jednadžbe s tri nepoznanice tako da se kao važan izraz, zahvaljujući pogodnom izboru predznaka, pojavi determinanta reda 3.

Zasad naglasimo samo to da će se svakoj permutaciji p po određenom pravilu pridružiti njezin predznak $\operatorname{sign} p$ iz skupa $\{1, -1\}$, što znači da će izbor predznaka u članovima determinante biti diktiran određenim svojstvom permutacije kojom je zadan dotični član. Pokazat će se da točno polovica od $n!$ permutacija (za $n > 1$) ima predznak 1, a druga polovica -1.

Prije same definicije determinante podsjetimo se još da je *permutacija* nekog konačnog skupa po definiciji svaka bijekcija koja taj skup preslikava na samog sebe te da sve bijekcije nekog konačnog skupa čine grupu s obzirom na kompoziciju preslikavanja kao binarnu operaciju. Ta se grupa naziva *simetrična grupa stupnja* n i označava se sa S_n (vidi Odjeljak 1.1, primjer 1.7). Struktura grupe S_n bit će važna za svojstva determinante. Napomenimo da je za grupu permutacija bitan broj elemenata skupa koji se permutira, a ne oznake za pojedine elemente, no ovdje je taj skup jednostavno $\{1, 2, \ldots, n\}$.

Općenito definiramo determinantu reda n na sljedeći način.

Definicija 4.1.1. *Neka je* $A \in M_n(\mathbb{F})$. ***Determinanta matrice*** A *je skalar iz polja* $\mathbb{F}$ *koji se definira kao*

$$\det A = \sum_{p \in S_n} (\operatorname{sign} p) a_{1p(1)} a_{2p(2)} \cdots a_{np(n)}, \tag{4.1}$$

gdje je S_n *grupa permutacija skupa* $\{1, \ldots, n\}$, *a* $\operatorname{sign} p \in \{-1, 1\}$ *predznak permutacije. Dakle, determinanta je preslikavanje*

$$\det : M_n(\mathbb{F}) \to \mathbb{F}, \ A \mapsto \det A.$$

Determinanta matrice A zapisuje se također kao kvadratna tablica poput matrice A ali je ta tablica omeđena vertikalnim crtama, a ne okruglim ili uglatim zagradama:

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Istaknimo i razjasnimo redom sve oznake i pojmove u izrazu (4.1) za determinantu: *Permutacija* $p \in S_n$ je bijekcija na skupu $\{1, \ldots, n\}$. Označavali smo je s

$$p = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ p(1) & p(2) & p(3) & \cdots & p(n) \end{pmatrix}.$$

Još jednom napomenimo da je skup svih permutacija p skupa $\{1, \ldots, n\}$, S_n, (nekomutativna ako $n > 2$) grupa s obzirom na operaciju komponiranja. Budući da ta grupa broji $n!$ elemenata, suma u (4.1) sastoji se od točno $n!$ pribrojnika.

Predznak permutacije p definira se kao

$$\operatorname{sign} p = (-1)^{I(p)},$$

gdje je $I(p)$ broj inverzija permutacija p. *Inverzija permutacije* p je svaki par (i, j) takav da je $1 \leq i < j \leq n$ i $p(i) > p(j)$. Ako je broj inverzija permutacije p, $I(p)$, paran, kažemo da je p *parna* permutacija, dok je u suprotnom p *neparna* permutacija.

Navedimo neka svojstva permutacija, osobito s naglaskom na predznak permutacije.

- Za broj inverzija permutacija p vrijedi

$$0 \leq I(p) \leq \frac{n(n-1)}{2} = \binom{n}{2}.$$

  Uočimo da identiteta

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & n \end{pmatrix},$$

ima 0 inverzija, dok u permutaciji

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n-1 & n \\ n & n-1 & \cdots & 2 & 1 \end{pmatrix},$$

inverzija nastupa za svaki par (i, j) takav da je $1 \leq i < j \leq n$. Stoga je broj inverzija te permutacije jednak $\frac{n(n-1)}{2} = \binom{n}{2}$.

- Može se pokazati da točno polovicu grupe S_n čine parne permutacije. Stoga u (4.1) $\frac{1}{2}n!$ članova dolazi s predznakom $+$ i isto toliko s predznakom $-$.

- Pokazuje se da je
$$\operatorname{sign}(p \circ q) = (\operatorname{sign} p)(\operatorname{sign} q).$$
Posebno, $(\operatorname{sign} p)(\operatorname{sign} p^{-1}) = \operatorname{sign}(p \circ p^{-1}) = \operatorname{sign} id = 1$, pa je $\operatorname{sign} p = \operatorname{sign} p^{-1}$.

Ta svojstva lako pamtimo i kad ih iskažemo riječima: međusobno inverzne permutacije jednakog su predznaka, to jest obje su parne ili obje neparne. Kompozicija dviju permutacija jednake parnosti (obje parne ili obje neparne) uvijek je parna permutacija, dok je kompozicija parne i neparne permutacije uvijek neparna permutacija. Uočite ovdje analogiju sa svojstvom parnosti cijelih brojeva pri operaciji zbrajanja: zbroj dvaju parnih brojeva je parni broj, zbroj dvaju neparnih je parni itd.

Dokazi navedenih svojstava povezanih s predznakom permutacije nalaze se u odjeljku 4.4. Zasad su samo iskazana bez dokaza kako bismo se njima mogli poslužiti pri dokazivanju važnih svojstava determinante.

Primjer 4.1. Zadana je permutacija $p \in S_6$,

$$p = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 3 & 1 & 6 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Inverzije permutacije p su

$$(1, 2),\ (1, 3),\ (1, 5),\ (2, 3),\ (2, 5),\ (4, 5),\ (4, 6),$$

pa je $I(p) = 7$ i $\operatorname{sign} p = -1$. Dakle, p je neparna permutacija.

♡

Primjer 4.2. Uvjerimo se da izrazi za determinantu reda 2 i reda 3 slijede točno prema definiciji (4.1). Neka je $n = 2$. Tada je

$$S_2 = \{p_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, p_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\}.$$

Očito je, $I(p_1) = 0$ i $I(p_2) = 1$. Za $A = [a_{ij}] \in M_2(\mathbb{F})$ prema (4.1) imamo

$$\det A = (\operatorname{sign} p_1) a_{1p_1(1)} a_{2p_1(2)} + (\operatorname{sign} p_2) a_{1p_2(1)} a_{2p_2(2)} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Članove grupe S_3 već smo raspisali u primjeru 1.7, odjeljak 1.1. No navedimo ih još jednom,

$$\begin{aligned} S_3 = \{ \quad p_1 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, p_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, p_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \\ p_4 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, p_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, p_6 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \}. \end{aligned}$$

Vrijedi $I(p_1) = 0$, $I(p_2) = I(p_3) = 1$, $I(p_4) = I(p_5) = 2$, $I(p_6) = 3$. Stoga, za $A = [a_{ij}] \in M_3(\mathbb{F})$ dobivamo

$$\begin{aligned} \det A &= \sum_{i=1}^{6} (\operatorname{sign} p_i) a_{1p_i(1)} a_{2p_i(2)} a_{3p_i(3)} \\ &= a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}. \end{aligned}$$

♡

Propozicija 4.1.2. *Vrijedi:*

(1) *Ako matrica A ima neki redak u kojem su svi elementi jednaki nuli, onda je*

$$\det A = 0.$$

Posebno, determinanta nulmatrice je 0.

(2) *Ako je $A = [a_{ij}] \in M_n(\mathbb{F})$ gornjotrokutasta (ili donjotrokutasta) matrica, onda je*

$$\det A = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

Specijalno, determinanta jedinične matrice je $\det I = 1$, a determinanta skalarne matrice $A = \alpha I$, $\alpha \in \mathbb{F}$, je $\det A = \alpha^n$.

Dokaz. **(1)** Neka su svi koeficijenti i-tog retka jednaki nuli, to jest $a_{ij} = 0$ za sve $j = 1, \ldots, n$. Uočimo da se u svakom pribrojniku sume u (4.1) nalazi točno jedan faktor iz i-tog retka, pa je

$$\det A = \sum_{p \in S_n} (\operatorname{sign} p) a_{1p(1)} a_{2p(2)} \cdots \underbrace{a_{ip(i)}}_{0} \cdots a_{np(n)} = 0.$$

(2) Pretpostavimo da je $A = [a_{ij}]$ gornjotrokutasta matrica reda n. Tada je $a_{ij} = 0$ za sve $1 \leq j < i \leq n$. Uočimo da je jedina permutacija u kojoj je $i \geq p(i)$ za sve $i = 1, \ldots, n$ identiteta. Dakle, ako je p permutacija različita od identitete, postoji $i \in \{2, \ldots, n\}$ takav da je $i > p(i)$, pa je u tom slučaju $a_{ip(i)} = 0$ kao i cijeli pribrojnik $a_{1p(1)} \cdots a_{ip(i)} \cdots a_{np(n)} = 0$. Stoga, $\det A = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$.

□

Dokaz tvrdnje (2) zapisan algebarski korisno je pratiti i promatranjem gornjotrokutaste matrice tako da se uoči način biranja jedinog člana determinante koji nije općenito jednak nuli. Iz prvog stupca moramo izabrati a_{11} jer svi ostali koeficijenti u tom stupcu su nula. Zatim u tom članu determinante drugi stupac mora biti zastupljen koeficijentom a_{22} jer svi ispod njega su nula, dok a_{12} ne dolazi u obzir jer je iz prvog retka već izabran a_{11}. Analogno se zaključuje dalje, sve do koeficijenta a_{nn}.

Propozicija 4.1.3. *Transponiranjem matrice ne mijenja se determinanta, to jest*

$$\det A = \det A^t.$$

Dokaz. Neka je $A = [a_{ij}]$ matrica reda n. Tada je

$$\det A^t = \sum_{p \in S_n} (\operatorname{sign} p)[A^t]_{1p(1)}[A^t]_{2p(2)} \cdots [A^t]_{np(n)} = \sum_{p \in S_n} (\operatorname{sign} p) a_{p(1)1} a_{p(2)2} \cdots a_{p(n)n}.$$

Uočimo da je permutacija

$$\begin{pmatrix} p(1) & p(2) & \cdots & p(n) \\ 1 & 2 & \cdots & n \end{pmatrix}$$

inverzna permutacija od

$$p = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ p(1) & p(2) & \cdots & p(n) \end{pmatrix}.$$

Dakle,

$$\det A^t = \sum_{p \in S_n} (\operatorname{sign} p) a_{1p^{-1}(1)} a_{2p^{-1}(2)} \cdots a_{np^{-1}(n)}.$$

Nadalje, uočimo da je $I(p) = I(p^{-1})$. Zaista, ako je (i, j) inverzija od p, tada je $i < j$ i $p(i) > p(j)$. Za $i' = p(j)$ i $j' = p(i)$, imamo $i' < j'$ i $p^{-1}(i') = j > i = p^{-1}(j')$. Dakle, (i', j') je pripadna inverzija od p^{-1}. Konačno, ako p „prolazi" skupom svih permutacija S_n, cijelim će tim skupom „proći" i p^{-1}, pa smo dobili

$$\det A^t = \sum_{p^{-1} \in S_n} (\operatorname{sign} p^{-1}) a_{1p^{-1}(1)} a_{2p^{-1}(2)} \cdots a_{np^{-1}(n)} = \det A.$$

$\square$

Korolar 4.1.4. *Ako matrica A ima neki stupac u kojem su svi elementi jednaki nuli, onda je* $\det A = 0$.

4.2 Osnovna svojstva determinante. Binet-Cauchyjev teorem.

Budući da smo se uvjerili da se determinanta gornjotrokutaste matrice vrlo lako računa, prirodno je pokušati transformirati proizvoljnu matricu na takav oblik. Pritom je ključno koristiti se transformacijama koje ne mijenjaju determinantu ili je barem mijenjaju na način koji se jednostavno kontrolira. Pokazuje se da će za tu svrhu opet poslužiti elementarne transformacije na stupcima i redcima matrice. Prije nego što to iskažemo i dokažemo, navedimo još neka svojstva permutacija koja će nam trebati.

Permutacija oblika

$$t = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & i & \cdots & j & \cdots & n-1 & n \\ 1 & 2 & \cdots & j & \cdots & i & \cdots & n-1 & n \end{pmatrix}$$

naziva se ciklus duljine 2 ili *transpozicija*. Kraće je ponekad označavamo s $t = (ij)$. Pokazuje se da je svaka transpozicija neparna permutacija, to jest $\operatorname{sign} t = -1$. Još vrijedi da je $t \circ t = id$, odnosno $t = t^{-1}$.

Nadalje, svaka se permutacija može napisati kao kompozicija (produkt) transpozicija. Taj rastav nije jedinstven, ali je broj transpozicija u rastavu uvijek iste parnosti.

Propozicija 4.2.1. *Neka su* $A, B \in M_n(\mathbb{F})$. *Ako je* B *dobivena iz* A*:*

(1) *međusobnom zamjenom dvaju redaka (stupaca), onda* $\det B = -\det A$,

(2) *množenjem skalarom* $\lambda \neq 0$ *nekog retka (stupca), onda* $\det B = \lambda(\det A)$,

(3) *pribrajanjem nekog retka (stupca) pomnoženog s* λ *nekom drugom retku (stupcu), onda* $\det B = \det A$.

Dokaz. Dokažimo tvrdnju (1). Pretpostavimo da je $B = [b_{ij}]$ dobivena iz $A = [a_{ij}]$ zamjenom k-tog i l-tog retka, $1 \leq k < l \leq n$.

$$\begin{aligned} \det B &= \sum_{q \in S_n} (\operatorname{sign} q) b_{1q(1)} b_{2q(2)} \cdots b_{kq(k)} \cdots b_{lq(l)} \cdots b_{nq(n)} \\ &= \sum_{q \in S_n} (\operatorname{sign} q) a_{1q(1)} a_{2q(2)} \cdots a_{lq(k)} \cdots a_{kq(l)} \cdots a_{nq(n)}. \end{aligned}$$

Neka je t transpozicija dana s

$$t = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & l & \cdots & k & \cdots & n-1 & n \\ 1 & 2 & \cdots & k & \cdots & l & \cdots & n-1 & n \end{pmatrix}.$$

Vrijedi $q(t(l)) = q(k)$, $q(t(k)) = q(l)$ i $q(t(i)) = q(i)$, za sve $i \neq k, l$. Stoga je

$$\det B = \sum_{q \in S_n} (\operatorname{sign} q) a_{1(q \circ t)(1)} a_{2(q \circ t)(2)} \cdots a_{l(q \circ t)(l)} \cdots a_{k(q \circ t)(k)} \cdots a_{n(q \circ t)(n)}.$$

Stavimo $p = q \circ t$, pa je $q = p \circ t$ jer je $t \circ t = id$. Kako je $\operatorname{sign}(p \circ t) = (\operatorname{sign} p)(\operatorname{sign} t) = -\operatorname{sign} p$, dobivamo

$$\begin{aligned} \det B &= \sum_{p \circ t \in S_n} (-\operatorname{sign} p) a_{1p(1)} a_{2p(2)} \cdots a_{lp(l)} \cdots a_{kp(k)} \cdots a_{np(n)} \\ &= -\sum_{p \in S_n} (\operatorname{sign} p) a_{1p(1)} a_{2p(2)} \cdots a_{lp(l)} \cdots a_{kp(k)} \cdots a_{np(n)} = -\det A, \end{aligned}$$

pri čemu su sume (po p i $p \circ t$) jednake jer je preslikavanje $p \mapsto p \circ t$ bijekcija skupa S_n. Tvrdnja za stupce vrijedi jer je $\det A = \det A^t$ prema propoziciji 4.1.3. $\square$

Prije nego što nastavimo dokaz tvrdnji (2) i (3) prethodne propozicije, iskažimo korisnu posljedicu tvrdnje (1).

Korolar 4.2.2. *Ako su u matrici A dva retka (stupca) jednaka, onda* $\det A = 0$.

Dokaz. Pretpostavimo da A ima isti i-ti i j-ti redak. Ako napravimo transformaciju zamjene i-tog i j-tog retka, ponovno ćemo dobiti matricu A, a prema propoziciji 4.2.1 (1) je $\det A = -\det A$. Dakle, $\det A = 0$. $\square$

Nastavimo s dokazom propozicije 4.2.1.

Dokaz. Pretpostavimo da je $B = [b_{ij}]$ dobivena iz $A = [a_{ij}]$ množenjem skalarom $\lambda \neq 0$ i-tog retka. Vrijedi

$$\begin{aligned} \det B &= \sum_{p \in S_n} (\operatorname{sign} p) \underbrace{b_{1p(1)}}_{a_{1p(1)}} \underbrace{b_{2q(2)}}_{a_{2p(2)}} \cdots \underbrace{b_{ip(i)}}_{\lambda a_{ip(i)}} \cdots \underbrace{b_{np(n)}}_{a_{np(n)}} \\ &= \sum_{p \in S_n} (\operatorname{sign} p) a_{1p(1)} a_{2p(2)} \cdots (\lambda a_{ip(i)}) \cdots a_{np(n)} \\ &= \lambda \sum_{p \in S_n} (\operatorname{sign} p) a_{1p(1)} a_{2p(2)} \cdots a_{ip(i)} \cdots a_{np(n)} = \lambda \det A. \end{aligned}$$

Sada, neka je $B = [b_{ij}]$ dobivena iz $A = [a_{ij}]$ pribrajanjem i-tog retka pomnoženog s

λ j-tom retku. Uz pretpostavku $i < j$ dobivamo

$$\begin{aligned}
\det B &= \sum_{p\in S_n} (\operatorname{sign} p)\, \underbrace{b_{1p(1)}}_{a_{1p(1)}} \underbrace{b_{2q(2)}}_{a_{2p(2)}} \cdots \underbrace{b_{ip(i)}}_{a_{ip(i)}} \cdots \underbrace{b_{jp(j)}}_{a_{jp(j)}+\lambda a_{ip(i)}} \cdots \underbrace{b_{np(n)}}_{a_{np(n)}} \\
&= \sum_{p\in S_n} (\operatorname{sign} p) a_{1p(1)} a_{2p(2)} \cdots a_{ip(i)} \cdots (a_{jp(j)} + \lambda a_{ip(i)}) \cdots a_{np(n)} \\
&= \underbrace{\sum_{p\in S_n} (\operatorname{sign} p) a_{1p(1)} a_{2p(2)} \cdots a_{ip(i)} \cdots a_{jp(j)} \cdots a_{np(n)}}_{\det A} + \\
&+ \lambda \underbrace{\sum_{p\in S_n} (\operatorname{sign} p) a_{1p(1)} a_{2p(2)} \cdots a_{ip(i)} \cdots a_{ip(i)} \cdots a_{np(n)}}_{0} \\
&= \det A.
\end{aligned}$$

Zaista, druga suma predstavlja determinantu matrice kojoj su i-ti i j-ti redak jednaki, $(a_{i1}, \ldots, a_{in})$, pa je prema korolaru 4.2.2 vrijednost determinante takve matrice jednaka nuli.

Za stupce vrijede analogne tvrdnje jer $\det A = \det A^t$. $\square$

Sljedeći primjer dajemo zbog boljeg razumijevanja dokaza propozicije 4.2.1 (1).

Primjer 4.3. Pretpostavimo da su A i B matrice reda 4 te da je $B = [b_{ij}]$ dobivena iz $A = [a_{ij}]$ zamjenom 2. i 3. retka. Nadalje, promotrimo što se događa s članom sume koji odgovara permutaciji

$$p = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Vrijedi

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & \boxed{a_{12}} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & \boxed{a_{23}} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \boxed{a_{34}} \\ \boxed{a_{41}} & a_{42} & a_{43} & b_{44} \end{vmatrix} = \cdots \underbrace{-a_{12}a_{23}a_{34}a_{41}}_{(\operatorname{sign} p) a_{1p(1)} a_{2p(2)} a_{3p(3)} a_{4p(4)}} + \cdots .$$

$$\det B = \begin{vmatrix} a_{11} & \boxed{a_{12}} & a_{13} & a_{14} \\ a_{31} & a_{32} & \boxed{a_{33}} & a_{34} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \boxed{a_{24}} \\ \boxed{a_{41}} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = \cdots \underbrace{+a_{12}a_{33}a_{24}a_{41}}_{(\operatorname{sign} q) a_{1q(1)} a_{2q(2)} a_{3q(3)} a_{4q(4)}} + \cdots ,$$

gdje je

$$p \circ t = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix} = q.$$

$\heartsuit$

Dakle, može se zaključiti da se primjenom elementarnih transformacija nad redcima ili stupcima matrice, determinanta može promijeniti, ali na točno određen način. Nadalje, ako je $A \sim B$, to jest ako je B dobivena provođenjem konačno mnogo elementarnih transformacija matrice A, onda postoji $\alpha \in \mathbb{F}$ i $\alpha \neq 0$ takav da je $\det B = \alpha \det A$. Naime, tvrdnje iz prethodne propozicije mogu se izraziti i tako da se primjenom pojedinih transformacija na matricu A vrijednost njezine determinante pomnoži s -1, odnosno s $\lambda \neq 0$ ili da se pomnoži s 1 kad se ne promijeni. Stoga se u svakom slučaju determinanta množi skalarom različitim od nule, a uzastopna primjena nekoliko transformacija rezultira množenjem determinante umnoškom svih tih skalara, što je ponovno skalar različit od nule. Odatle je jasno da ekvivalentne matrice ili obje imaju determinantu jednaku nuli ili obje imaju determinantu različitu od nule.

Propozicija 4.2.3. *Matrica A je regularna ako i samo ako je* $\det A \neq 0$.

Dokaz. Matrica A je regularna ako i samo ako je $r(A) = n$, odnosno ako i samo ako je $A \sim I$. Kako je $\det I = 1$, slijedi da je $\det A \neq 0$.

Ako pretpostavimo da A nije regularna, onda je $r(A) = r < n$ i $A \sim D_r$ gdje je D_r kanonska matrica ranga r i reda n, pa slijedi da $\det A = 0$ jer $\det D_r = 0$. □

Tvrdnju prethodne propozicije možemo objediniti s otprije poznatim svojstvom kvadratne matrice da je regularna ako i samo ako je punog ranga. Tako dobivamo tri ekvivalentna svojstva s obzirom na to da je regularnost (invertibilnost) karakterizirana i pomoću ranga i pomoću determinante.

Teorem 4.2.4. *Neka je $A \in M_n(\mathbb{F})$. Sljedeće tvrdnje su ekvivalentne:*

(1) *A je regularna,*

(2) $r(A) = n$,

(3) $\det A \neq 0$.

Napomenimo da iz $\det A \neq 0$ zaključujemo da je $r(A) = n$. Ali ako $\det A = 0$, onda ne znamo točnu vrijednost ranga, nego samo da je $r(A) < n$.

Primjer 4.4. U ovisnosti o parametru $t \in \mathbb{R}$ treba odrediti rang matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & t-2 & 1 \\ 3 & -2 & -4 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & -2 \\ t+1 & 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Kako je $\det A = 4(t+2)^2$, prema teoremu 4.2.4 slijedi da je $r(A) = 4$ za $t \neq -2$. Za $t = -2$ znamo da je $r(A) \leq 3$, no točnu vrijednost ranga možemo dobiti primjenom elementarnih transformacija. Lako se može ustanoviti da je

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -4 & 1 \\ 3 & -2 & -4 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 2 & -2 \end{pmatrix} \sim D_2,$$

odnosno da je $r(A) = 2$ za $t = -2$.

♡

Teorem 4.2.5 (Binet-Cauchy)**.** *Neka su $A, B \in M_n(\mathbb{F})$. Tada je*

$$\det(AB) = \det A \cdot \det B.$$

Dokaz. Tvrdnja očito vrijedi za dijagonalne matrice. Dokaz provodimo u više slučajeva. Najprije ustanovimo koje su vrijednosti determinanti elementarnih matrica. Prema propoziciji 4.2.1 slijedi:

- $\det E_1 = -1$, gdje je E_1 elementarna matrica koja odgovara elementarnoj transformaciji 1. vrste (zamjeni dvaju redaka ili stupaca jedinične matrice),
- $\det E_2 = \lambda$, gdje je E_2 elementarna matrica koja odgovara elementarnoj transformaciji 2. vrste (množenju nekog retka ili stupca jedinične matrice skalarom $\lambda \neq 0$),
- $\det E_3 = 1$, gdje je E_3 elementarna matrica koja odgovara elementarnoj transformaciji 3. vrste (pribrajanju nekog retka ili stupca jedinične matrice, pomnoženog skalarom λ, nekom drugom retku ili stupcu).

1. slučaj. Pretpostavimo da je B elementarna matrica, tada je

- $\det(AE_1) = \{\text{Prop.4.2.1 (1)}\} = -\det A = (\det A)(\det E_1)$,
- $\det(AE_2) = \{\text{Prop.4.2.1 (2)}\} = \lambda \det A = (\det A)(\det E_2)$,
- $\det(AE_3) = \{\text{Prop.4.2.1 (3)}\} = \det A = (\det A)(\det E_3)$.

2. slučaj. Pretpostavimo da je B regularna matrica, tada se B može prikazati kao umnožak elementarnih matrica (korolar 2.6.2). Dakle,

$$B = F_1 F_2 \cdots F_k.$$

Uzastopnom primjenom rezultata iz 1. slučaja dobivamo

$$\det B = \det F_1 \det F_2 \cdots \det F_k.$$

Tada je

$$\begin{aligned} \det(AB) &= \det(AF_1F_2\cdots F_k) = \{1.\ \text{slučaj}\} = \det(AF_1F_2\cdots F_{k-1}) \det F_k = \cdots \\ &= \det A \underbrace{\det F_1 \det F_2 \cdots \det F_k}_{\det B} = \det A \det B. \end{aligned}$$

3. slučaj. Pretpostavimo da B nije regularna matrica, tada je $\det B = 0$. Tada ni umnožak AB nije regularna matrica jer je $r(AB) \leq \min\{r(A), r(B)\} < n$ (propozicija 2.5.12). Stoga je $\det(AB) = 0$ i $\det(AB) = \det A \cdot 0 = \det A \det B$. $\square$

Primjer 4.5. Ako je kvadratna matrica A regularna, tada je

$$\det A^{-1} = (\det A)^{-1}.$$

Tvrdnja slijedi iz $\det(AA^{-1}) = \det I = 1$ primjenom Binet-Cauchyjeva teorema.

♡

Zadatak 4.1. *(a) Neka je $S = \{A \in M_n(\mathbb{F}) : \det A = 1\}$. Tada je S grupa s obzirom na množenje matrica. Dokažite.*

(Ta grupa sadržana je kao podgrupa u općoj linearnoj grupi $GL(n, \mathbb{F})$, naziva se specijalna linearna grupa *te se označava $SL(n, \mathbb{F})$.)*

(b) Neka je $T = \{A \in M_n(\mathbb{R}) : \det A > 0\}$. Tada je T grupa s obzirom na množenje matrica. Dokažite.

4.3 Laplaceov razvoj. Inverzna matrica. Cramerov sustav.

U naslovu ovog odjeljka navedeno je nekoliko pojmova, među kojima nam je pojam inverzne matrice dobro poznat otprije. Ovdje se inverzna matrica ističe zato što ćemo doći do eksplicitne formule za njezino izračunavanje, a ta formula bit će izvedena kao jedna od posljedica tzv. Laplaceova razvoja determinante, u kojem se vrijednost determinante izražava pomoću determinanti nižeg reda. Nadalje, formula za inverznu matricu omogućit će nam da jedinstveno rješenje Cramerova sustava, a to je sustav linearnih jednadžbi kojem je matrica kvadratna i regularna, također izrazimo eksplicitnim formulama, pomoću određenih determinanti.

Kao i dosad, neka je $A = [a_{ij}]$ kvadratna matrica reda n. Znamo da je njezina determinanta definirana kao suma $n!$ pribrojnika, članova determinante. Grupirat ćemo sada tih $n!$ članova na poseban način, tako da izaberemo neki određeni redak ili stupac matrice pa svaki koeficijent iz odabranog retka (stupca) izlučimo iz svih članova u kojima se on pojavljuje. Recimo da smo se odlučili za grupiranje po koeficijentima iz i-tog retka. Koeficijent a_{ij} pojavljuje se u svakom članu determinante koji je zadan permutacijom takvom da se i preslikava u j (u zapisu $\det A$ to znači da $p(i) = j$). Po definiciji determinante znamo da se u svakom članu javlja točno jedan faktor oblika a_{ij}, za neki $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Koliko ima takvih članova za odabrani i, uz varijabilni j? Ima ih točno koliko i permutacija p takvih da je $p(i) = j$, što znači $(n-1)!$ permutacija, jer $n-1$ elemenata različitih od i može se upravo na toliko načina bijektivno preslikati u $n-1$ elemenata različitih od j.

Zbroj svih članova koji kao faktor sadrže a_{ij} možemo sad napisati u obliku $a_{ij}A_{ij}$, pri čemu je A_{ij} samo kratka oznaka za zbroj odgovarajućih $(n-1)!$ monoma, dobivenih izlučivanjem a_{ij} iz članova determinante. A_{ij} se naziva *algebarskim komplementom* ili *kofaktorom* koeficijenta a_{ij} determinante. (Izraz kofaktor naznačuje jednostavno faktor kojim je pomnožen a_{ij} unutar cjelokupne sume koja čini $\det A$, a malo kasnije pokazat će se pravilnost u njegovoj strukturi, to jest da je i to zapravo jedna determinanta, samo reda nižeg za 1.)

Možemo pisati

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{ij} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} A_{ij},$$

jer sve vrijedi analogno za izbor i-tog retka ili j-tog stupca kao istaknutog na početku. Kao primjer za lakše razumijevanje postupka izračunavanja determinante koji upravo provodimo možete riješiti sljedeći zadatak.

Zadatak 4.2. *Ispišite algebarski komplement A_{31} za determinantu matrice A reda 4. Uvjerite se da je dobiveni izraz jednak determinanti reda 3, koja se dobiva tako da se iz matrice A uklone treći redak i prvi stupac pa se izrazi determinanta preostale matrice reda 3.*

Determinanta matrice koja se dobiva uklanjanjem nekog retka i nekog stupca zadane matrice ima ključnu ulogu za izračunavanje algebarskog komplementa, stoga i za „razvoj" determinante reda n pomoću determinanti reda $n-1$.

Definicija 4.3.1. *Neka je $A = [a_{ij}] \in M_n(\mathbb{F})$. Determinanta matrice koja nastaje uklanjanjem i-tog retka i j-tog stupca matrice A naziva se* **minora** *reda $n-1$ i označava s Δ_{ij}.*

Algebarski komplement A_{ij} i minora Δ_{ij} usko su povezani, a u formuli koja izražava tu vezu važan je predznak, određen pozicijom (i, j) s obzirom na koju se uzima algebarski komplement.

Propozicija 4.3.2. *Neka je $A = [a_{ij}] \in M_n(\mathbb{F})$. Tada za sve $i, j = 1, 2, \ldots, n$ vrijedi*

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \Delta_{ij}.$$

Dokaz. Tvrdi se, dakle, da je algebarski komplement ili jednak odgovarajućoj minori ili suprotnoj vrijednosti te minore, ovisno o tome je li zbroj $i + j$ parni ili neparni broj.

Propoziciju ćemo dokazati tako da formulu najprije provjerimo za posebni slučaj A_{nn} kad ona vrijedi gotovo očito, a zatim opći slučaj svedemo na taj posebni primjenom otprije poznatih svojstava determinante. Uzimamo, dakle, poziciju (n, n) u determinanti, što za A_{nn} znači sve članove određene permutacijama za koje je $p(n) = n$. Eksplicitno,

$$A_{nn} = \sum_{p \in S_n, p(n)=n} (\operatorname{sign} p) a_{1p(1)} a_{2p(2)} \cdots a_{n-1,p(n-1)}.$$

Naime, predznak permutacije p za koju $p(n) = n$ jednak je predznaku njezine restrikcije na podskup $\{1, 2, \ldots, n\}$, s obzirom na to da na parovima oblika (i, n) nema inverzije. Stoga je doista

$$A_{nn} = \Delta_{nn} = (-1)^{n+n}\Delta_{nn}.$$

Sad uzmimo opću poziciju (i, j) u determinanti. Koeficijent a_{ij} „preselimo" na poziciju (n, n) tako da i-ti redak dovedemo u položaj n-tog retka pomoću $n-i$ uzastopnih zamjena sa sljedećim retkom, a zatim j-ti stupac dovedemo u položaj n-tog stupca analogno, pomoću $n - j$ zamjena sa sljedećim stupcem. Znamo da je vrijednost tako dobivene determinante jednaka

$$(-1)^{(n-i)+(n-j)} \det A = (-1)^{i+j} \det A.$$

U toj determinanti algebarski komplement koeficijenta na poziciji (n, n) upravo je jednak minori Δ_{ij}. Naime, u postupku zamjene uzastopnih redaka i stupaca početne determinante nije se poremetio međusobni položaj redaka s iznimkom i-tog, kao ni međusobni položaj stupaca s iznimkom j-tog stupca. U „novoj" determinanti, prema dokazanom, algebarski komplement koeficijenta a_{ij}, koji se sad nalazi na poziciji (n, n), stoga je jednak determinanti dobivenoj uklanjanjem i-tog retka i j-tog stupca iz $\det A$, a to je Δ_{ij}.

Usporedbom $\det A$ i nove determinante, koja iznosi $(-1)^{i+j} \det A$, vidimo da vrijedi

$$(-1)^{i+j} a_{ij} A_{ij} = a_{ij}\Delta_{ij},$$

pa je $A_{ij} = (-1)^{i+j}\Delta_{ij}$.

Primijetimo da vrijednost A_{ij} ne ovisi o vrijednosti koeficijenta upisanog na poziciji (i, j), nego o koeficijentima iz svih redaka osim i-tog i svih stupaca osim j-tog stupca. Nadalje, kao posebni slučaj prvo smo mogli uzeti A_{11} pa zatim premjestiti a_{ij} na položaj $(1, 1)$, no tada bismo promatrali restrikciju permutacije na podskup $\{2, \ldots, n - 1\}$. $\square$

Teorem 4.3.3 (Laplaceov razvoj)**.** *Neka je $A = [a_{ij}] \in M_n(\mathbb{F})$. Tada za sve $i, j = 1, 2, \ldots, n$ vrijedi*

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij}\Delta_{ij} \tag{4.2}$$

i

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij}\Delta_{ij}. \tag{4.3}$$

Formula (4.2) naziva se *Laplaceov razvoj po i-tom retku* determinante. Analogno, (4.3) je *Laplaceov razvoj po j-tom stupcu.*

Definicija 4.3.4. *Neka je $A = [a_{ij}] \in M_n(\mathbb{F})$.* ***Adjunkta matrice*** *A je matrica $\widetilde{A} = [A_{ji}] \in M_n(\mathbb{F})$, to jest transponirana matrica algebarskih komplemenata matrice A.*

Teorem 4.3.5. *Za svaku matricu* $A \in M_n(\mathbb{F})$ *vrijedi*

$$A \cdot \widetilde{A} = \widetilde{A} \cdot A = (\det A)I.$$

Dokaz. Neka je $i \neq j$. Tada

$$[A \cdot \widetilde{A}]_{ij} = \sum_{k=1}^{n} [A]_{ik} [\widetilde{A}]_{kj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} A_{jk}.$$

Prema (4.2) prethodna suma je upravo jednaka vrijednosti sljedeće determinante

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \rightsquigarrow j\text{-ti redak} \\ \\ \rightsquigarrow i\text{-ti redak} \\ \\ \\ \end{matrix},$$

odnosno determinante kojoj su i-ti i j-ti redak jednaki, pa je prema korolaru 4.2.2 njezina vrijednost jednaka 0.

Nadalje,

$$[A \cdot \widetilde{A}]_{ii} = \sum_{k=1}^{n} [A]_{ik} [\widetilde{A}]_{ki} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} A_{ik} = \det A,$$

prema (4.2), pa smo pokazali da je $A \cdot \widetilde{A} = (\det A)I$.

Analogno se pokazuje $\widetilde{A} \cdot A = (\det A)I$. □

Korolar 4.3.6. *Ako je* $\det A \neq 0$, *onda*

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \widetilde{A}.$$

Primjer 4.6. Odredit ćemo sve vrijednosti parametra $t \in \mathbb{R}$ za koje je matrica

$$A = \begin{pmatrix} t+3 & -2 & -2 \\ 1 & t-1 & 0 \\ 1 & t & 1 \end{pmatrix}$$

invertibilna te inverz odrediti pomoću adjunkte. Budući da je $\det A = (t-1)(t+3)$, iz teorema 4.2.4 slijedi da je A invertibilna ako i samo ako je $t \in \mathbb{R}\backslash\{-3,1\}$ te

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\widetilde{A} = \frac{1}{(t-1)(t+3)}\begin{pmatrix} t-1 & -2(t-1) & 2(t-1) \\ -1 & t+5 & -2 \\ 1 & -(t+1)(t+2) & t^2+2t-1 \end{pmatrix}.$$

♡

Definicija 4.3.7. *Sustav $AX = B$ je* ***Cramerov sustav*** *ako je A kvadratna matrica punog ranga.*

Cramerov sustav $AX = B$ ima isti broj jednadžbi i nepoznanica. Matrica sustava A je ranga n, što je ekvivalentno činjenici da je A regularna. Dakle, Cramerov sustav ima jedinstveno rješenje $(\gamma_1, \ldots, \gamma_n)$. Nadalje,

$$X = A^{-1}B,$$

pa prema korolaru 4.3.6 slijedi

$$X = \frac{1}{\det A}\widetilde{A}B.$$

Raspisivanjem elemenata umnoška $\widetilde{A}B$ dobivamo

$$[\widetilde{A}B]_i = \sum_{j=1}^{n}[\widetilde{A}]_{ij}b_j = \sum_{j=1}^{n} A_{ji}b_j = \sum_{j=1}^{n} b_jA_{ji}, \ 1 \leq i \leq n,$$

a to je upravo Laplaceov razvoj po i-tom stupcu sljedeće determinante

$$D_i = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,i-1} & b_1 & a_{1,i+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2,i-1} & b_2 & a_{2,i+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,i-1} & b_n & a_{n,i+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, \tag{4.4}$$

to jest determinante matrice koju smo dobili zamjenom i-tog stupca matrice A stupcem slobodnih koeficijenata $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$. Uobičajeno je komponente rješenja Cramerova sustava zapisati formulama

$$\gamma_i = \frac{D_i}{D}, \ i = 1, \ldots, n, \tag{4.5}$$

gdje je $D = \det A$, a D_i su dani s (4.4).

Napomena 4.3.8. *U zapisu (4.5), komponenti rješenja Cramerova sustava, prepoznajemo formule za komponente rješenja sustava danog dvjema jednadžbama s dvije nepoznanice*

$$a_1x + b_1y = c_1,$$

$$a_2x + b_2y = c_2,$$

a to su

$$x = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} = \frac{c_1b_2 - b_1c_2}{a_1b_2 - a_2b_1},$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} = \frac{a_1c_2 - a_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1}.$$

Primjer 4.7. Riješit ćemo primjer 3.7 (u kojem je trebalo riješiti sustav u ovisnosti o parametru) na drugi način – korištenjem determinante i Cramerova pravila. Kako je $\det A = -(t-3)t$, gdje je A matrica sustava, slijedi da sustav ima jedinstveno rješenje ako i samo ako je $t \neq 0, 3$. Primjenom Cramerove metode dobivamo:

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 2 & t & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3-t & -2 & t-1 \end{vmatrix}}{(3-t)t} = \frac{(t-3)(1+t)}{(3-t)t} = -\frac{1+t}{t},$$

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3-t & t-1 \end{vmatrix}}{(3-t)t} = \frac{t-3}{(3-t)t} = -\frac{1}{t},$$

$$x_3 = \frac{\begin{vmatrix} 2 & t & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 3-t \end{vmatrix}}{(3-t)t} = \frac{(t-3)(t-2)}{(3-t)t} = \frac{2-t}{t}.$$

Za $t = 0$ i $t = 3$ rješavamo sustave Gaussovom metodom:

$$A_p(t=0) = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -1 & 3 \end{array}\right) \sim \cdots \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right),$$

$$A_p(t=3) = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 2 \\ 1 & \boxed{1} & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \end{array}\right) \sim \cdots \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right),$$

iz čega slijedi da za $t = 0$ sustav nema rješenja, a za $t = 3$ ima jednoparametarsko rješenje $(0, 1, 1) + \lambda(1, -1, -1)$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

♡

4.4 Dodatak – svojstva permutacija i simetrične grupe

Radi upotpunjavanja poglavlja o determinantama navodimo još neke tvrdnje i njihove dokaze koje se odnose na permutacije, a važne su za svojstva determinante. Dokazi će biti raspisani u mjeri dostatnoj za razumijevanje bitnih činjenica.

(1) *Svaka transpozicija je neparna permutacija.*

To svojstvo lako je uočljivo ako transpozicija međusobno preslikava dva susjedna elementa jer tada ima samo jednu inverziju. Općenito, neka je $1 \leq i < j \leq n$, a t transpozicija zadana s $(i\ j)$. Prebrojimo inverzije u toj permutaciji. Lako razabiremo da inverzije nastupaju samo na parovima oblika (i, k) i (k, j), pri čemu je $i < k < j$ te, dakako, na paru (i, j). Tih parova ima $2(j-i-1)+1 = 2(j-i)-1$, dakle neparni broj.

(2) *Svaka permutacija može se napisati kao kompozicija nekih transpozicija.*

Najprije ukratko razmotrimo rastav permutacije u cikluse, dakle permutacije oblika $(a_1\ a_2\ \cdots\ a_n)$, pri čemu ovaj zapis znači da se svaki element preslikava u sljedeći (zapisan s njegove desne strane), a posljednji, a_n preslikava se u a_1. Npr. (1 2 3 4), (2 4 1 3) i (1 4 3 2) su ciklusi duljine 4, zapisi (1 2 3 4) i (3 4 1 2) označavaju istu permutaciju (izbor početnog elementa nije važan, čita se ciklički), a ciklusi (1 2 3 4) i (1 4 3 2) predstavljaju uzajamno inverzne permutacije. Već prije je spomenuto kako je svaka transpozicija ciklus duljine 2.

Neku permutaciju p skupa $\{1, 2, \ldots, n\}$ možemo napisati kao kompoziciju (disjunktnih) ciklusa tako da počnemo npr. od 1 pa sastavimo ciklus $(1\ p(1)\ p(p(1))\ \ldots)$ koji će završiti elementom x takvim da je $p(x) = 1$. Da takav element postoji, vidi se zbog konačnosti skupa na kojem djeluje permutacija, jer uzastopnom primjenom p možemo dobiti najviše n različitih elemenata. Ako se svih n elemenata skupa našlo u tom prvom ciklusu, prikaz je završen. Ako pak postoji neki $y \in \{1, 2, \ldots, n\}$ koji nije obuhvaćen tim ciklusom, formiramo sljedeći ciklus kao $(y\ p(y)\ \ldots)$ itd. Na taj način „iscrpit" ćemo cijeli skup $\{1, 2, \ldots, n\}$, a ako postoje takvi elementi koje p preslikava same u sebe (čvrsti ili fiksni elementi), svaki takav čini ciklus duljine 1 koji se, dogovorno, ni ne navodi u prikazu. Uočimo još da disjunktni ciklusi komutiraju pri kompoziciji. Npr. permutacija $p \in S_9$ koja elemente $1, 2, \ldots, 9$ preslikava redom u $7, 6, 4, 3, 5, 8, 9, 1, 2$ može se zapisati kao $p = (1\ 7\ 9\ 2\ 6\ 8) \circ (3\ 4)$, a za 5 se onda podrazumijeva da je fiksni za p.

Pogledajmo najprije na primjeru ciklusa (1 7 9 2 6 8) kako se ta permutacija može napisati kao kompozicija ciklusa duljine 2, to jest transpozicija. Lako se provjeri da vrijedi

$$(1\ 7\ 9\ 2\ 6\ 8) = (1\ 8) \circ (1\ 6) \circ (1\ 2) \circ (1\ 9) \circ (1\ 7),$$

pri čemu transpozicije na desnoj strani jednakosti primjenjujemo zdesna nalijevo, kako je i uobičajeno za operaciju kompozicije preslikavanja. (Primjenom transpozicija slijeva nadesno dobivamo inverznu permutaciju (1 8 6 2 9 7 1).) Radi jednostavnosti zapisa znak $\circ$ kod kompozicije ciklusa redovito se izostavlja.

Općenito, možemo uzeti element x iz promatranog ciklusa te odabrati transpozicije $(x\ p(x))$, $(x\ p^2(x))$, $(x\ p^3(x))$, ...,$(x\ p^{k-1}(x))$ za ciklus duljine k pa će vrijediti

$$(x\ p(x)\ p^2(x) \dots p^{k-1}(x)) = (x\ p^{k-1}(x)) \cdots (x\ p^2(x))(x\ p(x)).$$

Analogno postupimo za svaki pojedini ciklus, a kompoziciju ciklusa možemo onda napisati u bilo kojem redoslijedu jer disjunktni ciklusi komutiraju pri kompoziciji. Vidimo da je na taj način ciklus duljine k prikazan kao kompozicija $k-1$ transpozicije.

Dolazimo sad do važnog svojstva, kako se predznak permutacija ponaša kod kompozicije.

(3) *Za svake dvije permutacije p i q vrijedi:*

$$\operatorname{sign}(p \circ q) = \operatorname{sign} p \cdot \operatorname{sign} q.$$

Za dokaz tog svojstva iskoristit ćemo jednu eksplicitnu formulu za predznak permutacije.

Svakom paru (i, j), $1 \leq i < j \leq n$, pridružimo razlomak $\dfrac{p(j) - p(i)}{j - i}$. Ako permutacija p ima inverziju na paru (i, j), vrijednost razlomka je negativan broj, a ako nema inverziju, taj broj je pozitivan. Ključno je sada uočiti da je $\operatorname{sign} p$ jednak umnošku svih takvih razlomaka, kad se oni pomnože za svih $n(n-1)/2$ parova (i, j), $1 \leq i < j \leq n$:

$$\operatorname{sign} p = \prod_{(i,j), 1 \leq i < j \leq n} \frac{p(j) - p(i)}{j - i}.$$

Naime, za svaki par (i, j) u brojniku točno jednog razlomka pojavi se ili $j - i$ ili $i - j = (-1)(j - i)$, s obzirom da je p bijekcija. Predznak -1 pojavljuje se u brojnicima ukupno onoliko puta koliko p ima inverzija, dakle $I(p)$ puta, a $(-1)^{I(p)} = \operatorname{sign} p$. Svaki od faktora $j - i$ pojavi se točno jedanput u brojniku nekog razlomka i jedanput u nazivniku nekog razlomka. Množenjem svih razlomaka ti se faktori pokrate pa je produkt na kraju jednak $\operatorname{sign} p$. Kad smo na takav način izrazili predznak permutacije, možemo to primijeniti na izračunavanje predznaka kompozicije dviju permutacija,

$$\operatorname{sign}(p \circ q) = \prod \frac{(p \circ q)(j) - (p \circ q)(i)}{j - i}.$$

Produkt na desnoj strani pomnožit ćemo umnoškom $\prod \dfrac{q(j) - q(i)}{q(j) - q(i)}$, koji je očito jednak 1 pa se vrijednost desne strane time ne mijenja, ali ćemo je napisati kao umnožak

$$\prod \frac{(p \circ q)(j) - (p \circ q)(i)}{q(j) - q(i)} \prod \frac{q(j) - q(i)}{j - i}.$$

Drugi faktor sad je očito jednak $\operatorname{sign} q$, a u prvom možemo prepoznati vrijednost $\operatorname{sign} p$. Naime,

$$\prod \frac{(p \circ q)(j) - (p \circ q)(i)}{q(j) - q(i)} = \prod \frac{p(q(j)) - p(q(i))}{q(j) - q(i)},$$

a kako je q permutacija, parovi $\{q(i), q(j)\}$ predstavljaju svih $n(n-1)/2$ različitih parova elemenata skupa $\{1, 2, \ldots, n\}$. Pojedini razlomak u produktu opet ima negativnu ili pozitivnu vrijednost u skladu s tim ima li p ili nema inverziju na paru $(q(i), q(j))$. (Primijetimo da ovdje nije važno je li $q(i) < q(j)$ ili $q(i) > q(j)$.) Time je dokazana tvrdnja (3).

Vratimo se na svojstvo (2). Prikaz permutacije kao kompozicije nekih transpozicija nije jednoznačan, ali sad, na temelju svojstva (3), možemo još precizirati:

(4) *Svaka permutacija može se napisati kao kompozicija nekih transpozicija. Za parnu permutaciju broj takvih transpozicija je paran, a za neparnu permutaciju neparan.*

Svojstvo (3) možemo, naime, proširiti na kompoziciju m permutacija, za bilo koji m:

$$\operatorname{sign}(p_1 \circ \cdots p_m) = \operatorname{sign} p_1 \cdots \operatorname{sign} p_m.$$

Stoga i kompozicija m transpozicija ima predznak $(-1)^m$. Zbog toga se u rastavu parne (neparne) permutacije na transpozicije mora pojaviti parni (neparni) broj transpozicija.

Napokon, možemo dokazati da parnih i neparnih permutacija u simetričnoj grupi S_n ima jednako mnogo, čim je $n > 1$. Štoviše, parne permutacije čine grupu.

(5) *Za $n \geq 2$ simetrična grupa S_n sastoji se od po $n!/2$ parnih i $n!/2$ neparnih permutacija. Podskup parnih permutacija u S_n je grupa s obzirom na kompoziciju.*

Iz svojstva (3) vidimo da je kompozicija parnih permutacija također parna, znamo da je identiteta (neutralni element) parna permutacija, a za parnu permutaciju inverzna permutacija također je parna. Stoga parne permutacije čine grupu.

Pokažimo još da za $n \geq 2$ postoji jednako mnogo parnih i neparnih permutacija. Uspostavit ćemo bijekciju između podskupova parnih i neparnih permutacija u grupi S_n. Uzmimo bilo koju transpoziciju t (zapravo trebamo bilo koju neparnu permutaciju, a transpozicija sigurno postoji čim je $n \geq 2$). Ako načinimo kompoziciju bilo koje parne permutacije p s transpozicijom t, $p \circ t$ je neparna permutacija i pritom za različite parne p dobivamo različite neparne permutacije $p \circ t$. (Naime, u svakoj grupi iz $ax = bx$ slijedi $a = b$ pa tako i ovdje, iz $p \circ t = q \circ t$ slijedi $(p \circ t) \circ t = (q \circ t) \circ t$, odatle $p = q$.) Time je uspostavljeno injektivno preslikavanje podskupa parnih permutacija u podskup neparnih permutacija, što povlači da broj parnih ne može biti veći od broja neparnih permutacija. No isto tako možemo neparne permutacije, komponiranjem s t, injektivno preslikati u parne permutacije pa neparnih permutacija nema više od parnih. Ima ih, dakle, jednako mnogo, a to znači $n!/2$.

Podgrupa parnih permutacija u simetričnoj grupi S_n naziva se *alternirajućom grupom stupnja n* te se označava s A_n. Na primjer,

$$A_4 = \{id, (1\ 2)(3\ 4), (1\ 3)(2\ 4), (1\ 4)(2\ 3), (1\ 2\ 3), (1\ 3\ 2), (1\ 2\ 4),$$

$$(1\ 4\ 2), (1\ 3\ 4), (1\ 4\ 3), (2\ 3\ 4), (2\ 4\ 3)\}.$$

Dio II

Linearna algebra 2

POGLAVLJE 5

UNITARNI PROSTORI

5.1 Definicija i osnovna svojstva unitarnih prostora. Primjeri

Prisjetimo se najprije pojma vektorskog prostora. Neka je V neprazan skup i $\mathbb{F}$ polje. Uređena trojka $(V, +, \cdot)$ gdje je

(i) $+$ binarna operacija na V takva da je $(V, +)$ Abelova grupa,

(ii) $\cdot : \mathbb{F} \times V \to V$ preslikavanje sa svojstvima

1. $\alpha \cdot (\beta \cdot a) = (\alpha\beta) \cdot a$,
2. $(\alpha + \beta) \cdot a = \alpha \cdot a + \beta \cdot a$,
3. $\alpha \cdot (a + b) = \alpha \cdot a + \alpha \cdot b$,
4. $1 \cdot a = a$,

za sve $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$, $a, b \in V$,

naziva se *vektorski* ili *linearni prostor nad poljem* $\mathbb{F}$. Elementi skupa V nazivaju se tada *vektori*, a elementi polja $\mathbb{F}$ *skalari*. Tradicionalno operaciju $+$ zovemo *zbrajanje vektora*, a preslikavanje $\cdot$ *množenje vektora skalarom*. Nadalje, u našem će slučaju biti $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ ili $\mathbb{F} = \mathbb{C}$, pa tada govorimo o *realnom*, odnosno o *kompleksnom vektorskom prostoru*.

U ovom poglavlju bavit ćemo se vektorskim prostorima koji će biti snabdjeveni još jednom operacijom – operacijom skalarnog množenja. Naglašavamo da su operacije *skalarnog množenja* i *množenja (vektora) skalarom* slične samo nazivom, u što ćemo se uvjeriti iz definicije koja slijedi. Stoga treba biti oprezan i ne miješati te dvije operacije.

U općem vektorskom prostoru imamo, dakle, dvije operacije te možemo njihovom uzastopnom primjenom dobivati linearne kombinacije vektora. Daljnji pojmovi i relacije odnose se na sve ono što se može izraziti linearnim kombinacijama, npr. linearna nezavisnost i zavisnost skupa vektora, linearna ljuska, potprostor (kao podskup koji je „zatvoren" na linearne kombinacije svojih vektora), baza prostora itd. No u takvom prostoru općenito nema dodatne geometrijske strukture na kakvu smo naviknuli u vektorskom prostoru V^2 i V^3 pa nema govora o duljini (modulu) vektora, kutu među vektorima, udaljenosti dvaju vektora ili udaljenosti vektora od potprostora itd. Tipični primjer vektorskog računa u elementarnoj geometriji jest dokaz da se težišnice trokuta sijeku u jednoj točki i da ta točka dijeli težišnice u omjeru 2 : 1. Operacije zbrajanja vektora i množenja vektora skalarom omogućuju nam da „odjednom” izvedemo obje navedene tvrdnje za trokut. No same linearne kombinacije uopće „ne hvataju”, primjerice, relaciju okomitosti pravaca pa se samo pomoću njih ne može dokazati da se visine trokuta sijeku u jednoj točki. Nova operacija, skalarno množenje vektora, omogućuje onda ne samo da se izrazi okomitost vektora (tako da im je skalarni produkt jednak 0) nego i ostale prethodno spomenute („metričke”) pojmove, čime se geometrijska struktura prostora bitno obogaćuje.

Definicija 5.1.1. *Neka je V vektorski prostor nad poljem $\mathbb{F}$, pri čemu je $\mathbb{F}$ polje $\mathbb{R}$ ili $\mathbb{C}$. Preslikavanje $s : V \times V \to \mathbb{F}$ koje svakom uređenom paru vektora pridružuje skalar $s(a, b) = \langle a|b\rangle \in \mathbb{F}$ naziva se* ***skalarno množenje*** *na prostoru V ako su ispunjena sljedeća svojstva:*

(1) $\langle a|a\rangle \geq 0$, *za sve $a \in V$, pri čemu je $\langle a|a\rangle = 0$ ako i samo ako je $a = 0_V$;* (pozitivna definitnost)

(2) $\langle a|b\rangle = \overline{\langle b|a\rangle}$, *za sve $a, b \in V$;* (hermitska simetričnost)

(3) $\langle \lambda a|b\rangle = \lambda\langle a|b\rangle$, *za sve $a, b \in V$, $\lambda \in \mathbb{F}$;* (homogenost)

(4) $\langle a + b|c\rangle = \langle a|c\rangle + \langle b|c\rangle$, *za sve $a, b, c \in V$.* (aditivnost)

Skalar $\langle a|b\rangle$ zove se ***skalarni produkt*** *ili* ***umnožak vektora*** *a i b. Uređeni par (V, s) (ili $(V, \langle\cdot|\cdot\rangle)$) nazivamo* ***unitarni prostor nad poljem*** *$\mathbb{F}$.*

Napomena. Broj $\overline{\alpha}$ predstavlja konjugirano kompleksni broj od α.

Uočimo da zbog svojstva (1) vrijedi da je $\langle a|a\rangle$ uvijek realni broj bez obzira na to je li V realni ili kompleksni vektorski prostor. Naime, uvjet nenegativnosti ima smisla samo u $\mathbb{R}$.

Posebno, ako je $\mathbb{F} = \mathbb{R}$, umjesto (2) imamo

(2') $\langle a|b\rangle = \langle b|a\rangle$, za sve $a, b \in V$,

jer su realni brojevi upravo oni kompleksni brojevi koji se podudaraju sa svojim konjugirano kompleksnim brojevima.

Nadalje, uočimo da smo u definiciji skalarnog množenja pretpostavili da ono ima svojstvo homogenosti i aditivnosti samo u prvom argumentu. Iz definicije 5.1.1 lako proizlaze i sljedeća svojstva.

Propozicija 5.1.2. *Neka je V unitarni prostor nad $\mathbb{F}$. Tada je*

(3') $\langle a|\lambda b\rangle = \overline{\lambda}\langle a|b\rangle$, *za sve $a, b \in V$, $\lambda \in \mathbb{F}$,*

(4') $\langle a|b + c\rangle = \langle a|b\rangle + \langle a|c\rangle$, *za sve $a, b, c \in V$.*

Dokaz. Pokažimo svojstvo (3'). Vrijedi

$$\langle a|\lambda b\rangle = \{\text{prema } (2)\} = \overline{\langle \lambda b|a\rangle} = \{\text{prema } (3)\} = \overline{\lambda\langle b|a\rangle} = \overline{\lambda}\,\overline{\langle b|a\rangle} = \{\text{prema } (2)\} = \overline{\lambda}\langle a|b\rangle.$$

Slično se pokazuje i svojstvo (4'):

$$\begin{aligned}\langle a|b+c\rangle &= \{\text{prema } (2)\} = \overline{\langle b+c|a\rangle} = \{\text{prema } (4)\} = \overline{\langle b|a\rangle + \langle c|a\rangle}\\ &= \overline{\langle b|a\rangle} + \overline{\langle c|a\rangle} = \{\text{prema } (2)\} = \langle a|b\rangle + \langle a|c\rangle.\end{aligned}$$

Uočimo da smo koristili svojstva kompleksnih brojeva: $\overline{z_1+z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$ i $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1}\,\overline{z_2}$.

□

Primjenom svojstava iz definicije skalarnog množenja možemo izračunati skalarni umnožak bilo kojih dviju linearnih kombinacija vektora iz unitarnog prostora.

Korolar 5.1.3. *Neka je V unitarni prostor nad $\mathbb{F}$ te neka su $a, b \in V$ oblika*

$$a = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i a_i, \quad b = \sum_{j=1}^{m} \beta_j b_j,$$

za neke vektore $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_m \in V$ i skalare $\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta_1, \ldots, \beta_m \in \mathbb{F}$. Tada je

$$\langle a|b\rangle = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} \alpha_i \overline{\beta_j} \langle a_i|b_j\rangle.$$

U svakom vektorskom prostoru istaknutu ulogu ima nulvektor 0_V. Njegov skalarni umnožak s bilo kojim vektorom iznosi 0, kako pokazuje sljedeća tvrdnja.

Propozicija 5.1.4. *Neka je V unitarni prostor nad $\mathbb{F}$. Tada je*

$$\langle a|0_V\rangle = 0, \quad \langle 0_V|a\rangle = 0,$$

za sve $a \in V$.

Dokaz. Neka je $\langle 0_V|a\rangle = \alpha \in \mathbb{F}$. Tada je

$$\alpha = \langle 0_V|a\rangle = \langle 0_V + 0_V|a\rangle = \langle 0_V|a\rangle + \langle 0_V|a\rangle = \alpha + \alpha,$$

pa je nužno $\alpha = 0$. Nadalje,

$$\langle a|0_V\rangle = \overline{\langle 0_V|a\rangle} = 0.$$

□

Primjer 5.1. Na kolegiju *Analitička geometrija* bavili smo se klasičnim prostorom vektora V^3 te definirali skalarni umnožak vektora $\vec{a}, \vec{b} \in V^3 \backslash \{\vec{0}\}$ kao

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \angle(\vec{a}, \vec{b}),$$

odnosno ako je $\vec{a} = \vec{0}$ ili $\vec{b} = \vec{0}$, onda

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0.$$

Pokazali smo da tako definirano množenje zadovoljava svojstva iz definicije 5.1.1 pa je V^3 realni unitarni prostor. Isto vrijedi i za V^2. Pritom svojstva (1) i (2) skalarnog množenja slijede vrlo lako iz same definicije, svojstvo (3) također nije teško izvesti, no treba razmotriti slučajeve s obzirom na predznak skalara λ, dok je dokaz svojstva aditivnosti (4) znatno složeniji. Važno je uočiti da je apsolutna vrijednost skalarnog produkta $\vec{a} \cdot \vec{b}$ jednaka duljini (modulu) ortogonalne projekcije vektora $\vec{a}$ na smjer vektora $\vec{b}$. Aditivnost onda zapravo geometrijski znači da ortogonalna projekcija zbroja dvaju vektora na smjer nekog vektora ima jednaku duljinu kao zbroj ortogonalnih projekcija pojedinih vektora.

♡

Primjer 5.2. Pomoću skalarnog produkta u V^2 (odnosno V^3) dokazat ćemo da se visine trokuta sijeku u jednoj točki.

Neka je ABC dani trokut i neka je točka H sjecište visina iz vrhova A i B. Dovoljno je pokazati da je tada vektor $\overrightarrow{CH}$ okomit na vektor $\overrightarrow{AB}$. Računamo:

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CH} &= (\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HB}) \cdot (\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BH}) \\
&= \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{HB} \cdot \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BH} + \overrightarrow{HB} \cdot \overrightarrow{BH} \\
&= \{\text{zbog } \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{CB} = 0\} = \overrightarrow{BH} \cdot (-\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HB}) \\
&= \overrightarrow{BH} \cdot (\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HB} + \overrightarrow{BC}) = \overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{AC} = 0.
\end{aligned}$$

Time je tvrdnja dokazana, no uočimo još nešto. Ako umjesto H, kao sjecišta visina, uzmemo D kao bilo koju točku izvan ravnine trokuta ABC, imamo tetraedar (trostranu piramidu) $ABCD$. Sada račun potpuno jednak prijašnjem pokazuje da ako su $\overline{AD}$ i $\overline{BC}$ međusobno okomiti bridovi te $\overline{BD}$ i $\overline{CA}$ također međusobno okomiti, onda je i treći par bridova $\overline{AB}$ i $\overline{CD}$ međusobno okomit. Dakle, ako su u tetraedru dva para bridova međusobno okomita, isto vrijedi i za treći par bridova, a primjenom skalarnog množenja to se jednostavno pokazuje (bez potrebe razdvajanja slučajeva jesu li vektori $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{BD}$ i $\overrightarrow{CD}$ komplanarni s $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{BC}$).

♡

Uočimo da smo se pri uvođenju skalarnog umnoška u prostoru V^3 služili svojstvima euklidskog prostora E^3 – mjerom udaljenosti i kutom, to jest svojstvima kojima ne raspolažemo u općem vektorskom prostoru. Štoviše, uskoro ćemo vidjeti upravo obrnutu situaciju, a to je da u svakom unitarnom prostoru možemo uvesti mjeru udaljenosti i kuta zahvaljujući operaciji skalarnog množenja.

U sljedećim primjerima definiramo operacije skalarnog produkta na nekim dobro poznatim vektorskim prostorima. Pritom napominjemo da skalarni produkt na nekom vektorskom prostoru općenito nije jedinstven pa zato često ističemo tzv. *standardni* skalarni produkt za pojedini vektorski prostor.

Primjer 5.3. Na realnom vektorskom prostoru $\mathbb{R}^n$ za $x = (x_1, \ldots, x_n)$ i $y = (y_1, \ldots, y_n)$ iz $\mathbb{R}^n$ definiramo

$$\langle x|y\rangle = x_1y_1 + \cdots + x_ny_n = \sum_{i=1}^{n} x_iy_i.$$

Provjerimo svojstva iz definicije 5.1.1:

(1) $\langle x|x\rangle = \sum_{i=1}^n x_i^2 \geq 0$ te $\langle x|x\rangle = \sum_{i=1}^n x_i^2 = 0$ ako i samo ako je $x_1 = \ldots = x_n = 0$, tj. $x = 0$;

(2) $\langle x|y\rangle = \sum_{i=1}^n x_iy_i = \sum_{i=1}^n y_ix_i = \langle y|x\rangle$, za sve $x, y \in \mathbb{R}^n$;

(3) $\langle \lambda x|y\rangle = \sum_{i=1}^n (\lambda x_i)y_i = \lambda \sum_{i=1}^n x_iy_i = \lambda\langle x|y\rangle$, za sve $x, y \in \mathbb{R}^n$, $\lambda \in \mathbb{R}$;

(4) $\langle x+y|z\rangle = \sum_{i=1}^n (x_i+y_i)z_i = \sum_{i=1}^n x_iz_i + \sum_{i=1}^n y_iz_i = \langle x|z\rangle + \langle y|z\rangle$, za sve $x, y, z \in \mathbb{R}^n$.

Dakle, $\mathbb{R}^n$ je realni unitarni prostor. Taj skalarni produkt naziva se *standardni* skalarni produkt na $\mathbb{R}^n$.

♡

Primjer 5.4. Slično kao u prethodnom primjeru definiramo i standardni skalarni produkt na kompleksnom vektorskom prostoru $\mathbb{C}^n$. Za $x = (x_1, \ldots, x_n)$ i $y = (y_1, \ldots, y_n)$ iz $\mathbb{C}^n$ stavljamo

$$\langle x|y\rangle = x_1\overline{y_1} + \cdots + x_n\overline{y_n} = \sum_{i=1}^{n} x_i\overline{y_i}.$$

Svojstva skalarnog produkta pokazujemo analogno kao za standardni skalarni produkt na $\mathbb{R}^n$. Stoga je $\mathbb{C}^n$ kompleksni unitarni prostor. Uočimo da je

$$\langle x|x\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i\overline{x_i} = \sum_{i=1}^{n} |x_i|^2.$$

♡

Primjer 5.5. Na prostoru polinoma s realnim koeficijentima $\mathcal{P}$ za skalarni produkt najčešće se uzima preslikavanje

$$\langle p|q\rangle = \int_0^1 p(t)q(t)dt,$$

za $p, q \in \mathcal{P}$. Svojstva iz definicije 5.1.1 vrijede zbog svojstava određenog integrala, pa je $\mathcal{P}$ također realni unitarni prostor. Razmislite zašto vrijedi svojstvo pozitivne definitnosti.

Umjesto segmenta $[0, 1]$ može se uzeti i neki drugi segment, npr. $[-1, 1]$.

♡

Primjer 5.6. Na vektorskom prostoru matrica $M_{mn}(\mathbb{R})$, odnosno $M_{mn}(\mathbb{C})$, skalarno množenje može se definirati analogno onom u primjeru 5.3, odnosno primjeru 5.4. Skalarni produkt matrica $A = [a_{ij}]$, $B = [b_{ij}] \in M_{mn}(\mathbb{R})$ zadaje se kao suma umnožaka svih odgovarajućih koeficijenata na jednakim pozicijama:

$$\langle A|B\rangle = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_{ij}b_{ij},$$

dok se u slučaju prostora $M_{mn}(\mathbb{C})$ uzimaju kompleksno konjugirani brojevi koeficijenata druge matrice:

$$\langle A|B\rangle = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_{ij}\overline{b_{ij}},$$

Ti izrazi mogu se sažeto napisati, pomoću traga umnoška matrica, u obliku

$$\langle A|B\rangle = \operatorname{tr} AB^t,$$

odnosno

$$\langle A|B\rangle = \operatorname{tr} AB^*.$$

♡

Teorem 5.1.5 (Nejednakost Cauchy-Schwarz-Bunjakowskog)**.** *Neka je V unitarni prostor. Vrijedi*

$$|\langle a|b\rangle|^2 \le \langle a|a\rangle\langle b|b\rangle, \tag{5.1}$$

za sve $a, b \in V$. Jednakost u (5.1) postiže se ako i samo ako je $\{a, b\}$ linearno zavisan skup.

Dokaz. Za $a = 0_V$ ili $b = 0_V$ očito vrijedi jednakost u (5.1). Neka su $a, b \in V\backslash\{0_V\}$ te $\lambda \in \mathbb{F}$. Tada vrijedi

$$0 \le \langle a - \lambda b|a - \lambda b\rangle = \langle a|a\rangle - \lambda\langle b|a\rangle - \overline{\lambda}\langle a|b\rangle + \lambda\overline{\lambda}\langle b|b\rangle.$$

Kako prethodna nejednakost vrijedi za svaki skalar λ, vrijedit će i posebno za

$$\lambda = \frac{\langle a|b\rangle}{\langle b|b\rangle}.$$

Uočimo da je

$$\overline{\lambda} = \frac{\langle b|a\rangle}{\langle b|b\rangle},$$

pa dobivamo

$$0 \le \langle a|a\rangle - \frac{\langle a|b\rangle}{\cancel{\langle b|b\rangle}}\cancel{\langle b|a\rangle} - \frac{\langle b|a\rangle}{\langle b|b\rangle}\langle a|b\rangle + \frac{\langle a|b\rangle\langle b|a\rangle}{\cancel{\langle b|b\rangle^2}}\cancel{\langle b|b\rangle} = \langle a|a\rangle - \frac{\langle b|a\rangle}{\langle b|b\rangle}\langle a|b\rangle.$$

Množenjem prethodne nejednakosti s $\langle b|b\rangle > 0$ i sređivanjem slijedi

$$\langle a|b\rangle\langle b|a\rangle = \langle a|b\rangle\overline{\langle a|b\rangle} = |\langle a|b\rangle|^2 \le \langle a|a\rangle\langle b|b\rangle.$$

Preostaje ispitati kada nastupa jednakost u (5.1). Jednakost očito vrijedi ako je barem jedan od vektora a i b jednak 0. Pretpostavimo da su a, b oba različita od 0. Ako je skup $\{a, b\}$ linearno zavisan, postoji $\lambda \in \mathbb{F}$ takav da je $a = \lambda b$. Tada vrijedi

$$|\langle a|b\rangle|^2 = |\langle \lambda b|b\rangle|^2 = |\lambda|^2\langle b|b\rangle^2 = \lambda\overline{\lambda}\langle b|b\rangle^2 = \langle \lambda b|\lambda b\rangle\langle b|b\rangle = \langle a|a\rangle\langle b|b\rangle.$$

Ako je skup $\{a, b\}$ linearno nezavisan, onda za svaki $\lambda \in \mathbb{F}$ vrijedi $a - \lambda b \neq 0$, što povlači strogu nejednakost $0 < \langle a - \lambda b | a - \lambda b \rangle$. Posebno to vrijedi i za $\lambda = \frac{\langle a|b \rangle}{\langle b|b \rangle}$ pa prethodno provedeni račun pokazuje da tada vrijedi stroga nejednakost u (5.1). $\square$

U unitarnom prostoru V^3 očito je iz same definicije skalarnog produkta da vrijedi CSB nejednakost (5.1) jer kosinus bilo kojeg kuta po apsolutnoj vrijednosti iznosi najviše 1. Ako radi jednostavnosti uzmemo vektor $\vec{b}$ modula 1, vidimo da CSB nejednakost zapravo znači da je ortogonalna projekcija bilo kojeg vektora $\vec{a}$ „kraća" od $\vec{a}$ ili najviše jednake duljine kao sam vektor $\vec{a}$. Takva interpretacija vrijedi i općenito u unitarnom prostoru.

Nejednakost Cauchy-Schwarz-Bunjakovskog poprima, dakako, različite oblike s obzirom na različite načine kako je zadan skalarni produkt na pojedinom vektorskom prostoru. Tako je

$$\left| \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overline{\beta_i} \right|^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n} |\alpha_i|^2 \right) \left(\sum_{i=1}^{n} |\beta_i|^2 \right),$$

za sve $\alpha_i, \beta_i \in \mathbb{C}$, $i = 1, \ldots, n$ i svaki n. Također

$$\left(\int_0^1 p(t)q(t)dt \right)^2 \leq \left(\int_0^1 p^2(t)dt \right) \left(\int_0^1 q^2(t)dt \right),$$

za polinome p i q s realnim koeficijentima.

Primjer 5.7. U prostoru $\mathbb{R}^2$ sa standardnim skalarnim produktom CSB nejednakost znači da za bilo koja dva vektora (a_1, b_1) i (a_2, b_2) vrijedi

$$(a_1a_2 + b_1b_2)^2 \leq (a_1^2 + b_1^2)(a_2^2 + b_2^2),$$

što je poznata nejednakost koja postaje očita čim se svede na jednostavniji oblik

$$2a_1a_2b_1b_2 \leq a_1^2b_2^2 + a_2^2b_1^2,$$

u kojem prepoznajemo nejednakost

$$0 \leq (a_1b_2 - a_2b_1)^2.$$

Odgovarajuću nejednakost za $n > 2$ nije tako lako dokazati.

$\heartsuit$

Zadatak 5.1. *Dokažite da za bilo koje realne brojeve a, b, c, d i e vrijede nejednakosti*

(1) $a + 2b + 11c \leq \sqrt{126(a^2 + b^2 + c^2)}$,

(2) $(3a + 6b + 11c + 43d)^2 \leq 2015(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)$,

(3) $(19a - 23b + 6c - 27d + 19e)^2 \leq 2016(a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2)$.

U unitarnom prostoru, dakle u vektorskom prostoru opskrbljenom skalarnim produktom, imamo još jednu mogućnost ispitivanja linearne nezavisnosti nekog skupa vektora. U tu svrhu trebat će nam sljedeća definicija.

Definicija 5.1.6. *Neka je V unitarni prostor i $\{x_1, \ldots, x_k\} \subset V$. Matrica reda k dana s*

$$G(x_1, x_2, \ldots, x_k) = \begin{pmatrix} \langle x_1|x_1\rangle & \langle x_1|x_2\rangle & \cdots & \langle x_1|x_k\rangle \\ \langle x_2|x_1\rangle & \langle x_2|x_2\rangle & \cdots & \langle x_2|x_k\rangle \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \langle x_k|x_1\rangle & \langle x_k|x_2\rangle & \cdots & \langle x_k|x_k\rangle \end{pmatrix}$$

zove se ***Gramova matrica****. Njezina determinanta naziva se* ***Gramova determinanta*** *i označava s $\Gamma(x_1, x_2, \ldots, x_k)$. Dakle,*

$$\Gamma(x_1, x_2, \ldots, x_k) = \det G(x_1, x_2, \ldots, x_k).$$

Propozicija 5.1.7. *Neka je V unitarni prostor i $S = \{x_1, \ldots, x_k\} \subset V$. Skup S je linearno nezavisan ako i samo ako je*

$$\Gamma(x_1, x_2, \ldots, x_k) \neq 0.$$

Dokaz. Skup $S = \{x_1, \ldots, x_k\}$ je linearno nezavisan u V ako i samo ako jednadžba

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_k x_k = 0_V, \tag{5.2}$$

ima jedinstveno rješenje $\alpha_1 = \cdots = \alpha_k = 0$. Pomnožimo skalarno jednadžbu (5.2) s vektorima x_1, x_2, ..., x_k redom. Zbog homogenosti i aditivnosti skalarnog produkta dobit ćemo jednadžbe

$$\begin{array}{ccccccccc} \alpha_1\langle x_1|x_1\rangle & + & \alpha_2\langle x_2|x_1\rangle & +\cdots+ & \alpha_k\langle x_k|x_1\rangle & = & 0, \\ \alpha_1\langle x_1|x_2\rangle & + & \alpha_2\langle x_2|x_2\rangle & +\cdots+ & \alpha_k\langle x_k|x_2\rangle & = & 0, \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \alpha_1\langle x_1|x_k\rangle & + & \alpha_2\langle x_2|x_k\rangle & +\cdots+ & \alpha_k\langle x_k|x_k\rangle & = & 0, \end{array} \tag{5.3}$$

koje možemo shvatiti kao sustav od k linearnih jednadžbi s nepoznanicama α_1, ..., α_k. Dakle, jednadžba (5.2) implicira sustav linearnih jednadžbi (5.3). Vrijedi i obrat. Svaka jednadžba u (5.3) je oblika

$$\langle \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_k x_k | x_i\rangle = 0,$$

pa množenjem svake od njih s $\overline{\alpha_i}$ i zbrajanjem dobivamo

$$0 = \sum_{i=1}^{k} \overline{\alpha_i}\langle \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_k x_k | x_i\rangle = \langle \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_k x_k | \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_k x_k\rangle.$$

Zbog pozitivne definitnosti skalarnog produkta upravo je $\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_k x_k = 0_V$. Dakle, jednadžba (5.2) je ekvivalentna sustavu linearnih jednadžbi (5.3).

Uočimo da je matrica sustava (5.3) jednaka transponiranoj Gramovoj matrici, $G(x_1, x_2, \ldots, x_k)^t$. Stoga sustav (5.3) ima jedinstveno trivijalno rješenje ako i samo ako mu je matrica sustava regularna, odnosno ako i samo ako je determinanta matrice sustava različita od 0, $\det G(x_1, x_2, \ldots, x_k)^t \neq 0$. Kako su determinanta matrice i njoj transponirane matrice jednake, slijedi tvrdnja propozicije. □

Gramova matrica je uvijek simetrična ako je unitarni prostor realan, a hermitski simetrična ako je prostor kompleksan. Na dijagonali su uvijek nenegativni realni brojevi. Dokazali smo da je Gramova determinanta linearno nezavisnog skupa različita od 0, no može se dokazati da je, štoviše, strogo pozitivna za linearno nezavisan skup. Ako se taj skup sastoji od samo dva vektora, pozitivnost Γ proizlazi izravno iz CSB nejednakosti. Nadalje, vrijednost Gramove determinante ima i dodatni geometrijski smisao jer je $\sqrt{\Gamma(\vec{a}, \vec{b})}$ jednak površini paralelograma razapetog (nekolinearnim) vektorima $\vec{a}$ i $\vec{b}$, dok je $\sqrt{\Gamma(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})}$ jednak volumenu paralelepipeda razapetog (nekomplanarnim) vektorima $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$ u prostoru V^3.

Primjer 5.8. Ispitat ćemo linearnu nezavisnost skupa $\{a, b, c\} \subset \mathbb{C}^3$, gdje su $a = (0, 1, i)$, $b = (1 + i, 1, 1 - i)$, $c = (-1 + i, 1 + i, 1 + 2i)$, koristeći se Gramovom determinantom. Ponovimo, skalarni produkt u $\mathbb{C}^3$ je dan s

$$\langle x|y \rangle = x_1 \overline{y_1} + x_2 \overline{y_2} + x_3 \overline{y_3},$$

za $x = (x_1, x_2, x_3)$, $y = (y_1, y_2, y_3)$ iz $\mathbb{C}^3$. Sada je

$$G(a, b, c) = \begin{pmatrix} \langle a|a \rangle & \langle a|b \rangle & \langle a|c \rangle \\ \langle b|a \rangle & \langle b|b \rangle & \langle b|c \rangle \\ \langle c|a \rangle & \langle c|b \rangle & \langle c|c \rangle \end{pmatrix}.$$

Zbog hermitske simetričnosti vrijedi

$$G(a, b, c) = \begin{pmatrix} \overline{\langle a|a \rangle} & \langle a|b \rangle & \langle a|c \rangle \\ \overline{\langle a|b \rangle} & \overline{\langle b|b \rangle} & \langle b|c \rangle \\ \overline{\langle a|c \rangle} & \overline{\langle b|c \rangle} & \langle c|c \rangle \end{pmatrix} = G(a, b, c)^*,$$

odnosno Gramova matrica je hermitski simetrična, pa je potrebno izračunati sljedećih šest skalarnih umnožaka:

$$\langle a|a \rangle = 2, \ \langle a|b \rangle = i, \ \langle a|c \rangle = 3, \ \langle b|b \rangle = 5, \ \langle b|c \rangle = -6i, \ \langle c|c \rangle = 9.$$

Sada je

$$\Gamma(a, b, c) = \begin{vmatrix} 2 & i & 3 \\ -i & 5 & -6i \\ 3 & 6i & 9 \end{vmatrix} = 0,$$

pa zaključujemo da je skup S linearno zavisan.

♡

5.2 Ortogonalni skupovi

Definicija 5.2.1. *Neka su a i b vektori unitarnog prostora V. Kažemo da su vektori a i b međusobno* ***ortogonalni*** *ako vrijedi $\langle a|b\rangle = 0$. Pišemo $a \perp b$.*

Uočimo da je relacija *biti ortogonalan* simetrična, to jest ako $a \perp b$, onda $b \perp a$. Zaista, $\langle a|b\rangle = 0$ je ekvivalentno s $\langle b|a\rangle = 0$. Stoga i govorimo o *međusobnoj* ortogonalnosti. Kraće ćemo za dva vektora reći da su ortogonalni.

Prema propoziciji 5.1.4 slijedi da je nulvektor ortogonalan na svaki vektor prostora, to jest $0_V \perp a$ za sve $a \in V$. Nadalje, iz (5.1) dobivamo da je $a \perp a$ ako i samo ako je $a = 0_V$.

Definicija 5.2.2. *Neka je V unitarni prostor. Za podskup $S = \{a_1, \ldots, a_k\} \subset V \backslash \{0_V\}$ kažemo da je* ***ortogonalni skup*** *(ili* ***sustav****)* ***vektora*** *ako su a_i i a_j međusobno ortogonalni za sve $1 \leq i < j \leq k$. Jednočlani podskup $\{a_1\} \subset V \backslash \{0_V\}$ smatrat ćemo ortogonalnim.*

Propozicija 5.2.3. *Neka je $S = \{a_1, \ldots, a_k\}$ ortogonalni podskup unitarnog prostora V. Tada je S linearno nezavisan skup. Posebno, ako je S ortogonalni podskup n-dimenzionalnog unitarnog prostora V, onda je $|S| \leq n$.*

Dokaz. Primijenimo kriterij za linearnu nezavisnost pomoću Gramove determinante (propozicija 5.1.7). Gramova matrica ortogonalnog skupa je dijagonalna, pritom regularna jer su svi elementi dijagonale različiti od 0 pa je $\Gamma(a_1, \ldots, a_k) \neq 0$. Stoga je ortogonalni skup vektora linearno nezavisan. □

Napomenimo da se dokaz može provesti i tako da se pretpostavi da za neke skalare $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ vrijedi

$$\alpha_1 a_1 + \cdots + \alpha_k a_k = 0_V$$

pa se skalarnim množenjem te jednakosti redom s a_1, a_2,..., a_k dobiva $\alpha_1\langle a_1|a_1\rangle = 0$, ..., $\alpha_k\langle a_k|a_k\rangle = 0$, odakle je $\alpha_1 = \cdots = \alpha_k = 0$.

Definicija 5.2.4. *Neprazni podskupovi S i T unitarnog prostora V su* ***međusobno ortogonalni****, $S \perp T$, ako je svaki vektor skupa S međusobno ortogonalan sa svakim vektorom skupa T.*

Propozicija 5.2.5. *Neka je V unitarni prostor i $S, T \subseteq V$ su međusobno ortogonalni skupovi. Tada je njihov presjek ili prazan ili jednak $\{0_V\}$.*

Dokaz. Ako je $a \in S \cap T$, onda je $\langle a|a\rangle = 0$, pa je $a = 0_V$. □

Definicija 5.2.6. *Za neprazan podskup S unitarnog prostora V definiramo skup*

$$S^\perp = \{x \in V \,:\, x \perp a, \forall a \in S\}.$$

*Ako je S potprostor od V, $S^\perp$ nazivamo **ortogonalnim komplementom** od S.*

Jasno je da $S^\perp$ nikad nije prazan skup jer sigurno sadrži nulvektor.

Propozicija 5.2.7. *Neka je $S \neq \emptyset$ podskup unitarnog prostora V. Tada je $S^\perp$ vektorski potprostor od V.*

Dokaz. Pretpostavimo da su $x, y \in S^\perp$. Tada je $\langle x|a\rangle = 0$ i $\langle y|a\rangle = 0$ za sve $a \in S$. Nadalje, pretpostavimo da su $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$ i $a \in S$. Vrijedi

$$\langle \alpha x + \beta y|a\rangle = \alpha\langle x|a\rangle + \beta\langle y|a\rangle = 0,$$

pa je $\alpha x + \beta y \in S^\perp$. Dakle, $S^\perp \leq V$. □

Uočavamo da je $S^\perp$ potprostor nekog unitarnog prostora V za *bilo koji* neprazan podskup S – ne nužno potprostor. Njegov naziv, ortogonalni komplement, bit će opravdan nešto kasnije propozicijom 5.4.4.

Zadatak 5.2. *Pokažite da za svaki neprazni podskup S unitarnog prostora V vrijedi:*

$$S^\perp = [S]^\perp = [S^\perp].$$

Zadatak 5.3. *Za podskupove S i T unitarnog prostora V dokažite sljedeće implikacije:*

(a) *Ako je $S \neq \emptyset$ podskup od T, onda je $T^\perp$ potprostor od $S^\perp$.*

(b) *Ako S sadrži skup izvodnica za V, onda je $S^\perp = \{0_V\}$.*

5.3 Norma i metrika

Neka je V realni ili kompleksni unitarni prostor. Budući da je $\langle a|a\rangle \geq 0$ za sve $a \in V$, dobro je definiran broj

$$\|a\| = \sqrt{\langle a|a\rangle}$$

koji nazivamo *norma*, *modul* ili *duljina vektora* a. Uočimo da uz tu oznaku nejednakost Cauchy-Schwarz-Bunjakovskog možemo pisati u obliku

$$|\langle a|b\rangle| \leq \|a\|\|b\|. \tag{5.4}$$

Posebno, ako je V *realni* unitarni prostor i a, b vektori iz $V\backslash\{0_V\}$, prema (5.4) slijedi

$$\frac{|\langle a|b\rangle|}{\|a\| \cdot \|b\|} \leq 1,$$

odnosno

$$-1 \leq \frac{\langle a|b\rangle}{\|a\| \cdot \|b\|} \leq 1.$$

Stoga postoji jedinstven $\varphi \in [0, \pi]$ takav da je

$$\cos\varphi = \frac{\langle a|b\rangle}{\|a\| \cdot \|b\|}.$$

Kažemo da je φ *kut između vektora* a i b te pišemo $\angle(a, b) = \varphi$. Uočimo da vrijedi relacija

$$\langle a|b\rangle = \|a\|\|b\| \cos(\angle(a, b))$$

koja služi kao definicija skalarnog umnoška u prostoru V^3 s obzirom na to da u njemu imamo definirane pojmove duljine vektora i kuta između vektora. Napomenimo da pojam kuta između vektora a i b *ne* definiramo ako je $a = 0_V$ ili $b = 0_V$.

Općenito se pojam norme definira neovisno o skalarnom produktu.

Definicija 5.3.1. *Neka je V vektorski prostor nad poljem $\mathbb{F}$, pri čemu je $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ ili $\mathbb{F} = \mathbb{C}$. Preslikavanje*

$$\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}$$

koje svakom vektoru $a \in V$ pridružuje realni broj $\|a\|$ sa svojstvima

1. $\|a\| \geq 0$, *pri čemu je* $\|a\| = 0$ *ako i samo ako je* $a = 0_V$, (pozitivna definitnost)
2. $\|\lambda a\| = |\lambda| \cdot \|a\|$, (homogenost)
3. $\|a + b\| \leq \|a\| + \|b\|$, (nejednakost trokuta)

za sve $a, b \in V$, $\lambda \in \mathbb{F}$, naziva se ***norma*** *na prostoru V.*

Uređeni par $(V, \|\cdot\|)$ zove se ***normirani prostor****.*

Uočimo da norma svakom vektoru pridružuje nenegativni realni broj.

Propozicija 5.3.2. *Neka je $(V, \langle\cdot|\cdot\rangle)$ unitarni prostor. Preslikavanje*

$$a \mapsto \sqrt{\langle a|a\rangle}$$

s prostora V u polje $\mathbb{R}$ je norma na prostoru V.

Dokaz. Označimo s $\|a\| = \sqrt{\langle a|a\rangle}$, za $a \in V$. Provjerimo da preslikavanje $\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}$ zadovoljava sva tri svojstva iz definicije 5.3.1.

Svojstvo (1) slijedi izravno iz pozitivne definitnosti skalarnog produkta. Pokažimo svojstvo (2). Koristeći se definicijom 5.1.1 i propozicijom 5.1.2 dobivamo

$$\|\lambda a\| = \sqrt{\langle \lambda a|\lambda a\rangle} = \sqrt{\lambda\overline{\lambda}\langle a|a\rangle} = \sqrt{|\lambda|^2\langle a|a\rangle} = |\lambda|\sqrt{\langle a|a\rangle} = |\lambda|\|a\|,$$

za sve $a \in V$, $\lambda \in \mathbb{F}$. Za provjeru svojstva (3) koristimo se svojstvima hermitske simetričnosti i aditivnosti skalarnog produkta. Vrijedi

$$\|a+b\|^2 = \langle a+b|a+b\rangle = \langle a|a\rangle + \langle a|b\rangle + \langle b|a\rangle + \langle b|b\rangle = \|a\|^2 + 2\operatorname{Re}\langle a|b\rangle + \|b\|^2.$$

Kako je $\operatorname{Re}\langle a|b\rangle \leq |\operatorname{Re}\langle a|b\rangle| \leq |\langle a|b\rangle|$ i $|\langle a|b\rangle| \leq \|a\|\|b\|$ prema (5.4), slijedi

$$\|a+b\|^2 \leq \|a\|^2 + 2\|a\|\|b\| + \|b\|^2 = (\|a\| + \|b\|)^2.$$

□

Prema upravo dokazanoj propoziciji zaključujemo da je svaki unitarni prostor i normiran. Još kažemo da je norma oblika $\|a\| = \sqrt{\langle a|a\rangle}$ *inducirana* skalarnim produktom. Prirodno je pitati se vrijedi li obrat, odnosno može li se u normiranom prostoru uvesti skalarni produkt koji inducira upravo početnu normu. Odgovor je – ne uvijek, a pokazat ćemo uz koji uvjet se to može učiniti.

Propozicija 5.3.3 (Relacija paralelograma)**.** *Neka je $(V, \langle\cdot|\cdot\rangle)$ unitarni prostor s induciranom normom $\|\cdot\|$. Vrijedi*

$$\|a+b\|^2 + \|a-b\|^2 = 2\|a\|^2 + 2\|b\|^2 \tag{5.5}$$

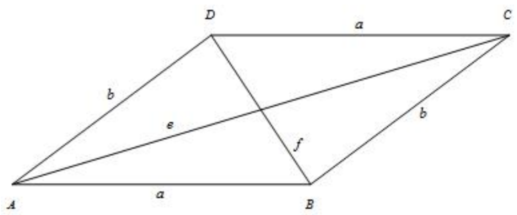
za sve $a, b \in V$.

Dokaz. Relaciju pokazujemo raspisivanjem:

$$\begin{aligned}\|a+b\|^2 + \|a-b\|^2 &= \langle a+b|a+b\rangle + \langle a-b|a-b\rangle \\ &= \|a\|^2 + \cancel{\langle a|b\rangle} + \cancel{\langle b|a\rangle} + \|b\|^2 + \|a\|^2 - \cancel{\langle a|b\rangle} - \cancel{\langle b|a\rangle} + \|b\|^2 \\ &= 2\|a\|^2 + 2\|b\|^2.\end{aligned}$$

□

Uočimo da relacija paralelograma izražava poznato svojstvo paralelograma u euklidskoj ravnini koje kaže da je zbroj kvadrata duljina dijagonala paralelograma jednak zbroju kvadrata duljina njegovih stranica. (Prisjetite se dokaza iskazanog svojstva pomoću Pitagorina poučka.)



Slika 5.1: Svojstvo paralelograma $e^2 + f^2 = 2a^2 + 2b^2$

Teorem 5.3.4 (Jordan - von Neumann)**.** *Neka je* $(V, \|\cdot\|)$ *normirani prostor nad poljem* $\mathbb{R}$ *ili* $\mathbb{C}$*. Prostor* V *je unitarni prostor čiji skalarni produkt inducira normu* $\|\cdot\|$ *ako i samo ako norma* $\|\cdot\|$ *zadovoljava relaciju paralelograma (5.5).*

Skica dokaza. Nužnost smo pokazali propozicijom 5.3.3. Pokažimo obrat. Ako je $\mathbb{F} = \mathbb{R}$, stavljamo
$$\langle a|b\rangle = \frac{1}{4}(\|a+b\|^2 - \|a-b\|^2),$$
a za $\mathbb{F} = \mathbb{C}$
$$\langle a|b\rangle = \frac{1}{4}(\|a+b\|^2 - \|a-b\|^2) + \frac{i}{4}(\|a+ib\|^2 - \|a-ib\|^2).$$
Provjerimo da smo na taj način definirali skalarno množenje na V. Neka je $\mathbb{F} = \mathbb{R}$. Provjeravamo redom svojstva iz definicije 5.1.1.

(1) $\langle a|a\rangle = \frac{1}{4}(\|a+a\|^2 - \|0_V\|^2) = \frac{1}{4}(2\|a\|)^2 = \|a\|^2 \geq 0$ te $\langle a|a\rangle = 0$ ako i samo $\|a\| = 0$, to jest $a = 0_V$.

(2) $\langle a|b\rangle = \frac{1}{4}(\|a+b\|^2 - \|a-b\|^2) = \frac{1}{4}(\|b+a\|^2 - |-1|^2\|(b-a)\|^2) = \langle b|a\rangle$.

(4) Pokažimo aditivnost. Prema definiciji je
$$\langle a|b+c\rangle = \frac{1}{4}(\|a+b+c\|^2 - \|a-b-c\|^2).$$

Raspišimo desnu stranu prethodne jednakosti koristeći se relacijom paralelograma.

$$\|a+b+c\|^2 - \|a-b-c\|^2 = \underbrace{\|a+b+c\|^2 + \|a+b-c\|^2}_{\text{rel. paral.}} \underbrace{- \|\underbrace{a+b-c}_{=a-c+b}\|^2 - \|\underbrace{a-b-c}_{=a-c-b}\|^2}_{\text{rel. paral.}}$$

$$\begin{aligned}
&= 2\|a+b\|^2 + 2\|c\|^2 - 2\|a-c\|^2 - 2\|b\|^2 \\
&= \|a+b\|^2 + \underbrace{\|a+b\|^2 + \|a-b\|^2}_{\text{rel. paral.}} - \|a-b\|^2 + 2\|c\|^2 \\
&\quad - \|a-c\|^2 \underbrace{- \|a-c\|^2 - \|a+c\|^2}_{\text{rel. paral.}} + \|a+c\|^2 - 2\|b\|^2 \\
&= \|a+b\|^2 + \cancel{2\|a\|^2} + \cancel{2\|b\|^2} - \|a-b\|^2 + \cancel{2\|c\|^2} \\
&\quad - \|a-c\|^2 - \cancel{2\|a\|^2} - \cancel{2\|c\|^2} + \|a+c\|^2 - \cancel{2\|b\|^2} \\
&= \underbrace{\|a+b\|^2 - \|a-b\|^2}_{4\langle a|b\rangle} + \underbrace{\|a+c\|^2 - \|a-c\|^2}_{4\langle a|c\rangle} = 4(\langle a|b\rangle + \langle a|c\rangle)
\end{aligned}$$

Zbog simetričnosti je i

$$\langle a+b|c\rangle = \langle a|c\rangle + \langle b|c\rangle.$$

(3) Homogenost slijedi iz aditivnosti, ali ne sasvim jednostavno. Dat ćemo skicu tog dokaza. Zaista,

$$\langle 2a|b\rangle = \langle a+a|b\rangle = \langle a|b\rangle + \langle a|b\rangle = 2\langle a|b\rangle.$$

Induktivno dalje slijedi da je

$$\langle na|b\rangle = n\langle a|b\rangle,$$

za sve $n \in \mathbb{N}$. Za $\lambda = \frac{1}{n}$ prema upravo pokazanom imamo

$$n\langle \lambda a|b\rangle = \langle n\lambda a|b\rangle = \langle a|b\rangle.$$

Množenjem prethodne relacije s λ slijedi

$$\langle \lambda a|b\rangle = \lambda\langle a|b\rangle.$$

Za $\lambda = 0$ i $\lambda = -1$ tvrdnja se lako pokaže, pa možemo ustanoviti da prethodna jednakost vrijedi za sve $\lambda = \frac{m}{n}$, $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$, to jest za sve $\lambda \in \mathbb{Q}$. Konačno, sljedeći argumenti:

- skup $\mathbb{Q}$ gust je u $\mathbb{R}$ (to jest svaki realni broj možemo prikazati kao limes niza racionalnih brojeva),
- funkcije $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zadane s $f(t) = t\langle a|b\rangle$, $g(t) = \langle ta|b\rangle$ su neprekidne na $\mathbb{R}$,
- $f\,\big|_{\mathbb{Q}} = g\,\big|_{\mathbb{Q}}$ (restrikcije funkcija f i g na skup $\mathbb{Q}$ su jednake)

povlače da tvrdnja vrijedi za sve $\lambda \in \mathbb{R}$.

Na sličan način provjeravaju se svojstva u slučaju $\mathbb{F} = \mathbb{C}$. □

Primjer 5.9. *Neke norme na prostoru* $\mathbb{R}^n$. Neka je $a = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$. Definiramo:

- $\|a\|_\infty = \max\{|\alpha_1|, \ldots, |\alpha_n|\}$,

- $\|a\|_1 = |\alpha_1| + \cdots + |\alpha_n|$,
- $\|a\|_2 = \sqrt{\alpha_1^2 + \cdots + \alpha_n^2}$,
- $\|a\|_p = (|\alpha_1|^p + \cdots + |\alpha_n|^p)^{1/p}$, $p \in \mathbb{N}$.

Sva ta preslikavanja zadovoljavaju svojstva norme (što za neke nije očito ni lako pokazati). Nazivamo ih maks-norma, 1-norma (ili „taxicab" norma), 2-norma (ili euklidska norma) i p-norma, redom. Napominjemo da ovo nisu sve norme koje postoje na $\mathbb{R}^n$.

Ako je $n \geq 2$, među navedenim normama na prostoru $\mathbb{R}^n$ samo je norma $\|\cdot\|_2$ inducirana skalarnim produktom. Pokušajte pronaći primjere vektora za koje ne vrijedi relacija paralelograma za norme $\|\cdot\|_\infty$ i $\|\cdot\|_1$.

♡

Napomena 5.3.5. *Neka je $\{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$ ortogonalni skup nekog unitarnog prostora. Tada je*

$$\|a_1 + a_2 + \cdots + a_k\|^2 = \|a_1\|^2 + \|a_2\|^2 + \cdots + \|a_k\|^2,$$

gdje je $\|\cdot\|$ norma inducirana skalarnim produktom. Za $k = 2$ dobivamo relaciju koja u elementarnoj geometriji zapravo predstavlja Pitagorin poučak *za pravokutni trokut.*

Uočimo da je to poseban slučaj relacije u realnom unitarnom prostoru

$$\|a_1 + a_2\|^2 = \|a_1\|^2 + \|a_2\|^2 + 2\langle a_1|a_2\rangle,$$

koja odgovara Kosinusovu poučku *u geometriji trokuta.*

Definicija 5.3.6. *Vektor a iz normiranog prostora V takav da je*

$$\|a\| = 1$$

zove se ***jedinični*** *ili* ***normirani*** *vektor. Kažemo da smo* ***normirali*** *vektor $a \in V \backslash \{0_V\}$ ako smo mu pridružili vektor*

$$a_0 = \frac{1}{\|a\|} a.$$

Pomoću norme lako se može definirati i udaljenost između dvaju vektora. Neka je $(V, \|\cdot\|)$ normirani prostor te $a, b \in V$. *Udaljenost* vektora a od vektora b smisleno je definirati kao

$$d(a, b) = \|a - b\|. \tag{5.6}$$

Uočimo da smo ovime definirali *funkciju udaljenosti*, odnosno *metriku*, na prostoru V:

$$d : V \times V \to \mathbb{R}.$$

Primijetimo još da se u unitarnim prostorima $V^2(O)$ i $V^3(O)$ tako definirana udaljenost dvaju vektora (radijvektora) $\overrightarrow{OA}$ i $\overrightarrow{OB}$ podudara s euklidskom udaljenosti krajnjih točaka A i B tih radijvektora.

Općenito, pojam metrike definira se za bilo koji neprazan skup i bez strukture vektorskog prostora.

Definicija 5.3.7. *Neka je S bilo koji neprazan skup. Preslikavanje*

$$d : S \times S \to \mathbb{R}$$

naziva se ***metrika*** *na skupu S ako vrijede sljedeća svojstva:*

1. $d(x, y) \geq 0$, *za sve* $x, y \in S$, (pozitivnost)
2. $d(x, y) = 0$ *ako i samo ako je* $x = y$, (strogost)
3. $d(x, y) = d(y, x)$, *za sve* $x, y \in S$, (simetričnost)
4. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$, *za sve* $x, y, z \in S$. (nejednakost trokuta)

Uređeni par (X, d) zove se ***metrički prostor****.*

Lako se može ustanoviti da je svaki normirani prostor uistinu i metrički pri čemu je metrika dana s (5.6).

Primjer 5.10. *Neke metrike na prostoru $\mathbb{R}^n$.* Neka je $a = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n), b = (\beta_1, \ldots, \beta_n) \in \mathbb{R}^n$

- $d(a, b) = \max\{|\alpha_1 - \beta_1|, \ldots, |\alpha_n - \beta_n|\}$,
- $d(a, b) = |\alpha_1 - \beta_1| + \cdots + |\alpha_n - \beta_n|$,
- $d(a, b) = \sqrt{(\alpha_1 - \beta_1)^2 + \cdots + (\alpha_n - \beta_n)^2}$,
- $d(a, b) = \begin{cases} 1, & a \neq b, \\ 0, & a = b \end{cases}$ (diskretna metrika).

Usporedite te primjere metrika s primjerima normi iz primjera 5.9. Može li se svaka od tih metrika dobiti iz neke norme pomoću relacije (5.6)? ♡

Sljedeće zadatke riješite pomoću CSB nejednakosti (5.1), odnosno teorema 5.1.5.

Zadatak 5.4. *Ako je $a = (1 - i, i, 1 + i)$ vektor iz kompleksnog unitarnog prostora $\mathbb{C}^3$, odredite i opišite skup svih vrijednosti skalarnog produkta $\langle a|x\rangle$, pri čemu je x jedinični vektor iz $\mathbb{C}^3$. Skicirajte taj skup u kompleksnoj ravnini.*

Zadatak 5.5. *Neka je $a = (2, 0, 1, 7)$ vektor iz unitarnog prostora $\mathbb{R}^4$ sa standardnim skalarnim produktom i neka je S podskup svih jediničnih vektora u $\mathbb{R}^4$. Odredite skup svih vrijednosti skalarnog produkta $\langle a|x\rangle$ za x iz S. Ako je taj skup omeđen, napišite vektore za koje se poprima najveća i najmanja vrijednost.*

Zadatak 5.6. *Neka su a, b vektori iz unitarnog prostora V te $\| \ \|$ norma zadana skalarnim produktom na V. Ako je $\|a\| = 2$ i $\|b\| = 1$, pokažite da vrijedi: $\|a + b\|\|a - b\| \geq 3$. (Uočite da u prostoru V^2 ta tvrdnja znači da umnožak duljina dijagonala paralelograma sa stranicama duljina 2 i 1 iznosi barem 3.)*

5.4 Ortogonalizacija baze. Ortogonalna projekcija

U ovom odjeljku opisat ćemo postupak kojim linearno nezavisan skup vektora nekog unitarnog prostora možemo zamijeniti ortogonalnim skupom normiranih vektora koji razapinju istu ljusku kao i početni skup.

Definicija 5.4.1. *Skup vektora* $\{a_1, \ldots, a_k\}$ *unitarnog prostora* V *je* ***ortonormiran*** *ako je ortogonalan i* $\|a_i\| = 1$*, za sve* $i = 1, \ldots, k$*, to jest ako je*

$$\langle a_i | a_j \rangle = \delta_{ij},$$

za sve $i, j = 1, \ldots, k$*. Posebno, ako je* S *baza prostora* V *i uz to ortonormiran skup,* S *nazivamo* ***ortonormiranom bazom****. Ponekad koristimo pokrate ON (ortonormiran) i ONB (ortonormirana baza).*

U daljnjem izlaganju bit će vrlo korisno služiti se ortonormiranom bazom unitarnog prostora, odnosno nekog njegova potprostora, s obzirom na to da se svaki račun koji obuhvaća skalarno množenje vektora zapisanih u bazi bitno pojednostavljuje ako se izabere upravo ortonormirana baza (ONB). Također, pri dokazivanju nekih činjenica bit će važno poslužiti se upravo s ONB.

Naime, ako su vektori x i y unitarnog prostora V dimenzije n prikazani u nekoj općenitoj bazi $\{a_1, \ldots, a_n\}$ s

$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i a_i, \;\; y = \sum_{i=1}^{n} y_i a_i,$$

njihov je skalarni produkt

$$\langle x | y \rangle = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_i \overline{y_j} \langle a_i | a_j \rangle.$$

U načelu imamo n^2 pribrojnika u sumi na desnoj strani prethodne jednakosti. No ako je ta baza ortonormirana, dakle ako je $\langle a_i | a_j \rangle = \delta_{ij}$, ta će se suma svesti na svega n pribrojnika koji ne moraju biti jednaki 0:

$$\langle x | y \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{y_i}.$$

Prisjetimo se da je u primjerima 5.3 i 5.4 upravo takvom formulom bilo zadano skalarno množenje na prostorima $\mathbb{R}^n$ i $\mathbb{C}^n$, a za bazu (standardnu) u kojoj su prikazani vektori konstatiralo se da je ONB. Sada smo imali obrnutu situaciju. Ako se u proizvoljnom n-dimenzionalnom unitarnom prostoru poslužimo ortonormiranom bazom, to će rezultirati identičnom formulom kao u navedenim primjerima. Možemo reći da ti primjeri (5.3 i 5.4) zapravo daju *tipični oblik skalarnog produkta*. Štoviše, po uzoru na primjere 5.3 i 5.4, možemo formulama jednakog oblika uvesti skalarno množenje na bilo kojem konačnodimenzionalnom prostoru, realnom odnosno kompleksnom. U tu svrhu izaberemo bilo koju bazu $\{a_1, \ldots, a_n\}$ takvog prostora i dalje radimo pomoću koordinata vektora u toj bazi, analogno kao u primjeru 5.3 za realni, odnosno primjeru 5.4 za kompleksni prostor. Tako uvedeno skalarno množenje očito ovisi o izboru baze, a izabrana baza tada je ONB dotičnog unitarnog prostora.

Koeficijenti x_i u prikazu vektora $x = \sum_{i=1}^{n} x_i a_i$ u ortonormiranoj bazi mogu se lako izraziti pomoću skalarnog produkta vektora x s vektorima te ortonormirane baze, s obzirom na to da skalarnim množenjem s vektorom a_j dobivamo

$$\langle x|a_j\rangle = x_j\langle a_j|a_j\rangle = x_j$$

za svaki $j = 1, 2, \ldots, n$ pa je

$$x = \sum_{i=1}^{n} \langle x|a_i\rangle a_i.$$

Nadalje, za vektor zapisan u ON bazi i norma poprima jednostavniji oblik:

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2},$$

što je upravo oblik norme $\|x\|_2$ u prostoru $\mathbb{R}^n$ odnosno $\mathbb{C}^n$ (primjer 5.9). Ujedno uz pomoć prethodno pokazanog imamo i

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |\langle x|a_i\rangle|^2}.$$

Dakako, metrika inducirana normom također poprima poznati oblik (primjer 5.10):

$$d(x, y) = \|x - y\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^2}.$$

Poslije ćemo vidjeti da se i važna operacija ortogonalnog projiciranja vektora na potprostor može znatno pojednostavniti primjenom ON baze tog potprostora.

U nekim primjerima unitarnih prostora kojima se najčešće bavimo kanonska baza ujedno je ONB, npr. u $\mathbb{R}^n$ odnosno $\mathbb{C}^n$, također i u $M_n(\mathbb{R})$, $M_n(\mathbb{C})$. U prostoru V^3 odnosno $V^3(O)$ $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ je standardna oznaka za ONB, no to nije neka čvrsta, uvijek ista baza. Međutim, kanonska baza nije uvijek i ortonormirana, kao u prostorima polinoma sa skalarnim množenjem zadanim pomoću integrala na segmentu (primjer 5.5). Uvjerite se računom kako npr. $\{1, t, t^2\}$ nije ONB u prostoru $\mathcal{P}_2$ (prostoru polinoma s realnim koeficijentima stupnja manjeg od 3) sa skalarnim produktom iz primjera 5.5.

Zbog navedenog, nećemo uvijek imati „gotovu" ONB kojom se možemo poslužiti, nego ćemo trebati konstruirati takvu bazu. Često ćemo trebati ONB koja nije standardna (kanonska ili podskup kanonske, ako je riječ o potprostoru), nego takvu ONB koja je prikladna za pojedinu situaciju. Primjerice, kod ortogonalne projekcije na potprostor trebat ćemo ONB tog potprostora, a za ortogonalni komplement potprostora bit će korisna ONB prostora dobivena proširivanjem ONB potprostora. Dakle, općenito neće nam biti dostatno samo poznavati neku ONB prostora, nego nam treba postupak kojim bilo koji linearno nezavisni podskup unitarnog prostora možemo povezati s ortonormiranim skupom tako da oba ta skupa razapinju istu linearnu ljusku, dakle potprostor. Taj će se postupak odvijati u više „etapa", tako da se u svakoj od njih sačuva linearna ljuska, tj. potprostor razapet vektorima polaznog skupa.

Prisjetimo se što smo naučili na kolegiju *Analitička geometrija.* Neka je $\{\vec{a},\vec{b}\}$ linearno nezavisan skup u prostoru V^3. Dakle, $\vec{a}$ i $\vec{b}$ su nekolinearni vektori. Vektor

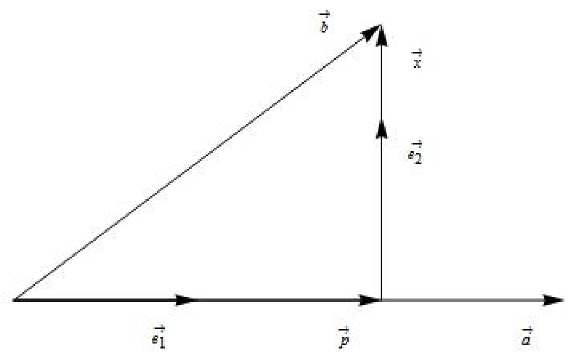
$$\vec{p}=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|^2}\,\vec{a}$$

predstavlja ortogonalnu projekciju vektora $\vec{b}$ u smjeru vektora $\vec{a}$. Uočimo da je

$$\vec{x}=\vec{b}-\vec{p}=\vec{b}-\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|^2}\,\vec{a},$$

ortogonalan na smjer vektora $\vec{a}$. Zaista,

$$\vec{x}\cdot\vec{a}=\vec{b}\cdot\vec{a}-\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|^2}\,(\vec{a}\cdot\vec{a})=\vec{b}\cdot\vec{a}-\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|^2}\,|\vec{a}|^2=0.$$



Slika 5.2: Ortogonalna projekcija vektora $\vec{b}$ u smjeru vektora $\vec{a}$

Normirajmo vektore $\vec{a}$ i $\vec{x}$:

$$\vec{e_1}=\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|},\ \vec{e_2}=\frac{\vec{x}}{|\vec{x}|}.$$

Uočimo da je $\{\vec{e_1},\vec{e_2}\}$ ortonormirani skup te vrijedi

$$[\vec{a}]=[\vec{e_1}],\ [\vec{a},\vec{b}]=[\vec{e_1},\vec{e_2}],$$

jer je očito $\vec{e_2}\in[\vec{a},\vec{b}]$. Stoga smo od linearno nezavisnog skupa $\{\vec{a},\vec{b}\}$ došli do ortonormiranog skupa $\{\vec{e_1},\vec{e_2}\}$ koji je sačuvao linearnu ljusku.

Sličan postupak možemo napraviti i za tri nekomplanarna vektora, to jest linearno nezavisan skup $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ u V^3. Prva dva ortonormirana vektora $\vec{e_1}$ i $\vec{e_2}$ dobivamo upravo opisanim postupkom. Dakle,

$$\vec{e_1} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$$

te

$$\vec{e_2} = \frac{\vec{b'}}{|\vec{b'}|}, \ \vec{b'} = \vec{b} - (\vec{b} \cdot \vec{e_1})\vec{e_1}.$$

Treći vektor dobit ćemo tako da od vektora $\vec{c}$ oduzmemo njegovu ortogonalnu projekciju na ravninu razapetu vektorima $\vec{a}$ i $\vec{b}$, odnosno ravninu razapetu vektorima $\vec{e_1}$ i $\vec{e_2}$, to jest vektor

$$\vec{p} = (\vec{c} \cdot \vec{e_1})\vec{e_1} + (\vec{c} \cdot \vec{e_2})\vec{e_2}.$$

Dakle,

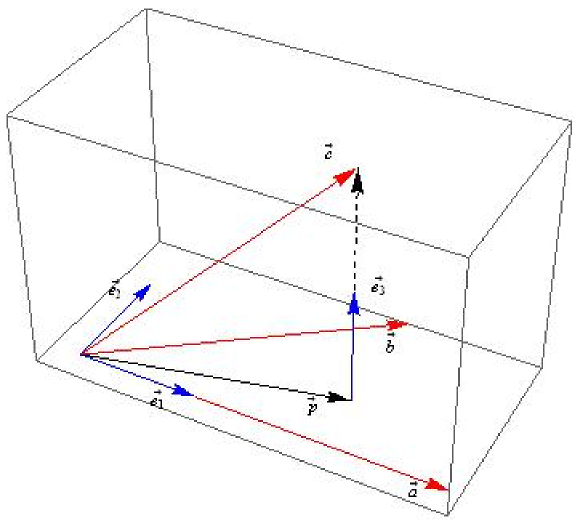
$$\vec{c'} = \vec{c} - \vec{p} = \vec{c} - (\vec{c} \cdot \vec{e_1})\vec{e_1} - (\vec{c} \cdot \vec{e_2})\vec{e_2}.$$

Vektor $\vec{c'}$ je ortogonalan na vektore $\vec{e_1}$ i $\vec{e_2}$, pa ga još samo moramo normirati,

$$\vec{e_3} = \frac{\vec{c'}}{|\vec{c'}|}.$$

Opisanim postupkom došli smo do ortonormiranog skupa, štoviše i ortonormirane baze za V^3, $\{\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}\}$ za koju vrijedi

$$[\vec{a}] = [\vec{e_1}], \ [\vec{a}, \vec{b}] = [\vec{e_1}, \vec{e_2}], \ [\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = [\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}] = V^3.$$



Slika 5.3: Ortogonalna projekcija vektora $\vec{c}$ na $[\vec{a}, \vec{b}] = [\vec{e_1}, \vec{e_2}]$

Opisani postupak generalizirat ćemo za proizvoljan linearno nezavisan podskup nekog konačno-dimenzionalnog unitarnog prostora te će taj generalizirani postupak poslužiti i kao dokaz sljedećeg teorema.

Teorem 5.4.2. *Neka je V unitarni prostor te $\{a_1, \dots, a_k\}$ linearno nezavisan podskup od V. Tada postoji ortonormirani podskup $\{e_1, \dots, e_k\}$ u V takav da je*

$$[a_1, \dots, a_j] = [e_1, \dots, e_j],$$

za sve $j = 1, \dots, k$.

Dokaz. Najprije uočimo da je $a_1 \neq 0_V$ jer je element linearno nezavisnog podskupa. Sada stavimo

$$e_1 = \frac{a_1}{\|a_1\|}.$$

Jasno, $[a_1] = [e_1]$. Neka je nadalje

$$b_2 = a_2 - \langle a_2 | e_1 \rangle e_1.$$

Uočimo da je

$$\langle b_2 | e_1 \rangle = \langle a_2 | e_1 \rangle - \langle a_2 | e_1 \rangle \underbrace{\langle e_1 | e_1 \rangle}_{=1} = 0,$$

odnosno $b_2 \perp e_1$. Ustanovimo da je $b_2 \neq 0_V$. Zaista, u suprotnom bi vrijedilo $a_2 = \langle a_2 | e_1 \rangle e_1$, odnosno $a_2 \in [e_1] = [a_1]$, što nije moguće jer je skup $\{a_1, a_2\}$ linearno nezavisan. Normiranjem vektora b_2 dobivamo vektor

$$e_2 = \frac{b_2}{\|b_2\|},$$

koji je jedinični i ortogonalan na e_1. Dakle, $\{e_1, e_2\}$ je ortogonalni skup i očito vrijedi $[a_1, a_2] = [e_1, e_2]$.

Pretpostavimo da smo za neki $1 < \ell < k$ konstruirali ortonormirani skup $\{e_1, \dots, e_\ell\}$ sa svojstvom

$$[a_1, \dots, a_j] = [e_1, \dots, e_j],$$

za sve $j = 1, \dots, \ell$. Treba odrediti jedinični vektor koji je ortogonalan na skup $\{e_1, \dots, e_\ell\}$, a nalazi se u potprostoru $[a_1, \dots, a_\ell, a_{\ell+1}]$. Uočimo da je taj potprostor jednak $[e_1, \dots, e_\ell, a_{\ell+1}]$. Stoga možemo najprije potražiti vektor, označiti ga s $b_{\ell+1}$, kao linearnu kombinaciju vektora $e_1, \dots, e_\ell, a_{\ell+1}$ i zatim iskoristiti postavljeni uvjet ortogonalnosti. Dakle, skalarni umnožak vektora

$$b_{\ell+1} = \lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_\ell e_\ell + \lambda_{\ell+1} a_{\ell+1}$$

s vektorima e_j za sve $1 \leq j \leq \ell$ treba biti jednak nuli. Time dobivamo homogeni sustav od ℓ linearnih jednadžbi s $\ell + 1$ nepoznanicom:

$$\lambda_j + \lambda_{\ell+1} \langle a_{\ell+1} | e_j \rangle = 0, \;\; j = 1, \dots, \ell$$

koji ima 1-parametarsko rješenje

$$\lambda_{\ell+1} = \mu, \;\; \lambda_j = -\mu \langle a_{\ell+1} | e_j \rangle, \;\; j = 1, \dots, \ell.$$

Stoga vektor

$$b_{\ell+1} = -\mu\langle a_{\ell+1}|e_1\rangle e_1 - \mu\langle a_{\ell+1}|e_2\rangle e_2 - \cdots - \mu\langle a_{\ell+1}|e_\ell\rangle e_\ell + \mu a_{\ell+1} = \mu(a_{\ell+1} - \sum_{i=1}^{\ell}\langle a_{\ell+1}|e_i\rangle e_i)$$

ispunjava uvjet ortogonalnosti na skup $\{e_1, \ldots, e_\ell\}$ za svaki skalar μ. Primijetimo da je vektor

$$a_{\ell+1} - \sum_{i=1}^{\ell}\langle a_{\ell+1}|e_i\rangle e_i$$

različit od 0_V jer je $\{e_1, \ldots, e_\ell, a_{\ell+1}\}$ linearno nezavisan skup. Stoga je $b_{\ell+1} \neq 0_V$ za $\mu \neq 0$.

Normiranjem vektora $b_{\ell+1}$ dobivamo vektor

$$e_{\ell+1} = \frac{a_{\ell+1} - \sum_{i=1}^{\ell}\langle a_{\ell+1}|e_i\rangle e_i}{\|a_{\ell+1} - \sum_{i=1}^{\ell}\langle a_{\ell+1}|e_i\rangle e_i\|} \tag{5.7}$$

i time smo konstruirali ortonormirani skup $\{e_1, \ldots, e_\ell, e_{\ell+1}\}$.

Provjerimo još da vrijedi

$$[a_1, \ldots, a_\ell, a_{\ell+1}] = [e_1, \ldots, e_\ell, e_{\ell+1}].$$

Iz (5.7) lako se vidi da se vektor $a_{\ell+1}$ nalazi u linearnoj ljusci $[e_1, \ldots, e_\ell, e_{\ell+1}]$ pa je, zbog pretpostavke $[a_1, \ldots, a_\ell] = [e_1, \ldots, e_\ell]$, ispunjeno $[a_1, \ldots, a_\ell, a_{\ell+1}] \leq [e_1, \ldots, e_\ell, e_{\ell+1}]$. Budući da su to potprostori jednake dimenzije $\ell + 1$, moraju se podudarati.

Konačno, tvrdnja teorema slijedi primjenom principa matematičke indukcije. □

Postupak opisan u dokazu teorema 5.4.2 naziva se *Gram-Schmidtov postupak ortogonalizacije*. Dakle, algoritam za ortonormiranje linearno nezavisnog skupa $\{a_1, \ldots, a_k\} \subset V$ glasi:

$$\begin{aligned} e_1 &= \frac{a_1}{\|a_1\|}, \\ e_{j+1} &= \frac{a_{j+1} - \sum_{i=1}^{j}\langle a_{j+1}|e_i\rangle e_i}{\|a_{j+1} - \sum_{i=1}^{j}\langle a_{j+1}|e_i\rangle e_i\|}, \quad j = 1, \ldots, k-1. \end{aligned}$$

Korolar 5.4.3. *U svakom konačnodimenzionalnom netrivijalnom unitarnom prostoru postoji ortonormirana baza.*

Dokaz. Prema teoremu 5.4.2 svaki linearno nezavisan skup, stoga i baza prostora može se Gram-Schmidtovim postupkom ortonormirati do ortonormirane baze. □

Za neprazan podskup S unitarnog prostora V u odjeljku 5.2 definirali smo

$$S^\perp = \{x \in V \,:\, \langle x|y\rangle = 0, \forall y \in S\}$$

te pokazali da je $S^\perp$ potprostor od V. Sada ćemo se baviti ortogonalnim komplementom $L^\perp$ nekog potprostora L.

Propozicija 5.4.4. *Neka je V n-dimenzionalni unitarni prostor te L njegov potprostor. Tada je $L^\perp$ direktni komplement potprostora L, to jest*

$$L \dotplus L^\perp = V.$$

Dokaz. Prisjetimo se, M je direktni komplement potprostora L ako je $L \cap M = \{0_V\}$ i $L + M = V$. Kako su L i $L^\perp$ ortogonalni skupovi, prema propoziciji 5.2.5 slijedi da je $L \cap L^\perp = \{0_V\}$. (Uočimo da njihov presjek ne može biti prazan jer su L i $L^\perp$ potprostori.) Sada pokazujemo da je $L + L^\perp = V$. Razlikujemo dva slučaja, trivijalni i netrivijalni:

1. *slučaj.* Ako je $L = \{0_V\}$, onda je $L^\perp = V$, pa je $L + L^\perp = V$. Nadalje, ako je $L = V$, onda je $L^\perp = \{0_V\}$, pa vrijedi isto.

2. *slučaj.* Neka je $\dim L^\perp = k$, $1 \leq k \leq n-1$ te $\{a_1, \ldots, a_\ell\}$ neka baza za L. Nadopunimo tu bazu do baze za V,

$$\{a_1, \ldots, a_\ell, a_{\ell+1}, \ldots, a_n\},$$

te je ortonormiramo Gram-Schmidtovim postupkom,

$$\{e_1, \ldots, e_\ell, e_{\ell+1}, \ldots, e_n\}.$$

Prema teoremu 5.4.2 vrijedi da je $\{e_1, \ldots, e_\ell\}$ baza za L jer je

$$[e_1, \ldots, e_\ell] = [a_1, \ldots, a_\ell] = L.$$

Nadalje, prema svojstvu ortogonalne baze

$$\langle e_i | e_j \rangle = 0,$$

za sve $i = 1, \ldots, \ell$, $j = \ell+1, \ldots, n$, pa je

$$\langle x | e_j \rangle = 0,$$

za sve $x \in L$ i $j = \ell+1, \ldots, n$, odnosno

$$e_{\ell+1}, \ldots, e_n \in L^\perp.$$

Dakle, $\{e_{\ell+1}, \ldots, e_n\}$ je linearno nezavisan podskup od $L^\perp$ pa je $n - \ell \leq \dim L^\perp = k$. S druge strane, suma potprostora L i $L^\perp$ je direktna, pa iz $L \dotplus L^\perp \leq V$ slijedi $\ell + k \leq n$, odnosno $k \leq n - \ell$. Stoga je $k = n - \ell$ i $\dim(L \dotplus L^\perp) = n = \dim V$, to jest $L \dotplus L^\perp = V$. □

Korolar 5.4.5. *Neka je L potprostor konačnodimenzionalnog unitarnog prostora. Vrijedi*

$$(L^\perp)^\perp = L.$$

Dokaz. Neka je $x \in L$. Tada je $\langle x|y\rangle = 0$ za sve $y \in L^\perp$ pa slijedi i da je $x \in (L^\perp)^\perp$, dakle $L \subseteq (L^\perp)^\perp$.

S druge strane, za $x \in (L^\perp)^\perp$ prema propoziciji 5.4.4 vrijedi da je $x = a + b$ za $a \in L$ i $b \in L^\perp$. Kako je $\langle x|y\rangle = 0$ za sve $y \in L^\perp$, za $y = b$ imamo $\langle a + b|b\rangle = 0$, odnosno $\langle a|b\rangle + \langle b|b\rangle = 0$. Odatle je $\langle b|b\rangle = 0$ jer su a i b ortogonalni. Stoga $b = 0_V$ i $x = a \in L$, to jest $(L^\perp)^\perp \subseteq L$. □

Napomenimo da se suma međusobno ortogonalnih potprostora M i L zove *ortogonalna suma* i označava s $M \oplus L$. Dakle, prema propoziciji 5.4.4 imamo da je $L \oplus L^\perp = V$. Uočimo da je ortogonalni komplement uvijek jedinstven (za razliku od direktnog komplementa). Nadalje, kako se svaki vektor $x \in V$ može jedinstveno prikazali u obliku

$$x = x_L + x_{L^\perp},$$

gdje je $x_L \in L$ i $x_{L^\perp} \in L^\perp$, možemo definirati pridruživanje

$$V \ni x \mapsto x_L \in L.$$

To preslikavanje naziva se *ortogonalna projekcija* na potprostor L i označava s $p : V \to L$, a vektor $p(x) = x_L$ zovemo *ortogonalnom projekcijom* vektora x na potprostor L.

Prikaz bilo kojeg vektora u ONB prostora lako je izračunati jer koeficijenti u tom prikazu jednaki su njegovim skalarnim umnošcima s pojedinim vektorima iz ONB-a. Također, ortogonalnu projekciju vektora na potprostor možemo izravno izračunati ako već imamo ili odredimo neku ortonormiranu bazu tog potprostora. Zapravo smo još u postupku ortogonalizacije vidjeli kako se zadani vektor rastavlja u zbroj dvaju vektora, od kojih se jedan nalazi u potprostoru razapetom ortonormiranom bazom, a drugi je ortogonalan na taj potprostor.

Propozicija 5.4.6. *(a) Neka je $\{e_1, \ldots, e_n\}$ ortonormirana baza unitarnog prostora V. Tada vektor $x \in V$ ima u toj bazi prikaz*

$$x = \sum_{i=1}^{n} \langle x|e_i\rangle e_i.$$

(b) Neka je L potprostor konačnodimenzionalnog unitarnog prostora V i neka je $\{e_1, \ldots, e_\ell\}$ ortonormirana baza tog potprostora L. Ako je x bilo koji vektor prostora V, njegova ortogonalna projekcija $p(x) = x_L$ na potprostor L određena je s

$$x_L = \sum_{i=1}^{\ell} \langle x|e_i\rangle e_i.$$

Dokaz. (a) Za prikaz vektora x u ONB, kao što je već napisano u uvodu, dovoljno je skalarno pomnožiti linearnu kombinaciju $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ redom s vektorima e_j, $j = 1, 2, \ldots, n$ pa se dobije $x_i = \langle x|e_i\rangle$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

(b) Postupimo kao u 2. slučaju u dokazu propozicije 5.4.4. Bazu $\{e_1, \ldots, e_\ell\}$ potprostora L nadopunimo do ortonormirane baze $\{e_1, \ldots, e_\ell, e_{\ell+1}, \ldots, e_n\}$ prostora V, a onda je iz prikaza vektora x u toj bazi jasno da je upravo vektor $x_L = \sum_{i=1}^{\ell} \langle x|e_i\rangle e_i$ ortogonalna projekcija x na potprostor L. Naime, $x = x_L + (x - x_L)$ i pritom je $x_L \in L$, a $x - x_L$ ortogonalan na svaki vektor iz baze od L, time i ortogonalan na L. □

Kad raspolažemo pojmom udaljenosti vektora, možemo mjerenje udaljenosti proširiti i na udaljenost pojedinog vektora od različitih podskupova vektorskog prostora, najčešće potprostora. To odgovara poznatim pojmovima udaljenosti točke od pravca ili od ravnine u euklidskom prostoru. Uzmemo li, primjerice, neku točku T euklidskog prostora i ravninu Σ te promatramo vrijednosti $d(T, P)$ za sve točke P ravnine Σ, udaljenost $d(T, \Sigma)$ definiramo kao najmanju od svih tih vrijednosti. Udaljenost točke od ravnine shvaćamo, dakle, kao najkraću među udaljenostima točke T i svih točaka ravnine, a onda se pokazuje da se ta najmanja vrijednost postiže točno tad kad se izabere ortogonalna projekcija T' točke T na ravninu Σ.

Sasvim analogno postupa se općenito u metričkom prostoru (X, d). Udaljenost točke $T \in X$ od podskupa $Y \subseteq X$ definira se s

$$d(T, Y) = \inf\{d(T, P) \,:\, P \in Y\}.$$

Uzima se infimum, dakle najveća donja međa skupa brojeva $d(T, P)$ jer je taj skup svakako omeđen odozdo s 0, a općenito se infimum ne mora postići za neku određenu točku podskupa Y, tj. taj skup brojeva ne mora sadržavati najmanju vrijednost. Primjerice, u metričkom prostoru $\mathbb{R}^2$ (euklidskoj ravnini), uzmemo li otvoreni jedinični krug $K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x^2 + y^2 < 1\}$, udaljenost točke $T = (2, 0)$ od tog podskupa iznosi 1, ali ne postoji točka P skupa K takva da vrijedi $d(T, P) = 1$.

Sasvim analogno postupamo u normiranom i posebno unitarnom vektorskom prostoru $(V, \|\cdot\|)$ odnosno $(V, \langle\cdot|\cdot\rangle)$. Uglavnom nas zanima *udaljenost vektora* $a \in V$ *od* nekog *potprostora* $L \leq V$. Definira se

$$d(a, L) = \inf\{d(a, x) : x \in L\}.$$

Ako je V konačnodimenzionalni unitarni prostor, možemo biti sigurni da postoji najmanji realni broj u skupu vrijednosti $\{d(a, x) \,:\, x \in L\}$, a geometrijsko tumačenje najkraće udaljenosti vektora od potprostora potpuno odgovara onom u euklidskom prostoru. To je iskazano sljedećom propozicijom.

Propozicija 5.4.7. *Neka je L potprostor konačnodimenzionalnog unitarnog prostora V i $a \in V$. Tada je*

$$d(a, L) = d(a, a_L),$$

gdje je a_L ortogonalna projekcija vektora a na potprostor L.

Dokaz. Za $a \in V$ i $x \in L$ vrijedi

$$d(a, x) = \|a - x\| = \|a_L + a' - x\|,$$

pri čemu je $a = a_L + a'$ za $a_L \in L$ i $a' \in L^\perp$. Nadalje,

$$\|a_L + a' - x\| = \|\underbrace{a_L - x}_{\in L} + \underbrace{a'}_{\in L^\perp}\| \geq \|a'\| = \|a - a_L\|,$$

jer je $(a_L - x) \perp a'$ pa vrijedi $\|(a_L - x) + a'\|^2 = \|a_L - x\|^2 + \|a'\|^2 \geq \|a'\|^2$. ☐

Korolar 5.4.8. *Neka je L potprostor konačnodimenzionalnog unitarnog prostora V i $a \in V$. Vekotor $a \in L$ ako i samo ako je $d(a, L) = 0$.*

Dokaz. Ako je $a \in L$, onda je $0 \leq \inf\{d(a, x) : x \in L\} \leq d(a, a) = 0$ pa je $d(a, L) = 0$.
Ako je $a \notin L$, iz $a \neq a_L$ $d(a, L) = d(a, a_L)$ (propozicija 5.4.7) slijedi $d(a, L) > 0$. ☐

Korolar 5.4.9. *Neka je L potprostor unitarnog prostora V i $a \in V$. Tada je*

$$d(a, L^\perp) = \|a_L\|,$$

gdje je a_L ortogonalna projekcija vektora a na potprostor L.

Dokaz. Prema propoziciji 5.4.7 je

$$d(a, L^\perp) = d(a, a_{L^\perp}),$$

gdje je $a_{L^\perp}$ ortogonalna projekcija vektora a na potprostor $L^\perp$. Zbog jedinstvenosti prikaza $a = a_L + a'$ za $a_L \in L$ i $a' \in L^\perp$ (propozicija 5.4.4) je $a' = a_{L^\perp}$, pa je

$$d(a, a_{L^\perp}) = d(a, a') = \|a - a'\| = \|a_L\|.$$

☐

Primjer 5.11. *Odredimo udaljenost vektora $a = (-3, 7, 4, 0)$ od potprostora*

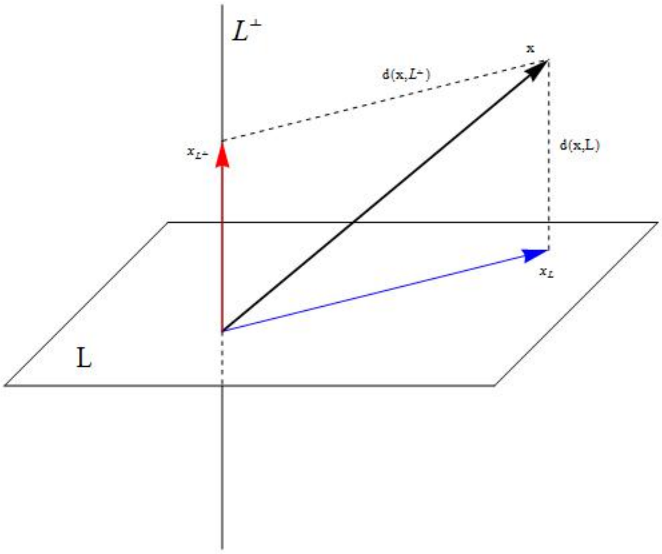
$$L = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) : x_1 = x_2 = x_3 = x_4\} \leq \mathbb{R}^4.$$

Rješenje. Uočimo da je $L = [b]$ za $b = (1, 1, 1, 1)$. Vrijedi da je $d(a, L) = \|a - a_L\|$, gdje je a_L ortogonalna projekcija vektora a na potprostor L. Za vektor a_L vrijedi

$$a_L = \langle a|e_1\rangle e_1,$$

gdje je $\{e_1\}$ ortonormirana baza potprostora L, to jest $e_1 = \frac{b}{\|b\|} = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. Stoga je $a_L = (2, 2, 2, 2)$ i

$$d(a, L) = \sqrt{(-3-2)^2 + (7-2)^2 + (4-2)^2 + (0-2)^2} = \sqrt{58}.$$



Slika 5.4: Udaljenost vektora x od potprostora L i $L^{\perp}$

Možemo riješiti zadatak i na drugi način. Vrijedi

$$d(a, L) = \inf\{\|(-3, 7, 4, 0) - (\lambda, \lambda, \lambda, \lambda)\| \,:\, \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

Funkcija

$$f(\lambda) = \|(-3, 7, 4, 0) - (\lambda, \lambda, \lambda, \lambda)\|^2 = 4\lambda^2 - 16\lambda + 74$$

postiže minimum za $\lambda = 2$, $f(2) = 58$ pa je $d(a, L) = \sqrt{f(2)} = \sqrt{58}$. ♡

Napomena 5.4.10. *Naglasimo još jedanput da propozicija 5.4.7 pokazuje da se u konačnodimenzionalnom unitarnom prostoru udaljenost bilo kojeg vektora a od potprostora L* efektivno postiže, *to jest da je infimum iz definicije $d(a, L)$ zapravo i najmanja vrijednost među svim udaljenostima vektora a i pojedinih vektora iz potprostora L. Svojstvo konačnodimenzionalnosti ovdje je važno za primjenu propozicije 5.4.7. U unitarnom prostoru koji nije konačnodimenzionalan to svojstvo ne vrijedi općenito.*

Napomena 5.4.11. *Propozicija 5.4.7 govori da je ortogonalna projekcija vektora na potprostor njemu najbliži vektor u tom potprostoru. Ta se činjenica koristi za određivanje najbolje aproksimacije vektora pomoću vektora iz nekog potprostora koji se odlikuje određenim posebnim svojstvom. U primjeru 5.11 to je potprostor $L = [(1, 1, 1, 1)]$ u kojem svi vektori imaju jednake koordinate, a vektoru $a = (-3, 7, 4, 0)$ najbliži je u tom potprostoru vektor $a_L = (2, 2, 2, 2)$. Nije slučajnost da je skalar 2 upravo aritmetička sredina koordinata vektora a. Tu činjenicu nije teško pokazati općenito za vektor $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ i njegovu „najbolju aproksimaciju" vektorom kojem su sve koordinate jednake.*

Primijetimo još da se ortogonalni komplement potprostora L u ovom primjeru sastoji od svih vektora kojima je zbroj koordinata jednak 0. Najbolja aproksimacija vektora $a = (-3, 7, 4, 0)$ takvim vektorom stoga je vektor $a - a_L = (-5, 5, 2, -2)$.

U sljedećim zadacima vidjet ćemo još neke primjere najboljih aproksimacija pomoću ortogonalne projekcije na posebni potprostor.

Zadatak 5.7. *U Linearnoj algebri 1 važan primjer rastava vektorskog prostora u direktnu sumu potprostora bio je rastav prostora kvadratnih matrica $M_n(\mathbb{R})$ kao sume potprostora simetričnih i antisimetričnih matrica.*

(a) Provjerite da je ta suma ujedno ortogonalna suma potprostora, uz standardni skalarni produkt.

(b) Odredite simetričnu i antisimetričnu matricu koje su najbliže matrici $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ u odgovarajućim potprostorima te usporedite udaljenosti matrice A od obaja potprostora. (Pritom, budući da znamo jednostavni rastav kvadratne matrice kao zbroj simetrične i antisimetrične matrice, nije potrebno posebno izračunavati ortogonalne projekcije pomoću ortonormiranih baza.)

(c) Odredite neku matricu iz prostora $M_2(\mathbb{R})$, različitu od nulmatrice, koja je jednako udaljena od potprostora simetričnih i antisimetričnih matrica.

Zadatak 5.8. *Odredite najbolju aproksimaciju funkcije $f(x) = \sin x$ pomoću polinoma stupnja najviše 3 u unitarnom prostoru neprekidnih funkcija na segmentu $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ sa standardnim skalarnim produktom. (Prostor nije konačnodimenzionalan, ali dovoljno je promatrati potprostor razapet funkcijom f i polinomima stupnja najviše 3.)*

Zadatak 5.9. *Neka je V unitarni prostor i L njegov potprostor. Pretpostavimo da je a takav vektor da za normu njegove ortogonalne projekcije a' na L vrijedi $\|a'\| \leq 5/2$, a za normu njegove ortogonalne projekcije a'' na $L^\perp$ vrijedi $\|a''\| \leq 3/2$. Kolika može biti najveća vrijednost $\|a\|$? Obrazložite.*

Zadatak 5.10. *Neka je (e_1, e_2, e_3, e_4) ortonormirana baza realnog unitarnog prostora V i neka je $a \in V$ takav da udaljenost a od svakog od potprostora $[\{e_i, e_j\}]$, $1 \leq i < j \leq 4$, iznosi 3. Izračunajte normu vektora a.*

Zadatak 5.11. *Za $L = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \, : \, x_1 - x_2 = x_3 - x_4 = 0\} < \mathbb{R}^4$ odredite skup $S = \{x \in \mathbb{R}^4 \, : \, d(x, L) = d(x, L^\perp)\}$. Je li S potprostor od $\mathbb{R}^4$? Obrazložite.*

POGLAVLJE 6

LINEARNI OPERATORI

6.1 Definicija i osnovna svojstva linearnog operatora

U proučavanju matematičkih struktura posebno važnu ulogu redovito imaju preslikavanja koja su karakteristična za te strukture time što su „usklađena" s operacijama i relacijama na tim strukturama. Kod vektorskih prostora takva preslikavanja nazivaju se *linearni operatori.* Izraz *operator* tradicionalno se upotrebljava za preslikavanje u kontekstu vektorskih prostora. Uz brojne i raznovrsne primjere uvjerit ćemo se da su mnoga otprije nam poznata preslikavanja, zapravo linearni operatori kad ih promatramo na odgovarajućim vektorskim prostorima. Taj pristup omogućit će nam da lakše uočimo zajednička svojstva takvih preslikavanja i da naučimo kako ih korisno primjenjivati.

Linearne operatore najčešće ćemo označavati velikim slovima poput A, B, C ..., ali sama oznaka za neko preslikavanje, bila ona A, B ili uobičajeno f, g, neće podrazumijevati da je riječ o linearnom operatoru ako se to izričito ne pretpostavi.

Definicija 6.1.1. *Neka su V i W vektorski prostori nad istim poljem $\mathbb{F}$. Preslikavanje*

$$A : V \to W$$

naziva se ***linearni operator*** *s V u W ako vrijede svojstva*

(1) $A(a + b) = A(a) + A(b)$, (aditivnost)

(2) $A(\alpha a) = \alpha A(a)$, (homogenost)

za sve $a, b \in V$, $\alpha \in \mathbb{F}$. Skup svih linearnih operatora s V u W označavat ćemo s $\mathcal{L}(V, W)$.

Uočimo da je pretpostavka da su V i W vektorski prostori nad istim poljem važna zato što u svojstvu homogenosti (2) na lijevoj strani imamo množenje skalarom vektora iz V, a na desnoj množenje istim skalarom vektora iz W. Nadalje, moguće je, dakako, da isti prostor V bude i domena i kodomena linearnog operatora. U tom slučaju skup svih linearnih operatora s V u V označavamo jednostavno s $\mathcal{L}(V)$. Primijetimo i to da iz same definicije još ne vidimo postoji li uvijek za bilo koje vektorske prostore V i W nad istim poljem neki linearni operator s V u W, ali to će uskoro postati jasno iz nekih jednostavnih primjera.

Korisno je uočiti da su svojstva aditivnosti i homogenosti, uzeta zajedno, ekvivalentna svojstvu

(3) $A(\alpha a + \beta b) = \alpha A(a) + \beta A(b)$. (linearnost)

Provjerite sami da iz svojstava (1) i (2) slijedi (3) i obrnuto!

Dakle, $A : V \to W$ je linearni operator ako i samo ako vrijedi svojstvo (3) za sve $a, b \in V$, $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$. Nadalje, svaki linearni operator linearnu kombinaciju vektora preslikava u linearnu kombinaciju slika tih vektora, i to s jednakim koeficijentima. To znači da vrijedi

$$A(\sum_{i=1}^{k} \alpha_i a_i) = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i A(a_i),$$

što se lako pokazuje matematičkom indukcijom po broju vektora (k). (Učinite to!)

Propozicija 6.1.2. *Neka je $A : V \to W$ linearni operator. Tada je*

(i) $A(0_V) = 0_W$,

(ii) $A(-a) = -A(a)$, *za sve $a \in V$.*

Dokaz. Pokažimo svojstvo (i),

$$A(0_V) = A(0_V + 0_V) = \{\text{aditivnost}\} = A(0_V) + A(0_V),$$

pa je $A(0_V) = 0_W$.

Svojstvo (ii) slijedi zbog svojstva homogenosti za $\alpha = -1$. To svojstvo možemo dokazati i bez primjene homogenosti ako se poslužimo već dokazanim svojstvom (i). Naime, za bilo koji a iz V imamo

$$A(a + (-a)) = A(a) + A(-a)$$

pa s obzirom na to da je

$$A(a + (-a)) = A(0_V) = 0_W,$$

vrijedi $A(a) + A(-a) = 0_W$, odakle slijedi da je $A(-a) = -A(a)$, suprotni vektor u grupi $(W, +)$. □

Primjer 6.1. *Nuloperator.* Neka su V i W vektorski prostori nad poljem $\mathbb{F}$ te $c \in W$. Konstantno preslikavaje

$$C : V \to W, \quad C(x) = c, \quad \forall x \in V,$$

linearni je operator ako i samo ako je $c = 0_W$. Zaista, ako je C linearni operator, tvrdnja slijedi izravno iz propozicije 6.1.2(i), a obrat provjerom svojstava iz definicije linearnog operatora.

Konstantno preslikavanje koje svakom vektoru iz V pridružuje nulvektor prostora W je linearni operator koji nazivamo *nuloperator s V u W*.

$\heartsuit$

Spomenuli smo da postojanje linearnog operatora nije očito iz same definicije, 6.1.1. Iz primjera 6.1 zaključujemo da skup $\mathcal{L}(V, W)$ sadrži nuloperator, odnosno $\mathcal{L}(V, W)$ je neprazan za bilo koja dva vektorska prostora V i W nad istim poljem. Uskoro ćemo vidjeti (u primjerima) da je skup $\mathcal{L}(V, W)$ zapravo znatno „bogatiji" čim kodomena W nije trivijalni prostor koji sadrži samo nulvektor. No nuloperator je jedini univerzalni primjer linearnog operatora kojem su domena i kodomena bilo kojih dvaju vektorskih prostora nad istim poljem.

Na temelju definicije 6.1.1 riješite sljedeći zadatak.

Zadatak 6.1. *Neka su V i W vektorski prostori nad poljem $\mathbb{F}$, $A \in \mathcal{L}(V, W)$ i $\{a_1, \ldots, a_n\}$ linearno zavisan podskup prostora V. Dokažite da je onda i $\{A(a_1), \ldots, A(a_n)\}$ linearno zavisan podskup prostora W.*

Navedimo još dvije propozicije koje pokazuju da se svojstvo linearnosti operatora „dobro ponaša" s obzirom na kompoziciju preslikavanja, a u slučaju kad je linearni operator bijektivan, svojstvo linearnosti ima i inverzni operator.

Propozicija 6.1.3. *Kompozicija linearnih operatora je linearni operator.*

Dokaz. Neka su $A : U \to V$ i $B : V \to W$ linearni operatori. Tada za preslikavanje $B \circ A : U \to W$ vrijedi

$$\begin{aligned}(B \circ A)(\alpha a + \beta b) &= B(A(\alpha a + \beta b)) = \{A \text{ je l.o.}\} = B(\alpha A(a) + \beta A(b)) \\ &= \{B \text{ je l.o.}\} = \alpha B(A(a)) + \beta B(A(b)) = \alpha (B \circ A)(a) + \beta (B \circ A)(b).\end{aligned}$$

$\square$

Propozicija 6.1.4. *Neka je $A : V \to W$ bijektivni linearni operator. Tada je njegov inverz $A^{-1} : W \to V$ također linearni operator.*

Dokaz. Neka su $y_1, y_2 \in W$ te $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{F}$. Tada postoje jedinstveni $x_1, x_2 \in V$ za koje je $A(x_i) = y_i$, odnosno $x_i = A^{-1}(y_i)$ za $i = 1, 2$. Vrijedi

$$\begin{aligned} A^{-1}(\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_1) &= A^{-1}(\alpha_1 A(x_1) + \alpha_2 A(x_2)) = \{A \text{ je l.o.}\} = \underbrace{A^{-1}A}_{=I}(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) \\ &= \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 = \alpha_1 A^{-1}(y_1) + \alpha_2 A^{-1}(y_2). \end{aligned}$$

□

Kod (linearnih) operatora uobičajen je izraz da operator A *djeluje na vektor* $x \in V$ tako da mu pridruži vektor $y \in W$. To samo znači da $A(x) = y$.

Primjerice, nuloperator djeluje tako da svakom vektoru pridruži nulvektor. Skalarni operator djeluje tako da svaki vektor pomnoži zadanim skalarom.

6.2 Primjeri linearnih operatora

Primjer 6.2. *Skalarni operator.* Neka je V vektorski prostor nad poljem $\mathbb{F}$ te $\lambda \in F$. Preslikavanje $A : V \to V$ dano s

$$A(x) = \lambda x$$

je linearni operator. Zaista, zbog svojstava operacije množenja skalarom u vektorskom prostoru te komutativnosti množenja u polju vrijedi

$$\begin{aligned} A(\alpha x + \beta y) &= \lambda(\alpha x + \beta y) = \lambda(\alpha x) + \lambda(\beta y) = (\lambda\alpha)x + (\lambda\beta)y = (\alpha\lambda)x + (\beta\lambda)y \\ &= \alpha(\lambda x) + \beta(\lambda y) = \alpha A(x) + \beta A(y). \end{aligned}$$

Operator A naziva se *skalarni operator s koeficijentom* λ.

Posebno za $\lambda = 0$ imamo operator koji svaki vektor iz V preslikava u nulvektor, to jest $A(x) = 0_V$, odnosno *nuloperator*, o kojem je već bilo govora u primjeru 6.1.

Za $\lambda = 1$ operator se naziva *jedinični operator* ili *identiteta* i označava s $I : V \to V$, $I(x) = x$, za svaki $x \in V$.

♡

Prethodni primjer u slučaju prostora $V^2(O)$ i $\lambda \neq 0$ opisuje poznatu nam *homotetiju euklidske ravnine*, sa središtem u odabranom ishodištu O i s koeficijentom λ. U primjeru 6.5 vidjet ćemo da su još neka poznata preslikavanja euklidske ravnine i prostora, promatrana kao preslikavanja odgovarajućih prostora radijvektora, također linearni operatori na tim prostorima.

Primjer 6.3. *Skalarno množenje.* Neka je $(V, \langle\cdot|\cdot\rangle)$ unitarni prostor nad poljem $\mathbb{F}$ te a neki vektor iz V. Preslikavanje

$$S : V \to \mathbb{F}, \quad S(x) = \langle x|a\rangle, \quad \forall x \in V,$$

je linearni operator, što slijedi direktno iz svojstava (3) i (4) definicije 5.1.1, odnosno iz svojstava homogenosti i aditivnosti skalarnog produkta. Je li i preslikavanje $x \mapsto \langle a|x\rangle$ linearni operator s V u $\mathbb{F}$?

♡

Primjer 6.4. *Vektorsko množenje.* Neka je $\vec{a}$ vektor iz prostora V^3. Preslikavanje

$$C : V^3 \to V^3, \quad C(\vec{x}) = \vec{x} \times \vec{a}, \quad \forall \vec{x} \in V^3,$$

je linearni operator zbog svojstava kvaziasocijativnosti i distributivnosti prema zbrajanju operacije vektorskog množenja. Je li i preslikavanje $\vec{x} \mapsto \vec{a} \times \vec{x}$ linearni operator na V^3? $\heartsuit$

Primjer 6.5. *Transformacije ravnine.* Na kolegiju *Analitička geometrija* obrađene su neke geometrijske transformacije ravnine kao što su osna simetrija (zrcaljenje), centralna simetrija, rotacija i translacija. Sada ćemo ustanoviti da su neka od navedenih preslikavanja linearni operatori. Napomenimo da ćemo ta preslikavanja shvatiti kao preslikavanja s $V^2(O)$ u $V^2(O)$, to jest na prostoru radijvektora, umjesto na euklidskom prostoru E^2. Naglasimo da su pravci kroz ishodište O tada jednodimenzionalni potprostori. Analogno vrijedi i za $V^3(O)$ gdje su ravnine kroz ishodište O dvodimenzionalni potprostori.

(a) Neka je $Z : V^2(O) \to V^2(O)$ *zrcaljenje*, to jest *osna simetrija* s obzirom na pravac kroz ishodište $y = kx$. Tada je

$$\frac{Z(\vec{v}) + \vec{v}}{2} = \vec{p},$$

gdje je $\vec{p}$ ortogonalna projekcija na pravac $y = kx$, odnosno na vektor $\vec{s} = (1, k) = \vec{i} + k\vec{j}$. Dakle,

$$\vec{p} = \frac{\vec{s} \cdot \vec{v}}{|\vec{s}|^2}\,\vec{s},$$

odnosno

$$Z(\vec{v}) = 2\frac{\vec{s} \cdot \vec{v}}{|\vec{s}|^2}\,\vec{s} - \vec{v}. \tag{6.1}$$

Zapis zrcaljenja je jednostavniji ako umjesto vektora $\vec{s}$ upotrijebimo jedinični vektor, odnosno njemu normirani vektor $\vec{s_0} = \frac{\vec{s}}{|\vec{s}|}$:

$$Z(\vec{v}) = 2(\vec{s_0} \cdot \vec{v})\vec{s_0} - \vec{v}.$$

Zbog svojstava u unitarnom prostoru $V^2(O)$ vrijedi

$$Z(\vec{v} + \vec{w}) = 2(\vec{s_0} \cdot (\vec{v} + \vec{w}))\vec{s_0} - (\vec{v} + \vec{w}) = 2(\vec{s_0} \cdot \vec{v})\vec{s_0} + 2(\vec{s_0} \cdot \vec{w})\vec{s_0} - \vec{v} - \vec{w} = Z(\vec{v}) + Z(\vec{w}),$$

te

$$Z(\alpha\vec{v}) = 2(\vec{s_0} \cdot (\alpha\vec{v}))\vec{s_0} - (\alpha\vec{v}) = 2\alpha(\vec{s_0} \cdot \vec{v})\vec{s_0} - (\alpha\vec{v}) = \alpha((2\vec{s_0} \cdot \vec{v})\vec{s_0} - \vec{v}) = \alpha Z(\vec{v}),$$

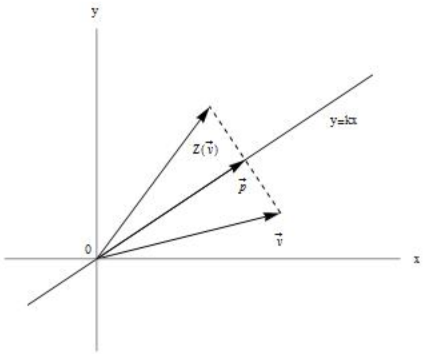
za sve $\vec{v}, \vec{w} \in V^2(O)$ i $\alpha \in \mathbb{R}$. Dakle, Z je linearni operator. (Prisjetite se koja su svojstva operacija u $V^2(O)$ potrebna da bi se pokazale prethodne dvije jednakosti.)

Za $\vec{v} = (a, b) = a\vec{i} + b\vec{j}$ iz (6.1) dobivamo sljedeću formulu

$$Z(a\vec{i} + b\vec{j}) = \frac{(1 - k^2)a + 2kb}{1 + k^2}\vec{i} + \frac{2ka + (k^2 - 1)b}{1 + k^2}\vec{j}. \tag{6.2}$$

Zrcaljenje s obzirom na x-os (to jest za $k = 0$) dano je s

$$Z_x(a\vec{i} + b\vec{j}) = a\vec{i} - b\vec{j},$$

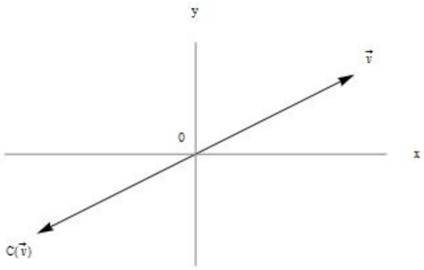


Slika 6.1: Zrcaljenje s obzirom na pravac $y = kx$

a s obzirom na y-os (što možemo shvatiti kao limes kad k teži u ∞) s

$$Z_y(a\vec{i} + b\vec{j}) = -a\vec{i} + b\vec{j}.$$

(b) *Centralna simetrija* s obzirom na ishodište je preslikavanje $C : V^2(O) \to V^2(O)$, $C(\vec{v}) = -\vec{v}$. Očito je i C linearni operator. Specijalno, to je homotetija s koeficijentom -1.



Slika 6.2: Centralna simetrija s obzirom na ishodište

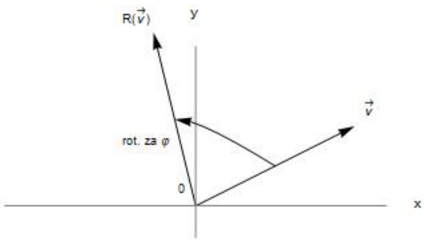
(c) *Rotacija* oko ishodišta za kut φ u pozitivnom smjeru (obrnuto smjeru kazaljke na satu) je preslikavanje $R_\varphi : V^2(O) \to V^2(O)$,

$$R_\varphi(a\vec{i} + b\vec{j}) = (a\cos\varphi - b\sin\varphi)\vec{i} + (a\sin\varphi + b\cos\varphi)\vec{j}. \tag{6.3}$$

Rotaciju smo mogli zapisati i u obliku

$$R_\varphi(\vec{v}) = (\vec{v} \cdot \vec{r_1})\vec{i} + (\vec{v} \cdot \vec{r_2})\vec{j},$$

gdje su $\vec{r_1} = (\cos\varphi)\vec{i} + (-\sin\varphi)\vec{j}$ i $\vec{r_2} = (\sin\varphi)\vec{i} + (\cos\varphi)\vec{j}$. Iz tog oblika rotacije lako možemo zaključiti da je R_φ linearni operator. Zaista, skalarni produkt je homogena i aditivna operacija (ili vidi primjer 6.3), a operacija množenja vektora skalarom zadovoljava svojstva kvaziasocijativnosti i distributivnosti prema zbrajanju vektora.



Slika 6.3: Rotacija oko ishodišta za kut φ

Uočimo da je rotacija za kut $\varphi = \pi$ jednaka centralnoj simetriji, $R_\pi = C$, dok je rotacija za kut $\varphi = 2\pi$ identiteta, $R_{2\pi} = I$.

(d) *Translacija* za vektor $\vec{u} \neq \vec{0}$ je preslikavanje $T : V^2(O) \to V^2(O)$, $T(\vec{v}) = \vec{v} + \vec{u}$. Kada bi T bio linearni operator, prema propoziciji 6.1.2 trebalo bi vrijediti $T(\vec{0}) = \vec{0}$, no $T(\vec{0}) = \vec{u} \neq \vec{0}$. Dakle, translacija T **nije** linearni operator, osim u trivijalnom slučaju kada je $\vec{u} = \vec{0}$ i $T = I$ (identiteta).

Općenito, uvijek trebati pripaziti ostavlja li pojedina transformacija ishodište čvrstim (tj. preslikava li ishodište O u sebe) kako bi pripadno preslikavanje radijvektora preslikavalo nulvektor sam u sebe, što je nužan uvjet za linearni operator (ali ne i dovoljan).

♡

Primjer 6.6. Neka je A matrica tipa (m,n) s elementima iz polja $\mathbb{F}$, to jest $A \in M_{m,n}(\mathbb{F})$. Preslikavanje $L : M_{n,1}(\mathbb{F}) \to M_{m,1}(\mathbb{F})$ dano s

$$L(X) = AX$$

očito je linearni operator jer je množenje matrica kvaziasocijativno i distributivno prema zbrajanju matrica. No vrijedi i više. Uskoro ćemo pokazati da se djelovanje svakog linearnog operatora čija su domena i kodomena konačnodimenzionalni vektorski prostori može reprezentirati kao umnožak odgovarajuće matrice i stupčane matrice (vektora).

♡

Primjer 6.7. Neka su $a, b \in \mathbb{R}$. Realna funkcija realne varijable, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, oblika $f(x) = ax + b$ naziva se *linearna funkcija*. Budući da se svako polje može shvatiti i kao vektorski prostor nad samim sobom, možemo se pitati je li linearna funkcija f ujedno linearni operator. Očito to neće biti za $b \neq 0$. Zaista, $f(0) = b \neq 0$, pa nije ispunjen uvjet iz propozicije 6.1.2 za linearni operator. Dakle, funkcija oblika $f(x) = ax + b$ jest linearni operator ako i samo ako je $b = 0$. Funkcija $x \mapsto ax + b$, $b \neq 0$, ubraja se među tzv. *afine funkcije*, a možemo na nju gledati i kao kompoziciju linearnog operatora i translacije.

♡

Primjer 6.8. *Deriviranje i integriranje na prostoru polinoma.* Neka je $\mathcal{P}$ prostor polinoma. Preslikavanje $D : \mathcal{P} \to \mathcal{P}$ svakom polinomu pridružuje njegovu derivaciju, odnosno $D(p) = p'$. Ako je $p(t) = \sum_{k=0}^{n} a_k t^k$, $n \geq 1$, tada je

$$(D(p))(t) = \sum_{k=1}^{n} k a_k t^{k-1},$$

a za $p(t) = a_0$ je

$$(D(p))(t) = 0.$$

Zbog svojstava deriviranja (ili izravnom provjerom prethodne formule) slijedi da je D linearni operator koji nazivamo *operator deriviranja.* U ovom kolegiju ograničili smo se samo na rad s konačnodimenzionalnim vektorskim prostorima, pa ćemo operator deriviranja uglavnom promatrati kao preslikavanje $D : \mathcal{P}_n \to \mathcal{P}_{n-1}$.

Slično, preslikavanje $S : \mathcal{P} \to \mathcal{P}$ svakom polinomu pridružuje njegov integral,

$$(S(p))(t) = \int_0^t p(\tau)d\tau,$$

odnosno za $p(t) = \sum_{k=0}^n a_k t^k$,

$$(S(p))(t) = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k+1} a_k t^{k+1}$$

je linearni operator koji nazivamo *operator integriranja.* Uglavnom ćemo se baviti njegovom restrikcijom $S : \mathcal{P}_n \to \mathcal{P}_{n+1}$.

♡

Primjer 6.9. *Kompleksno konjugiranje.* Prisjetimo se, polje kompleksnih brojeva $\mathbb{C}$ možemo shvatiti kao vektorski prostor nad samim sobom, ali i kao vektorski prostor nad poljem $\mathbb{R}$ koji označavamo s $\mathbb{C}_\mathbb{R}$. Neka je $K : \mathbb{C}_\mathbb{R} \to \mathbb{C}_\mathbb{R}$ preslikavanje koje svakom kompleksnom broju pridružuje njegov konjugirano kompleksni broj, to jest $K(z) = \overline{z}$. Za $z, w \in \mathbb{C}$ i $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ vrijedi

$$K(\alpha z+\beta w) = \overline{\alpha z + \beta w} = \overline{\alpha z}+\overline{\beta w} = \overline{\alpha}\,\overline{z}+\overline{\beta}\,\overline{w} = \{\alpha, \beta \in \mathbb{R}\} = \alpha\,\overline{z}+\beta\,\overline{w} = \alpha K(z)+\beta K(w),$$

pa je K linearni operator.

Uvjerite se da $K : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $K(z) = \overline{z}$, nije linearni operator.

♡

Navedimo i neka preslikavanja čiju smo važnost dosad mogli uočiti u linearnoj algebri, a koja nisu linearni operatori.

Primjer 6.10. *Determinanta.* Preslikavanje $\det : M_n(\mathbb{F}) \to \mathbb{F}$ koje kvadratnoj matrici A pridružuje skalar $\det A$ nije linearni operator, čim je $n > 1$. Ponajprije, svojstvo aditivnosti ne vrijedi. Uvjerite se sami da postoje takve matrice A i B za koje $\det(A+B)$ nije jednako $\det A + \det B$. Zašto ne vrijedi ni svojstvo homogenosti?

♡

Primjer 6.11. *Norma.* U normiranom vektorskom prostoru $(V, \|\cdot\|)$ preslikavanje $V \to \mathbb{R}$ koje vektoru a pridružuje $\|a\|$ nije linearni operator osim u trivijalnom slučaju kada V sadrži samo nulvektor. (Zašto?)

♡

6.3 Zadavanje linearnog operatora djelovanjem na bazu. Matrični prikaz.

U ovom odsječku pretpostavljamo da su V i W konačnodimenzionalni vektorski prostori nad istim poljem $\mathbb{F}$. Sljedećom tvrdnjom pokazat ćemo važnu činjenicu da je *svaki linearni operator s V u W jednoznačno zadan svojim djelovanjem na (bilo kojoj) bazi prostora V.*

Propozicija 6.3.1. *Neka je $(e) = \{e_1, \dots, e_n\}$ baza prostora V te $b_1, \dots, b_n$ vektori iz prostora W, ne nužno različiti. Tada postoji jedinstven linearni operator $A : V \to W$ za koji vrijedi*

$$A(e_i) = b_i,\ i = 1, \dots, n.$$

Dokaz. Iz uvjeta postavljenih na traženo preslikavanje $A : V \to W$, dakle da to bude linearni operator koji vektore odabrane baze prostora V preslikava redom u (po volji) zadane vektore prostora W, možemo lako ustanoviti kako bi A morao djelovati na *svaki* vektor iz prostora V.

Ako vektor $x \in V$ ima prikaz

$$x = \alpha_1 e_1 + \cdots + \alpha_n e_n,$$

u zadanoj bazi (e), za linearni operator A vrijedi

$$A(x) = A(\alpha_1 e_1 + \cdots + \alpha_n e_n) = \alpha_1 A(e_1) + \cdots + \alpha_n A(e_n) = \alpha_1 b_1 + \cdots + \alpha_n b_n. \quad (6.4)$$

Budući da je prikaz vektora u bazi jedinstven, formulom (6.4) na jednoznačan način zadano je jedno preslikavanje $V \to W$. Kaže se da je to preslikavanje zadano *proširenjem po linearnosti* s djelovanja na bazu do djelovanja na cijelom prostoru V.

Preostaje samo provjeriti da je tako zadano preslikavanje linearni operator. (Uočimo da zasad znamo da je nužno da linearni operator koji ima tražena svojstva, ako postoji, djeluje baš na taj način, ali da to samo po sebi još ne znači da je preslikavanje A linearno.) Bude li to ispunjeno, preslikavanje A bit će i jedinstveni linearni operator s traženim svojstvom s obzirom na to da je preslikavanje (funkcija) općenito jednoznačno zadano svojom domenom, kodomenom i djelovanjem na svaki element domene. Neka su $x, y \in V$, pri čemu su

$$x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i,\ y = \sum_{i=1}^{n} \beta_i e_i,$$

njihovi jedinstveni prikazi u bazi $\{e_1, \dots, e_n\}$. Prema definiciji preslikavanja A je

$$A(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i b_i,\ A(y) = \sum_{i=1}^{n} \beta_i b_i.$$

Vrijedi

$$A(x+y) = A(\sum_{i=1}^{n}(\alpha_i+\beta_i)e_i) = \{\text{def. od } A\} = \sum_{i=1}^{n}(\alpha_i+\beta_i)b_i = \sum_{i=1}^{n}\alpha_i b_i + \sum_{i=1}^{n}\beta_i b_i = A(x)+A(y)$$

te za $\lambda \in \mathbb{F}$

$$A(\lambda x) = A(\sum_{i=1}^{n}(\lambda\alpha_i)e_i) = \{\text{def. od } A\} = \sum_{i=1}^{n}(\lambda\alpha_i)b_i = \lambda\sum_{i=1}^{n}\alpha_i b_i = \lambda A(x).$$

Dakle, A zadovoljava svojstva aditivnosti i homogenosti, odnosno A je linearni operator. $\square$

Zahvaljujući tvrdnji propozicije 6.3.1, linearni operator možemo identificirati kao neki poznati nam operator već na temelju njegova djelovanja na bilo koju bazu. Primjerice, na prostoru $V^2(O)$ postoji beskonačno mnogo preslikavanja koja dva fiksna nekolinearna vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ preslikavaju u vektore $\vec{a'}$ i $\vec{b'}$ takve da je $\|\vec{a'}\| = \|\vec{a}\|$, $\|\vec{b'}\| = \|\vec{b}\|$ i $\angle(\vec{a},\vec{a'}) = \angle(\vec{b},\vec{b'}) = \pi/3$. No postoji jedan jedini *linearni operator* na tom prostoru koji tako djeluje na vektore $\vec{a}$ i $\vec{b}$. To je operator rotacije za kut $\pi/3$ i on svaki vektor tog prostora preslikava u vektor dobiven njegovom rotacijom za isti kut.

Slično, ako neki *linearni* operator na prostoru $\mathcal{P}_2$ (polinoma stupnja najviše 2) djeluje tako da polinomu $t - t^2$ pridružuje polinom $1 - 2t$, polinomu $t + t^2$ pridružuje polinom $1 + 2t$, a polinomu $3 + 2t + t^2$ pridružuje $2 + 2t$, taj je operator nužno operator deriviranja (jer na elemente jedne baze djeluje kao operator deriviranja).

Na temelju prethodne propozicije 6.3.1 uvest ćemo sada matrični prikaz linearnog operatora. Taj prikaz bit će posebno praktičan za račune koji obuhvaćaju djelovanje linearnih operatora, a pritom će se steći i potpuniji uvid u međusobnu povezanost linearnih operatora, matrica i sustava linearnih jednadžbi. Ovdje pretpostavljamo da su V i W konačnodimenzionalni vektorski prostori, $\dim V = n \geq 1$, $\dim W = m \geq 1$, nad istim poljem $\mathbb{F}$. Nije isključeno da se V i W podudaraju, no u slučaju $V = W$ moguć je izbor različitih baza za V kao domenu i za V kao kodomenu linearnog operatora.

Uočimo da propozicija 6.3.1 pokazuje da je djelovanje linearnog operatora, uz navedene pretpostavke, jednoznačno određeno s mn skalara, čim su izabrane baze za V i W. Naime, linearni operator je zadan slikama vektora baze domene V, a to je n vektora iz prostora W od kojih je svaki određen s m koeficijenta u svojem prikazu u bazi prostora W. Tih mn skalara bit će raspoređeno u m redaka i n stupaca matrice na način kako slijedi.

Neka je $A : V \to W$ linearni operator,

$$(e) = \{e_1, \ldots, e_n\}$$

baza za V te

$$(f) = \{f_1, \ldots, f_m\}$$

baza za W. Iako smo bazu definirali kao podskup, npr. $\{e_1, \ldots, e_n\}$, podrazumijevat ćemo da se radi o uređenom skupu, dakle o n-torki $(e_1, \ldots, e_n)$ u kojoj je poredak važan. Ustanovili smo da je linearni operator jedinstveno određen svojim djelovanjem na bazi, to jest da je određen vektorima $A(e_1), \ldots, A(e_n)$ iz W. Svaki od tih vektora jedinstveno prikazujemo u bazi (f). Dakle, za vektor $A(e_j)$, $1 \leq j \leq n$, postoje jedinstveni skalari $\alpha_{1j}, \alpha_{2j}, \ldots, \alpha_{mj}$ takvi da je

$$A(e_j) = \alpha_{1j}f_1 + \alpha_{2j}f_2 + \cdots + \alpha_{mj}f_m.$$

Oznake koeficijenata ovdje su prilagođene zapisu matrice tipa (m, n) tako da u j-tom stupcu budu upisani koeficijenti u prikazu vektora $A(e_j)$ u bazi (f). Time smo linearnom operatoru A na jednoznačan način pridružili matricu

$$[A]_{(f,e)} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ \alpha_{m1} & \cdots & \alpha_{mn} \end{pmatrix}.$$

Matrica $[A]_{(f,e)}$ naziva se *matrica linearnog operatora* A u paru baza (e) i (f), odnosno *matrični zapis (prikaz ili reprezentacija) linearnog operatora* A u paru baza (e) i (f). Naglasimo da matrični zapis linearnog operatora A bitno ovisi o izboru para baza (e) i (f). Zato nazive tih baza eksplicitno navodimo u oznaci matričnog zapisa operatora A, s tim da pišemo (f, e) baš u tom redoslijedu (najprije baza kodomene pa baza domene) iz razloga koji će postati jasan iskazom propozicije 6.3.2. Posebno, ako je $A \in \mathcal{L}(V)$, matrični prikaz operatora u istom paru baza $[A]_{(e,e)}$ označavat ćemo s $[A]_{(e)}$.

Uočimo još važnu činjenicu da je preslikavanje $A \mapsto [A]_{(f,e)}$ bijekcija s $\mathcal{L}(V, W) \to M_{m,n}(\mathbb{F})$. (Obrazložite tu tvrdnju!)

Svaki vektor $x \in V$ prikazuje se jedinstveno kao linearna kombinacija vektora baze za V, tj. postoje jedinstveni skalari $x_1, \ldots, x_n$ takvi da je $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$. Stoga je vektor x potpuno određen stupčanom matricom

$$[x]_{(e)} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in M_{n,1}(\mathbb{F}).$$

Uočimo da smo na taj način dobro definirali bijektivno preslikavanje $x \mapsto [x]_{(e)}$, $V \to M_{n,1}(\mathbb{F})$. Taj postupak, odnosno i samo preslikavanje, nazivamo *koordinatizacijom prostora V*. Matricu $[x]_{(e)} = (x_i)$ zvat ćemo *matričnim zapisom* ili *koordinatnom matricom* ili kratko *matricom vektora x u bazi (e)*.

Nadalje će posebno biti važno kako se djelovanje linearnog operatora na vektor može realizirati množenjem odgovarajućih matričnih zapisa.

Propozicija 6.3.2. *Neka je $A : V \to W$ linearni operator, $(e) = \{e_1, \ldots, e_n\}$ baza prostora V te $(f) = \{f_1, \ldots, f_m\}$ baza prostora W. Tada vrijedi*

$$[A(x)]_{(f)} = [A]_{(f,e)} \cdot [x]_{(e)}.$$

Dokaz. Neka je $[A]_{(f,e)} = (\alpha_{ij}) \in M_{m,n}(\mathbb{F})$ te $[x]_{(e)} = (x_i) \in M_{n,1}(\mathbb{F})$. Vrijedi

$$A(x) = A(\sum_{j=1}^{n} x_j e_j) = \sum_{j=1}^{n} x_j A(e_j) = \sum_{j=1}^{n} x_j \left(\sum_{i=1}^{m} \alpha_{ij} f_i \right) = \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} x_j \right) f_i.$$

Stoga je matrični zapis vektora $A(x)$ u bazi (f) jednak

$$[A(x)]_{(f)} = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^n \alpha_{1j}x_j \\ \sum_{j=1}^n \alpha_{2j}x_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^n \alpha_{mj}x_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ \alpha_{m1} & \cdots & \alpha_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = [A]_{(f,e)} \cdot [x]_{(e)}.$$

□

Primjer 6.12. *Matrični zapisi nekih linearnih operatora iz odjeljka 6.2.*

- Neka je V vektorski prostor nad $\mathbb{F}$, $(e) = \{e_1, \ldots, e_n\}$ baza za V, $\lambda \in \mathbb{F}$ te $A : V \to V$, $A(x) = \lambda x$ *operator homotetije*. Jer je

$$A(e_i) = \lambda e_i, \;\; i = 1, \ldots, n,$$

  dobivamo

$$[A]_{(e)} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda \end{pmatrix} = \lambda I.$$

  Uočimo da bez obzira na izbor baze za prostor V operator A ima uvijek isti matrični zapis λI.

- Neka je $Z : V^2(O) \to V^2(O)$ *zrcaljenje* s obzirom na pravac $y = kx$ te $(e) = \{\vec{i}, \vec{j}\}$ ortonormirana baza za $V^2(O)$. Prema (6.2) je

$$Z(\vec{i}) = \frac{1-k^2}{1+k^2}\vec{i} + \frac{2k}{1+k^2}\vec{j}, \;\; Z(\vec{j}) = \frac{2k}{1+k^2}\vec{i} + \frac{k^2-1}{1+k^2}\vec{j},$$

  pa je

$$[Z]_{(e)} = \frac{1}{1+k^2}\begin{pmatrix} 1-k^2 & 2k \\ 2k & k^2-1 \end{pmatrix}.$$

  Ako za bazu prostora $V^2(O)$ odaberemo $(f) = \{\vec{s}, \vec{t}\}$ gdje je $\vec{s} = (1, k) = \vec{i} + k\vec{j}$ i $\vec{t} = (-k, 1) = -k\vec{i} + \vec{j}$, dobit ćemo sljedeći matrični zapis operatora zrcaljenja

$$[Z]_{(f)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

  Zaista, $Z(\vec{s}) = \vec{s}$ jer je $\vec{s}$ vektor u smjeru pravca $y = kx$, a $Z(\vec{t}) = -\vec{t}$ jer je $\vec{t}$ okomit na spomenuti pravac. (To isto možemo dobiti i direktnim uvrštavanjem u formulu (6.2).) Matrice $[Z]_{(e)}$ i $[Z]_{(f)}$ se razlikuju (osim kada je $k = 0$) pa se može zaključiti da **matrični zapis operatora ovisi o izboru baza**.

- Neka je $R_\varphi : V^2(O) \to V^2(O)$ *rotacija* oko ishodišta za kut φ te $(e) = \{\vec{i}, \vec{j}\}$, tada je prema (6.3)

$$[R_\varphi]_{(e)} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}.$$

- Neka su $D : \mathcal{P}_3 \to \mathcal{P}_2$ i $S : \mathcal{P}_2 \to \mathcal{P}_3$ operatori deriviranja i integriranja na konkretnim prostorima polinoma. Želimo odrediti njihove matrične zapise u paru kanonskih baza $(\mathcal{E}_3) = \{p_0, p_1, p_2, p_3\}$ i $(\mathcal{E}_2) = \{p_0, p_1, p_2\}$, gdje je $p_k(t) = t^k$, $k = 0, 1, 2, 3$. Kako je
$$D(p_0) = 0,\ D(p_k) = k \cdot p_{k-1},\ k = 1, 2, 3,$$
imamo
$$[D]_{(\mathcal{E}_2, \mathcal{E}_3)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$
Matrica operatora integriranja u istom paru baza glasi
$$[S]_{(\mathcal{E}_3, \mathcal{E}_2)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

♡

6.4 Rang i defekt linearnog operatora

Za razumijevanje djelovanja linearnog operatora na vektorskom prostoru posebno je važno proučiti kakva svojstva ima operator u odnosu na potprostore, kako svoje domene tako i kodomene. Već na temelju definicije i osnovnih svojstava linearnog operatora („čuvanje" linearnih kombinacija) možemo očekivati „dobro ponašanje" prema potprostorima. Tako će slika svakog potprostora domene biti potprostor kodomene, a posebno je i slika cijele domene potprostor kodomene. U konačnodimenzionalnom slučaju kao važan parametar pojavit će se *rang linearnog operatora*, a to je dimenzija njegove slike i u uskoj je vezi s rangom matričnog prikaza linearnog operatora, zapravo jednak je rangu matrice pridružene operatoru u bilo kojem paru baza.

Uzmimo opet situaciju koju nam je geometrijski najlakše predočiti, kad imamo linearni operator na prostoru $V^3(O)$. Osim nulpotprostora, koji se svakako preslika u nulpotprostor, potprostori su zapravo pravci kroz O (jednodimenzionalni potprostori), ravnine kroz O (dvodimenzionalni potprostori) i cijeli $V^3(O)$. Kakav god bio linearni operator, on će bilo koji potprostor preslikati opet u potprostor, pri čemu dimenzija slike ne može biti veća od dimenzije originala. Tako se ravnina može preslikati ili u ravninu ili u pravac ili u točku (nulvektor), pravac se može preslikati u pravac ili u točku, ali ne u ravninu, dok slika cijele domene $V^3(O)$ može biti bilo koji potprostor. Vrijednost ranga – 0, 1, 2 ili 3 – pokazuje nam u kakav će se potprostor preslikati domena.

No važna pravilnost kod djelovanja linearnog operatora može se uočiti i u „obrnutom smjeru". Praslika svakog potprostora kodomene bit će neki potprostor domene. Opet u primjeru $V^3(O)$ skup svih vektora čija slika pripada nekoj ravnini kroz O bit će ili ravnina kroz O ili cijeli prostor $V^3(O)$. Npr. kod zrcaljenja, praslika ravnine također je ravnina, dok kod projekcije na ravninu praslika ravnine je cijeli prostor.

Osobito je važna praslika nulpotprostora kodomene. Vidjet ćemo da je u konačnodimenzionalnom slučaju određivanje praslike nulvektora ekvivalentno rješavanju homogenog sustava linearnih jednadžbi. Treba, naime, odrediti skup svih vektora x takvih da ih linearni operator A preslika u nulvektor, tj. da vrijedi $Ax = 0$, a primjenom matričnog prikaza dobiva se matrična jednadžba $AX = 0$, ekvivalentna homogenom sustavu linearnih jednadžbi.

Kao ključni rezultat ovog odjeljka pokazat će se *Teorem o rangu i defektu linearnog operatora*, usko povezan s osnovnim rezultatom o prostoru rješenja homogenog linearnog sustava koji smo naučili u Linearnoj algebri 1.

Definicija 6.4.1. *Neka je $A : V \to W$ linearni operator.* ***Slika*** *linearnog operatora A je skup*

$$S(A) = \{A(x) \,:\, x \in V\}.$$

Slika se još ponekad označava s $A(V)$ ili Im A *(od engl.* image*–slika).*

Jezgra *linearnog operatora A je skup*

$$J(A) = \{x \in V \,:\, A(x) = 0_W\}.$$

Jezgra se još označava s $A^{-1}(0_W)$ ili Ker A *(od engl.* kernel *- jezgra).*

Propozicija 6.4.2. *Neka je $A : V \to W$ linearni operator te L potprostor od V i M potprostor od W. Tada je $A(L)$ potprostor od W i $A^{-1}(M)$ potprostor od V.*

Dokaz. Najprije uočimo da su $A(L)$ i $A^{-1}(M)$ neprazni podskupovi od W i V, redom, jer svaki od njih sadrži nulvektor odgovarajućeg vektorskog prostora.

Neka su $y_1, y_2 \in A(L)$. Tada postoje $x_1, x_2 \in L$ takvi da je $A(x_1) = y_1$ i $A(x_2) = y_2$. Za $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{F}$ vrijedi

$$\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 = \alpha_1 A(x_1) + \alpha_2 A(x_2) = \{A \text{ je l.o.}\} = A(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2).$$

Kako je $L \leq V$, slijedi da je $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 \in L$, pa je $\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 \in A(L)$, čime smo pokazali da je $A(L)$ potprostor od W.

Neka su $x_1, x_2 \in A^{-1}(M)$. Tada je $A(x_1), A(x_2) \in M$. Za $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{F}$ je i $\alpha_1 A(x_1) + \alpha_2 A(x_2) \in M$ jer je M potprostor od W. Kako je $M \ni \alpha_1 A(x_1) + \alpha_2 A(x_2) = A(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2)$, slijedi da je $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 \in A^{-1}(M)$, odnosno da je $A^{-1}(M)$ potprostor od V. $\square$

Korolar 6.4.3. *Slika linearnog operatora $A : V \to W$ je potprostor od W, a jezgra je potprostor od V.*

Dokaz. Tvrdnje slijede iz prethodne propozicije jer je $S(A) = A(V)$ i $V \leq V$ te $J(A) = A^{-1}(\{0_W\})$ i $\{0_W\}$ je potprostor od W. $\square$

Prethodnom tvrdnjom opravdamo sljedeću definiciju.

Definicija 6.4.4. *Neka je $A : V \to W$ linearni operator. Ako je slika operatora A, to jest $S(A)$ konačnodimenzionalni potprostor od W, tada je **rang** linearnog operatora A dimenzija potprostora $S(A)$. Pišemo*

$$r(A) = \dim S(A).$$

*Ako je jezgra operatora A, to jest $J(A)$ konačnodimenzionalni potprostor od V, tada je **defekt** linearnog operatora A dimenzija potprostora $J(A)$. Pišemo*

$$d(A) = \dim J(A).$$

Napomena 6.4.5. *U definiciji 6.4.4 rang i defekt linearnog operatora definirali smo samo uz pretpostavku da su slika i jezgra konačnodimenzionalni potprostori domene i kodomene, redom. To će, dakako, biti ispunjeno ako su domena i kodomena konačnodimenzionalni prostori. Štoviše, kasnije ćemo vidjeti (propozicija 6.4.9) da je slika linearnog operatora konačnodimenzionalni potprostor kodomene čim je domena operatora konačnodimenzionalni prostor (dok kodomena to može biti, ali ne mora).*

Primjer 6.13. *Odredite rang i defekt sljedećim linearnim operatorima:*

(a) $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $A(x_1, x_2) = (x_1 + x_2, x_1 - x_2, x_1)$,

(b) $B : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $B(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_2 + x_3, x_1 + x_2 + 2x_3)$,

(c) $C : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $A(x_1, x_2) = (x_1 + x_2, x_1 - x_2)$.

Rješenje. **(a)** Slika operatora A je potprostor

$$S(A) = \{(x_1+x_2, x_1-x_2, x_1) : x_1, x_2 \in \mathbb{R}\} = \{x_1(1,1,1)+x_2(1,-1,0) : x_1, x_2 \in \mathbb{R}\}$$

čija je baza skup $\{(1,1,1), (1,-1,0)\}$, pa je $r(A) = 2$. Jezgra operatora A je potprostor

$$J(A) = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 + x_2 = 0, x_1 - x_2 = 0, x_1 = 0\} = \{(0,0,0)\}$$

te slijedi $d(A) = 0$.

(b) Slika operatora B je

$$\begin{aligned} S(B) &= \{(x_1 - x_2 + x_3, x_1 + x_2 + 2x_3) : x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}\} \\ &= \{x_1(1,1) + x_2(-1,1) + x_3(1,2) : x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}\} = [(1,1), (-1,1), (1,2)]. \end{aligned}$$

Očito je $S(B) = \mathbb{R}^2$ i $r(B) = 2$. Jezgra operatora B je

$$J(B) = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 - x_2 + x_3 = 0, x_1 + x_2 + 2x_3 = 0\}.$$

Skup rješenja sustava $x_1 - x_2 + x_3 = 0$, $x_1 + x_2 + 2x_3 = 0$ je $\{(3, 1, -2)t : t \in \mathbb{R}\}$, pa zaključujemo da je $\{(3, 1, -2)\}$ baza za potprostor $J(B)$. Dakle, $d(B) = 1$.

(c) Lakim računom dobivamo da je $S(C) = \mathbb{R}^2$ i $J(C) = \{(0, 0)\}$, odnosno $r(C) = 2$ i $d(C) = 0$.

♡

Zadatak 6.2. *Odredite sliku, jezgru, rang i defekt linearnih operatora iz primjera 6.3 i 6.4.*

Do važnih rezultata dovest će nas ispitivanje svojstava injektivnosti, surjektivnosti i bijektivnosti linearnog operatora. Prisjetimo se. Funkcija f je *injekcija* (ili *1-1* preslikavanje) ako različite elemente domene preslikava u različite elemente kodomene. Injektivnost funkcije se operativno lakše pokazuje korištenjem obrata po kontrapoziciji prethodne tvrdnje. Dakle, f je injekcija ako i samo ako za x_1 i x_2 iz domene takve da je $f(x_1) = f(x_2)$ slijedi $x_1 = x_2$. Funkcija f je *surjekcija* (ili preslikavanje *na*) ako je slika od f jednaka kodomeni. Funkcija f je *bijekcija* ako je injekcija i surjekcija. Drukčije rečeno, f je bijektivno preslikavanje ako i samo ako za svaki y iz kodomene postoji jedinstven x iz domene takav $f(x) = y$.

Definicija 6.4.6. *Injektivni linearni operator naziva se* ***monomorfizam****, surjektivni linearni operator naziva se* ***epimorfizam****, a bijektivni* ***izomorfizam****.*

Zadatak 6.3. *Ustanovite je li neki od operatora iz primjera 6.13 monomorfizam/epimorfizam/izomorfizam.*

Propozicija 6.4.7. *Linearni operator je monomorfizam ako i samo ako mu je defekt jednak nuli.*

Dokaz. Neka je $A \in \mathcal{L}(V, W)$ monomorfizam. Prema svojstvu injektivnosti, ako je $x \neq 0_V$, onda je $A(x) \neq A(0_V) = 0_W$. Dakle, nijedan nenul vektor iz V ne može se preslikati u nulvektor iz W pa je $J(A) = \{0_V\}$ i $d(A) = 0$.

Pretpostavimo sada da je $d(A) = 0$, odnosno $J(A) = \{0_V\}$. Ako je $A(x_1) = A(x_2)$ za neke $x_1, x_2 \in V$, onda je $0_W = A(x_1) - A(x_2) = A(x_1 - x_2)$. Stoga je $x_1 - x_2 \in J(A) = \{0_V\}$, odnosno $x_1 = x_2$. Znači, preslikavanje A je injektivno. □

Kriterij injektivnosti linearnog operatora dan u prethodnoj propoziciji 6.4.7 je vrlo praktičan jer, za razliku od općenitih preslikavanja, za linearni operator dovoljno je provjeriti injektivnost „samo na nulvektoru”.

Propozicija 6.4.8. *Linearni operator je monomorfizam ako i samo ako svaki linearno nezavisan podskup domene preslikava u linearno nezavisan podskup kodomene.*

Dokaz. Neka je $A \in \mathcal{L}(V, W)$ monomorfizam te $\{x_1, \ldots, x_k\}$ linearno nezavisan skup u V. Trebamo pokazati da je $\{A(x_1), \ldots, A(x_k)\}$ linearno nezavisan skup u W. U tu svrhu pretpostavimo

$$\sum_{i=1}^{k} \alpha_i A(x_i) = 0_W,$$

za neke $\alpha_i \in \mathbb{F}$. Zbog svojstva linearnosti od A je

$$\sum_{i=1}^{k} \alpha_i A(x_i) = A(\sum_{i=1}^{k} \alpha_i x_i),$$

a zbog injektivnosti od A nužno slijedi da je $\sum_{i=1}^{k} \alpha_i x_k = 0_V$. Kako je $\{x_1, \ldots, x_k\}$ linearno nezavisan skup u V, slijedi $\alpha_1 = \cdots = \alpha_k = 0$. Time smo pokazali da je skup $\{A(x_1), \ldots, A(x_k)\}$ linearno nezavisan.

Dovoljnost tvrdnje pokazujemo pomoću obrata po kontrapoziciji. Pretpostavimo da A *nije monomorfizam.* Tada prema propoziciji 6.4.7 u jezgri $J(A)$ postoji neki vektor x različit od 0_V. Stoga je $A(x) = 0_W$ pa A preslikava linearno *nezavisan* skup $\{x\}$ u linearno *zavisan* skup $\{0_W\}$. Dobili smo proturječje s pretpostavkom, što znači da linearni operator A mora biti monomorfizam ako ima svojstvo da svaki linearno nezavisan podskup domene preslika u linearno nezavisan podskup kodomene. □

S obzirom na tvrdnju prethodne propozicije kažemo još da injektivni operator *čuva linearnu nezavisnost.*

Propozicija 6.4.9. *Neka je $A \in \mathcal{L}(V, W)$ i G sustav izvodnica za V. Tada je $A(G)$ sustav izvodnica za sliku operatora $S(A)$.*

Posebno, ako je A epimorfizam, $A(G)$ je sustav izvodnica za W.

Dokaz. Očito je $[A(G)] = [\{A(a) : a \in G\}] \subseteq S(A)$. Pokažimo inkluziju $S(A) \subseteq [A(G)]$. Neka je $y \in S(A)$. Tada postoji $x \in V$ takav da je $y = A(x)$. Kako je $[G] = V$, za x postoje vektori $a_1, \ldots, a_k \in G$ i skalari $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{F}$ takvi da je $x = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i a_i$. Iz

$$A(x) = A(\sum_{i=1}^{k} \alpha_i a_i) = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i A(a_i)$$

slijedi da je $A(x) \in [A(G)]$ pa smo pokazali da je $S(A) \subseteq [A(G)]$ te stoga $S(A) = [A(G)]$. □

Napomenimo da svaki linearni operator A bazu domene, $\{e_1, \dots, e_n\}$, preslikava u skup $\{A(e_1), \dots, A(e_n)\}$, što je sustav izvodnica za sliku $S(A)$. Taj će skup biti i baza za sliku ako i samo ako je A injekcija. Štoviše, lako možemo ustanoviti da smo do sada pokazali sljedeći teorem.

Teorem 6.4.10. *Neka je $A \in \mathcal{L}(V, W)$. Vrijedi:*

(i) *A je monomorfizam ako i samo ako svaki linearno nezavisan podskup od V preslikava u linearno nezavisan podskup od W.*

(ii) *A je epimorfizam ako i samo ako svaki sustav izvodnica za V preslikava u sustav izvodnica za W.*

(iii) *A je izomorfizam ako i samo ako svaku bazu za V preslikava u bazu za W.*

Tvrdnju (iii) bit će dovoljno provjeriti za *neku* bazu. Naime, može se pokazati da ako operator *neku* bazu za V preslikava u bazu za W, preslikat će i *svaku* bazu za V u bazu za W. (Dokažite izrečenu tvrdnju!)

Teorem 6.4.11 (Teorem o rangu i defektu)**.** *Neka je V konačnodimenzionalni vektorski prostor i $A \in \mathcal{L}(V, W)$. Tada vrijedi*

$$r(A) + d(A) = \dim V.$$

Dokaz. Ako je $\dim V = 0$, to jest $V = \{0_V\}$, tada je i $r(A) = d(A) = 0$.

Pretpostavimo da je $\dim V = n > 0$. Tvrdnju teorema pokazujemo u dva slučaja.

1. slučaj. Neka je A monomorfizam. Tada je $d(A) = 0$ prema propoziciji 6.4.7. Nadalje, $A : V \to S(A)$ je izomorfizam, pa prema teoremu 6.4.10(iii) slijedi da operator A bazu za V, $\{b_1, \dots, b_n\}$, preslikava u bazu $\{A(b_1), \dots, A(b_n)\}$ za $S(A)$. Dakle, $n = \dim S(A) = r(A)$ i $r(A) + d(A) = n + 0 = n = \dim V$.

2. slučaj. Pretpostavimo da A nije monomorfizam, to jest $d(A) = m \geq 1$. Neka je $\{a_1, \dots, a_m\}$ baza za jezgru $J(A)$. Proširimo tu bazu do baze za cijeli prostor V,

$$\{a_1, \dots, a_m, a_{m+1}, \dots, a_n\}.$$

Promotrimo skup $\{A(a_{m+1}), \dots, A(a_n)\}$. Pokazat ćemo da je taj skup baza za sliku $S(A)$.

(i) Skup $\{A(a_{m+1}), \dots, A(a_n)\}$ je sustav izvodnica za $S(A)$. Zaista, neka je $y \in S(A)$. Postoji $x \in V$ takav da je $y = A(x)$. Prikažimo vektor x u bazi $\{a_1, \dots, a_n\}$, $x = \sum_{i=1}^n \alpha_i a_i$. Vrijedi

$$\begin{aligned} A(x) &= A(\sum_{i=1}^n \alpha_i a_i) = \underbrace{\alpha_1 A(a_1) + \cdots + \alpha_m A(a_m)}_{=0_W} + \alpha_{m+1} A(a_{m+1}) + \cdots + \alpha_n A(a_n) \\ &= \alpha_{m+1} A(a_{m+1}) + \cdots + \alpha_n A(a_n), \end{aligned}$$

jer su vektori $a_1, \dots, a_m$ iz jezgre operatora A. Dakle, $y \in [A(a_{m+1}), \dots, A(a_n)]$, odnosno skup $\{A(a_{m+1}), \dots, A(a_n)\}$ razapinje sliku $S(A)$.

(ii) Skup $\{A(a_{m+1}), \dots, A(a_n)\}$ je linearno nezavisan skup u W. U tu svrhu promatramo linearnu kombinaciju

$$\alpha_{m+1}A(a_{m+1}) + \cdots + \alpha_n A(a_n) = 0_W.$$

Zbog linearnosti je $\displaystyle\sum_{i=m+1}^{n} \alpha_i a_i \in J(A)$ te postoje skalari $\beta_1, \dots, \beta_m \in \mathbb{F}$ takvi da je

$$\sum_{i=m+1}^{n} \alpha_i a_i = \sum_{j=1}^{m} \beta_j a_j,$$

odnosno

$$\beta_1 a_1 + \cdots + \beta_m a_m + (-\alpha_{m+1})a_{m+1} + \cdots + (-\alpha_n)a_n = 0_V.$$

Budući da je $\{a_1, \dots, a_m, a_{m+1}, \dots, a_n\}$ baza za V, slijedi da su svi skalari nula, pa posebno i $\alpha_{m+1} = \cdots = \alpha_n = 0$.

Pokazali smo da je $\{A(a_{m+1}), \dots, A(a_n)\}$ baza za $S(A)$, što povlači $r(A) = n - m$. Dakle, i u ovom slučaju vrijedi

$$r(A) + d(A) = m + (n - m) = n = \dim V.$$

$\square$

Uočimo da u prvom slučaju tvrdnja teorema proizlazi odatle što je domena V *izomorfna* potprostoru $S(A)$ kodomene W. (Za definiciju izomorfnih prostora vidi definiciju 6.5.1.) U drugom slučaju zapravo smo prikazali domenu V kao direktnu sumu jezgre $J(A)$ i jednog potprostora od V koji je izomorfan potprostoru $S(A)$. Tako u oba slučaja jednakost $\dim V = d(A) + r(A)$ slijedi iz prikaza V kao *direktne sume* jezgre operatora A i jednog potprostora koji je izomorfan slici operatora A.

Korolar 6.4.12. *Neka je $A \in \mathcal{L}(V, W)$ i $\dim V = \dim W = n$. Tada su ekvivalentne tvrdnje:*

(i) *A je monomorfizam,*

(ii) *A je epimorfizam,*

(iii) *A je izomorfizam.*

Dokaz. (i)$\Rightarrow$ (ii): Ako je A je monomorfizam, onda je $d(A) = 0$, pa je prema teoremu 6.4.11 $r(A) = n$. Kako je $\dim W = n$, slijedi da je $S(A) = W$, to jest da je A epimorfizam.
(ii)$\Rightarrow$ (iii): Ako je A epimorfizam, onda je $r(A) = \dim W = n$, pa prema teoremu 6.4.11 slijedi da je $d(A) = 0$, odnosno A je monomorfizam (prema propoziciji 6.4.7) pa je i izomorfizam.
(iii)$\Rightarrow$ (i): Trivijalno. $\square$

Vratimo se još jedanput na primjer 6.6. Važno je i korisno odrediti defekt i rang linearnog operatora L iz tog primjera, gdje je najprije izabrana matrica A, a zatim je zadan linearni operator s $L(X) = AX$. Jezgra tog operatora određuje se stoga rješavanjem matrične jednadžbe $AX = 0$, a ona je ekvivalentna homogenom sustavu od m linearnih jednadžbi s n nepoznanica. Matrica tog sustava upravo je matrica A. Iz Linearne algebre 1 znamo (teorem 3.4.3) da skup rješenja tog sustava čini potprostor dimenzije $n - r(A)$. (To je potprostor prostora $\mathbb{F}^n$ ako promatramo sustav, odnosno prostora jednostupčanih matrica $M_{n,1}(\mathbb{F})$ kad promatramo matričnu jednadžbu $AX = 0$.) Dakle, za defekt operatora L imamo $d(L) = n - r(A)$. Primjenom Teorema o rangu i defektu stoga izravno dobivamo da je rang operatora L jednak $r(A)$, dakle upravo rangu matrice pomoću koje je zadan operator L.

Uočimo sada sljedeće. Budući da se svaki linearni operator kojem su domena i kodomena konačnodimenzionalni prostori može prikazati matrično, primjer 6.6 zapravo predstavlja „tipični” oblik takvog linearnog operatora. Veza se ostvaruje bilo kakvim izborom para baza domene i kodomene (propozicija 6.3.2).

Ako je L zadani linearni operator, a matrica A njemu pridružena matrica u nekom paru baza, imamo $d(L) = n - r(A)$, kao u prethodnom razmatranju. Prema Teoremu o rangu i defektu opet slijedi da je $r(L) = r(A)$. Pritom, kako je slika linearnog operatora, a time i njezina dimenzija, po samoj definiciji neovisna o matričnom prikazu, vidimo da je $r(L)$ jednak rangu matrice pridružene operatoru L u bilo kojem paru baza.

Ovdje smo se za taj zaključak poslužili Teoremom o rangu i defektu, a u odjeljku 6.7, gdje će se detaljno razraditi veza između matrica pridruženih linearnom operatoru u različitim parovima baza, istu tvrdnju o jednakosti rangova izvest ćemo i na malo drukčiji način. Dakle, pojmovi ranga matrice i ranga linearnog operatora, premda definirani posve nezavisno, usko su povezani: s jedne strane linearni operator prikazujemo pomoću matrice, a s druge strane pomoću izabrane matrice možemo zadati linearni operator (primjer 6.6). U oba slučaja vrijednosti ranga se podudaraju.

Zadatak 6.4. *Neka je A linearni operator ranga r s n-dimenzionalnog prostora V u m-dimenzio-nalni prostor W. Pokažite da tada postoji par baza prostora V i W takav da je u tom paru baza matrica operatora A kanonska matrica tipa (m, n) i ranga r. (Dakle, matrica za koju su koeficijenti $a_{i,i} = 1$ za $i = 1, 2, \ldots, r$, a svi ostali a_{ij} su 0.)*

Zadatak 6.5. *Navedite primjer linearnog operatora ranga 2 kojem se jezgra i slika podudaraju. (Treba navesti domenu, kodomenu i zadati djelovanje takvog operatora.)*

Zadatak 6.6. *Neka su V i W konačnodimenzionalni prostori nad poljem $\mathbb{F}$. Koji su nužni i dovoljni uvjeti za $\dim V$ i $\dim W$ da bi u skupu $\mathcal{L}(V, W)$ postojao*

(a) monomorfizam,

(b) epimorfizam,

(c) izomorfizam?

6.5 Izomorfizam vektorskih prostora

Među mnogim primjerima vektorskih prostora koje smo dosad upoznali mogli smo uočiti da su neki prostori vrlo „slični” u određenom smislu, iako su definirani na posve različitim skupovima, a i operacije zbrajanja i množenja skalarom na njima sasvim su drukčije prirode. Već smo, primjerice, naviknuti da su realni vektorski prostori $\mathbb{R}^2$ i $V^2(O)$ toliko „srodni" da ćemo, pri rješavanju zadataka, bez posebnog razmišljanja preći s radijvektora („strelica" sa zajedničkim ishodištem u točki O) na uređene parove realnih brojeva i dobiti traženi rezultat na način koji nam je već praktičniji za računanje. Umjesto zbrajanja „strelica" po pravilu paralelograma odnosno njihova „rastezanja" ili „stezanja" pomoću određenog realnog faktora jednostavno ćemo zbrajati uređene parove realnih brojeva na prirodan način, a tako ćemo i množiti uređene parove skalarom – po komponentama.

Sasvim analogno, kad u bilo kojem n-dimenzionalnom vektorskom prostoru V nad nekim poljem $\mathbb{F}$ izaberemo bazu, vektore iz V moći ćemo na jednoznačan način prikazati uređenim n-torkama iz skupa$\mathbb{F}^n$. Štoviše, operacije s vektorima iz V izvodit ćemo jednostavnije kao operacije na prostoru $\mathbb{F}^n$. Kad radimo na taj način, postaje svejedno je li polazni prostor V bio npr. prostor realnih polinoma stupnja najviše 3 ili možda prostor realnih kvadratnih matrica reda 2. I jedan i drugi su vektorski prostori dimenzije 4 nad poljem $\mathbb{R}$ pa će se u njima, prelaskom na prikaz u nekoj bazi, računati kao s uređenim četvorkama realnih brojeva. Riječ je o vektorskim prostorima koji jesu različiti, ali su „jednakog oblika" u sasvim određenom smislu, koji ćemo točno definirati pomoću pojma *izomorfnosti* vektorskih prostora (od grčkog *iso* – jednak, *morph* – oblik).

Definicija 6.5.1. *Vektorski prostor V je* ***izomorfan*** *vektorskom prostoru W ako postoji izomorfizam $A : V \to W$. Pišemo $V \simeq W$.*

Iz same definicije izomorfnih prostora jasno je da su to vektorski prostori nad istim poljem.

Propozicija 6.5.2. *Na bilo kojem skupu vektorskih prostora nad istim poljem $\mathbb{F}$ relacija* biti izomorfan *je relacija ekvivalencije.*

Dokaz. (1) Relacija biti izomorfan je *refleksivna* jer je identiteta $I : V \to V$, $I(x) = x$ izomorfizam. Dakle, $V \simeq V$.
(2) Pretpostavimo da je $V \simeq W$. Stoga postoji izomorfizam $A : V \to W$. No za svako bijektivno preslikavanje postoji inverz (bijekcija) $A^{-1} : W \to V$ za koji smo u propoziciji 6.1.4 pokazali da je linearni operator. Dakle, postoji izomorfizam $W \to V$, pa je $W \simeq V$, odnosno relacija biti izomorfan je *simetrična.*
(3) Pokažimo *tranzitivnost* te relacije. Pretpostavimo da je $V \simeq W$ i $W \simeq Z$, odnosno da postoje izomorfizmi $A : V \to W$ i $B : W \to Z$. Njihova kompozicija $B \circ A : V \to Z$ je bijekcija, ali i linearni operator prema propoziciji 6.1.3, stoga i izomorfizam. Zaključujemo da je $V \simeq Z$, što je i trebalo pokazati. $\square$

Budući da je relacija "biti izomorfan" simetrična, često ćemo umjesto formulacije iz definicije 6.5.1 kratko reći da su vektorski prostori V i W izomorfni.

Pojmovi izomorfizma među strukturama, odnosno bijektivnog preslikavanja koje „prenosi" sva osnovna svojstva s jedne strukture na drugu, i izomorfnosti struktura, kao relacije među strukturama određenog tipa ako se između njih može uspostaviti izomorfizam, važni su u matematici jer se pomoću njih izvodi klasifikacija, razvrstavanje struktura u klase „bitno različitih", neizomorfnih. Unutar jedne klase nalaze se strukture „jednakog oblika" i one nisu bitno različite s obzirom na promatranu strukturu. Primjerice, polinomi su objekti sasvim različite prirode od npr. radijvektora, ali ako se promatraju samo operacije u vektorskom prostoru (a ne, recimo, množenje polinoma), onda se prostor realnih polinoma stupnja najviše 2 nalazi u istoj klasi kao prostor $V^3(O)$ i prostor $\mathbb{R}^3$. U vezi s propozicijom 6.5.2 prisjetimo se da se relacija ekvivalencije naziva i relacijom klasifikacije.

Korisno je imati jednostavan kriterij za utvrđivanje jesu li dva vektorska prostora nad istim poljem izomorfna s obzirom na to da efektivno traženje izomorfizma, kao konkretnog preslikavanja, nije uvijek praktično. Za konačnodimenzionalne prostore kriterij je doista vrlo jednostavan, a intuitivno je jasan već iz uvoda ovog odjeljka. Evo tog kriterija:

Teorem 6.5.3. *Konačnodimenzionalni vektorski prostori su izomorfni ako i samo ako su im dimenzije jednake.*

Dokaz. Pretpostavimo da je $V \simeq W$ te $A : V \to W$ izomorfizam. Tada je $d(A) = 0$, pa je $r(A) = \dim V$ prema Teoremu o rangu i defektu 6.4.11. Kako je A i epimorfizam, vrijedi $r(A) = \dim W$, pa smo pokazali da je $\dim V = \dim W$.

Neka je $\dim V = \dim W = n > 0$ te $\{a_1, \dots, a_n\}$ baza za V i $\{b_1, \dots, b_n\}$ baza za W. Definiramo linearni operator $A : V \to W$ djelovanjem na bazi, $A(a_i) = b_i$, $i = 1, \dots, n$. Budući da operator A preslikava bazu za V u bazu za W, slijedi da je A izomorfizam (teorem 6.4.10), odnosno da su V i W izomorfni prostori.

U trivijalnom slučaju je $\dim V = \dim W = 0$ i $\{0_V\} = V \simeq W = \{0_W\}$. □

Korolar 6.5.4. *Svaki vektorski prostor dimenzije n nad poljem $\mathbb{F}$ je izomorfan prostoru $\mathbb{F}^n$.*

Primjer 6.14. *(a)* Svi realni vektorski prostori dimenzije 6 su međusobno izomorfni, npr. prostori matrica $M_{2,3}(\mathbb{R})$ i $M_{3,2}(\mathbb{R})$ izomorfni su s $\mathbb{R}^6$, a također i s potprostorom simetričnih matrica u prostoru $M_3(R)$ kvadratnih matrica reda 3. (Znamo da simetrične matrice reda n čine potprostor dimenzije $n(n+1)/2$ prostora $M_n(\mathbb{R})$.) S njima je izomorfan i prostor antisimetričnih matrica reda 4 jer antisimetrične matrice reda n čine potprostor dimenzije $n(n-1)/2$ prostora $M_n(\mathbb{R})$. Nadalje, $\mathbb{C}^3$ je dimenzije 6 kao realni vektorski prostor pa je također izomorfan prethodno navedenima, kao i prostor $\mathcal{P}_5(\mathbb{R})$ realnih polinoma stupnja najviše 5.

U svim tim primjerima vidimo da se u vektorima pojavljuje po 6 realnih koeficijenata koji se mogu birati nezavisno, a onda nije teško prepoznati neku bazu te zadati izomorfizam između takvih prostora po načelu „preslikavanja baze u bazu” (što je zapravo dokaz jednog smjera u teoremu 6.5.3).

(b) Pitanje izomorfnosti postavlja se, dakako, i za vektorske prostore koji nisu konačnodimenzionalni, a tada je često i znatno teže. Takvim se pitanjima ovdje nećemo baviti.

♡

Zadatak 6.7. *Neka je $A : V \to W$ izomorfizam vektorskih prostora te neka je $L \leq V$, $M \leq W$. Dokažite da tada vrijedi $L \simeq A(L)$ i $M \simeq A^{-1}(M)$.*

6.6 Prostor linearnih operatora. Dualni prostor.

Neka su V i W vektorski prostori nad poljem $\mathbb{F}$. Na skupu svih linearnih operatora s V u W, $\mathcal{L}(V,W)$, možemo uvesti strukturu vektorskog prostora nad poljem $\mathbb{F}$ uz operaciju zbrajanja operatora te operaciju množenja operatora skalarom. Svrha uvođenja tih *operacija s operatorima* može nam biti jasnija kad uzmemo u obzir da su nam već poznate odgovarajuće operacije s matricama, a da se linearnim operatorima na konačnodimenzionalnim prostorima pridružuje matrični prikaz. Zbrajanje linearnih operatora i množenje operatora skalarom prirodno se definiraju pomoću djelovanja na vektorima, kao što se, primjerice, zbrajanje realnih funkcija definira „po točkama” (to znači da $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$ za $x \in \mathbb{R}$). Dakle, za $A, B \in \mathcal{L}(V,W)$ i $\lambda \in \mathbb{F}$ stavljamo

$$(A+B)(x) = A(x) + B(x),\ (\lambda A)(x) = \lambda\, A(x),\ x \in V.$$

Lako se provjeri da su $A+B, \lambda A \in \mathcal{L}(V,W)$ te da vrijede aksiomi vektorskog prostora, pa je $\mathcal{L}(V,W)$ vektorski prostor na poljem $\mathbb{F}$.

Zadatak 6.8. *Dokažite da ako su V i W vektorski prostori nad poljem $\mathbb{F}$, onda je $\mathcal{L}(V,W)$ vektorski prostor nad poljem $\mathbb{F}$.*

Sada je smisleno pokušati odrediti dimenziju prostora $\mathcal{L}(V,W)$. To možemo učiniti ako su V i W konačnodimenzionalni, jer tada je i $\mathcal{L}(V,W)$ konačnodimenzionalni vektorski prostor.

Teorem 6.6.1. *Neka su V i W konačnodimenzionalni vektorski prostori. Tada je $\mathcal{L}(V,W)$ konačnodimenzionalni vektorski prostor i* $\dim \mathcal{L}(V,W) = \dim V \cdot \dim W$.

Dokaz. Tvrdnju dokazujemo tako što efektivno konstruiramo bazu za prostor $\mathcal{L}(V,W)$. U tu svrhu prisjetimo se vrlo jednostavne, kanonske baze za matrice tipa (m,n). Za $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$, matrica E_{ij} kanonske baze ima točno jedan element jednak 1, i to onaj na presjeku i-tog retka i j-tog stupca, a ostali elementi jednaki su 0. Ideja za sastavljanje baze prostora $\mathcal{L}(V,W)$ sada je u tome da se uzmu upravo oni operatori kojima su, u nekom paru baza, pridružene matrice E_{ij}. Radi jednostavnosti za te operatore uzet ćemo istu oznaku.

Neka su $\{e_1, \ldots, e_n\}$ i $\{f_1, \ldots, f_m\}$ baze za V i W, redom. Iz matrice E_{ij} vidimo da se vektor e_j preslikava u vektor f_i, dok se svi ostali vektori e_k, za $k \neq j$, preslikavaju u 0_W. Djelovanje operatora $E_{ij} : V \to W$ možemo onda sažeto zapisati ovako:

$$E_{ij}(e_k) = \begin{cases} f_i, & k = j, \\ 0_W, & k \neq j \end{cases}, \ k \in \{1, \ldots, n\},$$

za $i \in \{1, \ldots, m\}$, $j \in \{1, \ldots, n\}$. Ustanovit ćemo da je skup $\{E_{ij} : i = 1, \ldots, m, \ j = 1, \ldots, n\}$ baza prostora $\mathcal{L}(V, W)$. Neka je $A \in \mathcal{L}(V, W)$. Želimo prikazati taj operator kao linearnu kombinaciju operatora E_{ij}, $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$. Budući da je operatoru A u izabranom paru baza pridružena matrica $[A]_{(f,e)} = [\alpha_{ij}]$, a za tu matricu znamo njezin prikaz u kanonskoj bazi prostora $M_{mn}(\mathbb{F})$:

$$[A]_{(f,e)} = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} E_{ij},$$

očekujemo da će i operator A imati prikaz jednakog oblika, naime s istim tim koeficijentima, kao linearna kombinacija operatora E_{ij}. Provjerimo to. Dovoljno je provjeriti da operator A i linearna kombinacija $\displaystyle\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} E_{ij}$ jednako djeluju na svaki vektor e_k iz baze. Prvo, izravno iz matrice $[A]_{(f,e)}$ vidimo

$$A(e_k) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_{ik} f_i, \ k = 1, \ldots, n.$$

S druge strane,

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} E_{ij}(e_k) = \{\text{po definiciji operatora } E_{ij}\} = \sum_{i=1}^{m} \alpha_{ik} f_i, \quad k = 1, \ldots, n.$$

Dakle, operator A podudara se s operatorom napisanim kao $\displaystyle\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} E_{ij}$ jer jednako djeluju na vektore baze. Odakle vidimo da je skup $\{E_{ij} : i = 1, \ldots, m, \ j = 1, \ldots, n\}$ sustav izvodnica prostora $\mathcal{L}(V, W)$.

Preostaje provjeriti linearnu nezavisnost tog skupa. Neka je

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} E_{ij} = \mathbf{0},$$

pri čemu smo s $\mathbf{0}$ označili nuloperator u $\mathcal{L}(V, W)$. Djelujemo operatorom zapisanim na lijevoj strani na vektor baze e_k za $k \in \{1, \ldots, n\}$,

$$(\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} E_{ij})(e_k) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} \underbrace{E_{ij}(e_k)}_{\substack{f_i, k = j, \\ 0_W, k \neq j}} = \sum_{i=1}^{m} \alpha_{ik} f_i.$$

S druge strane, $\mathbf{0}(e_k) = 0_W$, pa je

$$\sum_{i=1}^{m} \alpha_{ik} f_i = 0_W.$$

Kako je $\{f_1, \ldots, f_m\}$ baza za W, slijedi da je $\alpha_{1k} = \alpha_{2k} = \cdots = \alpha_{mk} = 0$. Provedbom ovog postupka za svaki $k \in \{1, \ldots, n\}$ dobivamo da je $\alpha_{ij} = 0$ za sve $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$.

Budući da smo pokazali da je $\{E_{ij} : i = 1, \ldots, m, j = 1, \ldots, n\}$ baza prostora $\mathcal{L}(V, W)$, slijedi da je $\dim \mathcal{L}(V, W) = mn$. $\square$

Upravo dokazani teorem pokazuje nam da je $\dim \mathcal{L}(V, W) = nm$, ako označimo $\dim V = n$, $\dim W = m$, a time je $\dim \mathcal{L}(V, W) = \dim M_{mn}(\mathbb{F})$. Imamo prostore jednakih dimenzija nad poljem $\mathbb{F}$ pa su oni po teoremu 6.5.3 izomorfni.

Primijetimo da smo se zapravo u dokazu teorema 6.6.1 i poslužili jednim izomorfizmom kako bismo konstruirali bazu prostora $\mathcal{L}(V, W)$ polazeći od otprije poznate baze prostora matrica $M_{mn}(\mathbb{F})$. Prirodno, izomorfizam između prostora $\mathcal{L}(V, W)$ i $M_{mn}(\mathbb{F})$ uspostavlja se tako da se linearnom operatoru pridruži njegova matrica u izabranom paru baza, a njemu inverzni izomorfizam (njime smo se i poslužili) zapravo je određivanje linearnog operatora na temelju zadane matrice.

Zadatak 6.9. *Neka su V i W vektorski prostori nad poljem $\mathbb{F}$, $\dim V = n$, $\dim W = m$. Označimo s Φ preslikavanje*

$$\Phi : \mathcal{L}(V, W) \to M_{m,n}(\mathbb{F}), \ \Phi(A) = [A]_{(f,e)}.$$

Dokažite da je Φ izomorfizam.
Uputa: Za linearnost preslikavanja Φ zapravo treba provjeriti da je $[A+B]_{(f,e)} = [A]_{(f,e)} + [B]_{(f,e)}$, $[\lambda A]_{(f,e)} = \lambda [A]_{(f,e)}$, za $A, B \in \mathcal{L}(V, W)$, $\lambda \in \mathbb{F}$. Za injektivnost Φ dovoljno je odrediti njegovu jezgru. Provjera surjektivnosti Φ znači da za svaku matricu postoji linearni operator kojem je pridružena upravo ta matrica. Ovo posljednje ujedno pokazuje kako djeluje inverzno preslikavanje Φ^{-1} – njime se iz matrice „pročita" linearni operator. (Dakako, prema korolaru 6.4.12 dovoljno je provjeriti jedno od svojstava – injektivnost ili surjektivnost, budući da znamo da su domena i kodomena prostori jednakih dimenzija.)

Prostori $\mathcal{L}(V)$ i $M_n(\mathbb{F})$ su izomorfni i vrijedi $\Phi(A \circ B) = \Phi(A)\Phi(B)$, odnosno

$$[A \circ B]_{(e)} = [A]_{(e)} [B]_{(e)},$$

što slijedi direktno iz propozicije 6.3.2. Štoviše, vrijedi i općenitije. Ako su $A \in \mathcal{L}(V, W)$, $B \in \mathcal{L}(W, Z)$ te (e), (f) i (g) baze za V, W i Z, redom, onda je

$$[B \circ A]_{(g,e)} = [B]_{(g,f)} [A]_{(f,e)}.$$

(Prethodnu jednakost pokažite primjenom propozicije 6.3.2 na $B \circ A(x)$, za svaki $x \in V$.)

Posebno ćemo još razmotriti linearne operatore čija je kodomena polje. Prisjetimo se, svako polje $\mathbb{F}$ možemo shvatiti kao vektorski prostor nad samim sobom. Jasno je da za bazu možemo uzeti bilo koji skalar λ različit od nule, no najjednostavnije je uzeti $\lambda = 1$. Tu ćemo bazu u $\mathbb{F}$ prirodno označiti s (1).

Definicija 6.6.2. *Neka je V vektorski prostor nad poljem $\mathbb{F}$. Vektorski prostor linearnih operatora $V \to \mathbb{F}$, odnosno $\mathcal{L}(V, \mathbb{F})$ naziva se* ***dualni prostor prostora*** *V i označava s V^*. Elementi prostora V^* nazivaju se* ***linearni funkcionali****.*

Korolar 6.6.3. *Ako je V n-dimenzionalni vektorski prostor, onda je* $\dim V^* = n$.

Neka je $f \in V^*$ te $(e) = \{e_1, \ldots, e_n\}$ baza za V. Tada postoje skalari $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{F}$ takvi da je $f(e_i) = \alpha_i$, $i = 1, \ldots, n$. Prema tome matrica linearnog funkcionala f je

$$[f]_{(1,e)} = (\alpha_1 \, \alpha_2 \, \cdots \, \alpha_n) \in M_{1n}(\mathbb{F}).$$

Ako je $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$, onda

$$f(x) = [f(x)]_{(1)} = [f]_{(1,e)}[x]_{(e)} = (\alpha_1 \, \alpha_2 \, \cdots \, \alpha_n) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^n x_i \alpha_i.$$

Uočili smo da ako je V konačnodimenzionalni vektorski prostor, onda je $\dim V^* = \dim V$. Stoga su V i V^* izomorfni prostori. Želimo uspostaviti što jednostavniji izomorfizam među njima.

Neka je V vektorski prostor nad poljem $\mathbb{F}$ i $\{e_1, \ldots, e_n\}$ njegova baza. Za $1 \leq i \leq n$ definiramo funkcional

$$e_i^* : V \to \mathbb{F},$$

njegovim djelovanjem na bazi

$$e_i^*(e_k) = \delta_{ik} = \begin{cases} 1, & i = k, \\ 0, & i \neq k \end{cases}.$$

Opazimo da je funkcional e_i^* zapravo jednak operatoru E_{1i} koji smo definirali u dokazu teorema 6.6.1 (u slučaju kada je $\dim W = 1$). Stoga je $\{e_1^*, \ldots, e_n^*\}$ baza dualnog prostora V^*, a nazivamo je *dualna baza* za bazu (e). Sada izomorfizam između prostora V i njegova duala V^* možemo definirati kao

$$\Phi : V \to V^*, \ \Phi(e_i) = e_i^*, \ i = 1, \ldots, n.$$

Primijetimo da taj izomorfizam ovisi o izboru baze za prostor V.

Pogledajmo kako funkcional e_k^* djeluje na vektor x, koji je prikazan u bazi $(e) = \{e_1, \ldots, e_n\}$:

$$e_k^*(x) = e_k^*(\sum_{i=1}^n x_i e_i) = \sum_{i=1}^n x_i e_k^*(e_i) = x_k.$$

Dakle, k-ti funkcional iz dualne baze pridružuje vektoru x njegovu k-tu koordinatu u prikazu u bazi (e). Matrični prikaz tog funkcionala u paru baza $(1, e)$ je $(0 \cdots 0 \, 1 \, 0 \cdots 0)$ gdje je 1 na k-tom mjestu.

Primjer 6.15. U primjeru 6.3 bio je zadan linearni operator na prostoru $V^3(O)$ koji djeluje tako da svaki vektor pomnoži skalarno s unaprijed određenim vektorom a. Budući da je kodomena tog linearnog operatora polje $\mathbb{R}$, riječ je o linearnom funkcionalu.

Lako možemo uvidjeti da je taj primjer linearnog funkcionala na konačnodimenzionalnom unitarnom prostoru zapravo tipičan, dakle da se na takvom prostoru djelovanje bilo kojeg linearnog funkcionala može izraziti pomoću skalarnog množenja jednim određenim vektorom. (Ta tvrdnja dio je važnog Rieszovog teorema o reprezentaciji linearnog funkcionala.) Već smo izračunali da linearni funkcional f na konačnodimenzionalnom prostoru V svakom vektoru x pridružuje skalar $f(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i \alpha_i$, pri čemu je x prikazan u bazi $(e) = \{e_1, \dots, e_n\}$, a $f(e_i) = \alpha_i$.

Pretpostavimo da je V realni unitarni prostor i da je (e) ortonormirana baza. Označimo li s a vektor $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i$, pri čemu je ponovno $\alpha_i = f(e_i)$, vidimo da je $f(x) = \langle x|a \rangle$, dakle skalarni produkt x s vektorom a koji ovisi samo o linearnom funkcionalu f (i, dakako, o izboru baze). U slučaju kompleksnog unitarnog prostora razlika je samo u tome što bismo vektor a definirali kao $\sum_{i=1}^{n} \overline{\alpha_i} e_i$.

U ovom primjeru funkcional e_k^* iz dualne baze djeluje kao skalarno množenje vektorom e_k.

♡

Napomena 6.6.4. *Budući da se pridruživanjem dualnog prostora V^* konačnodimenzionalnom vektorskom prostoru V dobiva prostor jednake dimenzije, dakle izomorfan s V, nastavljanjem postupka „dualizacije” nastaje prostor $(V^*)^*$ također izomorfan s V. Između prostora V i njegova tzv.* biduala $(V^*)^* = V^{**}$ *može se ustanoviti* prirodni *izomorfizam, tj. izomorfizam koji ne ovisi o izboru baze:*

$$\Psi : V \to V^{**}, \;\; \Psi(a) = u_a, \;\; a \in V,$$

gdje je $u_a : V^* \to \mathbb{F}$, $u_a(f) = f(a)$.

Odatle se zapravo vidi da se daljnjom dualizacijom ne dobivaju „bitno novi” prostori jer se bidual V^{**} može prirodno poistovjetiti s prostorom V.

Zadatak 6.10. *Odredite dualnu bazu baze $\{a, b, c\}$ prostora $\mathbb{R}^3$, pri čemu je $a = (1, 1, -1)$, $b = (1, -1, 1)$, $c = (-1, 1, 1)$.*

Uputa: Linearni funkcional a^* možemo izračunati kao linearnu kombinaciju funkcionala e_1^*, e_2^*, e_3^* koji čine bazu dualnu kanonskoj bazi prostora $\mathbb{R}^3$. Neka je $a^* = \alpha_1 e_1^* + \alpha_2 e_2^* + \alpha_3 e_3^*$. Koeficijente α_i odredimo iz sustava linearnih jednadžbi koji dobijemo tako da s a^* redom djelujemo na vektore a, b i c: $a^*(a) = 1$, $a^*(b) = 0$ i $a^*(c) = 0$. Sustav jednadžbi glasi $\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 = 1$, $\alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 = 0$ i $-\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0$, a njegovo je rješenje $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0)$. Stoga je

$$a^*(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{2} e_1^*(x_1, x_2, x_3) + \frac{1}{2} e_2^*(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{2}(x_1 + x_2).$$

Analogno odredimo b^* i c^*.

6.7 Matrični zapis linearnog operatora u različitim bazama

Propozicija 6.7.1. *Neka je $A \in \mathcal{L}(V, W)$, gdje je $\dim V = n$, $\dim W = m$ te $[A]_{(f,e)} \in M_{mn}(\mathbb{F})$ matrični prikaz operatora A u paru baza (e) i (f) za prostore V i W. Tada je rang operatora A jednak rangu matrice $[A]_{(f,e)}$, to jest*

$$r(A) = r([A]_{(f,e)}).$$

Dokaz. Neka su $(e) = \{e_1, \ldots, e_n\}$ i $(f) = \{f_1, \ldots, f_m\}$ baze za V i W. Prisjetimo se, rang operatora A je dimenzija slike operatora A, odnosno $r(A) = \dim S(A)$. Prema propoziciji 6.4.9 znamo da je skup $\{A(e_1), \ldots, A(e_n)\}$ sustav izvodnica za sliku $S(A)$ jer je $\{e_1, \ldots, e_n\}$ baza za V. Stoga je

$$r(A) = \dim[A(e_1), \ldots, A(e_n)].$$

S druge strane, rang matrice $[A]_{(f,e)}$ se definira kao

$$r([A]_{(f,e)}) = \dim[S_1, \ldots, S_n],$$

gdje je $(S_1, \ldots, S_n) \in M_{m1}(\mathbb{F})^n$ stupčana reprezentacija matrice $[A]_{(f,e)}$. Sada ustanovimo preslikavanje

$$\Phi : W \to M_{m1}(\mathbb{F}), \Phi(y) = [y]_{(f)} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_m \end{pmatrix},$$

gdje je $y = \sum_{i=1}^{m} \beta_i f_i \in W$ prikaz vektora y u bazi (f). Očito je Φ izomorfizam (jer preslikava bazu prostora W u bazu prostora $M_{m1}(\mathbb{F})$). Nadalje, Φ preslikava

$$A(e_1) \mapsto S_1, \ \ldots, A(e_n) \mapsto S_n,$$

a kako je Φ izomorfizam, potprostor $[A(e_1), \ldots, A(e_n)]$ preslikava se u njemu izomorfan potprostor $[S_1, \ldots, S_n]$ (– vidi zadatak 6.7). Stoga slijedi

$$\dim[A(e_1), \ldots, A(e_n)] = \dim[S_1, \ldots, S_n],$$

čime smo dokazali tvrdnju. □

Definicija 6.7.2. *Neka su $(e) = \{e_1, \ldots, e_n\}$ i $(e') = \{e'_1, \ldots, e'_n\}$ baze vektorskog prostora V nad poljem $\mathbb{F}$. Matrica*

$$T = \begin{pmatrix} \tau_{11} & \cdots & \tau_{1n} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ \tau_{n1} & \cdots & \tau_{nn} \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{F}),$$

gdje su elementi matrice T koeficijenti iz prikaza vektora e'_j u bazi (e), odnosno

$$e'_j = \sum_{i=1}^{n} \tau_{ij} e_i, \; j = 1, \dots, n,$$

naziva se ***matrica prijelaza*** *iz baze (e) u bazu (e').*

Matrica prijelaza T je regularna matrica. Naime, možemo je shvatiti kao matricu operatora s V u V koji preslikava $e_i \mapsto e'_i$, $i = 1, \dots, n$ u bazi (e). Budući da je tako definiran operator izomorfizam, slijedi da mu je rang jednak n, pa prema propoziciji 6.7.1 zaključujemo da je i matrica T ranga n, odnosno punog ranga, dakle regularna.

Uočimo da matricu T možemo shvatiti i kao matrični zapis jediničnog operatora $I : V \to V$ u paru baza (e) i (e'), odnosno

$$T = [I]_{(e,e')}.$$

Pretpostavimo sada da vektor $x \in V$ ima sljedeće prikaze u bazi (e), odnosno (e'),

$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i, \; x = \sum_{j=1}^{n} x'_j e'_j.$$

Ispitat ćemo u kakvoj su vezi *stare* koordinate $(x_1, \dots, x_n)$ s *novim* koordinatama $(x'_1, \dots, x'_n)$. Vrijedi

$$x = \sum_{j=1}^{n} x'_j e'_j = \sum_{j=1}^{n} x'_j (\sum_{i=1}^{n} \tau_{ij} e_i) = \sum_{i=1}^{n} (\sum_{j=1}^{n} \tau_{ij} x'_j) e_i.$$

Dakle,

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} \tau_{ij} x'_j, \; i = 1, \dots, n,$$

što matrično možemo zapisati kao

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tau_{11} & \cdots & \tau_{1n} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ \tau_{n1} & \cdots & \tau_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}$$

ili kraće

$$[x]_{(e)} = T \cdot [x]_{(e')}.$$

Budući da je T regularna matrica, možemo izvesti jednostavnu formulu za određivanje novih koordinata vektora x.

Propozicija 6.7.3. *Neka su (e) i (e') dvije baze konačnodimenzionalnog vektorskog prostora V te T matrica prijelaza iz baze (e) u bazu (e'). Tada je*

$$[x]_{(e')} = T^{-1} \cdot [x]_{(e)}.$$

Vidimo da se koordinate vektora u „novoj" bazi lako izračunavaju, ali treba pripaziti da se stupac koordinata u „staroj" bazi pritom množi *inverznom* matricom matrice prijelaza. Ujedno, T^{-1} je očito matrica prijelaza iz baze (e') u bazu (e).

Za izvod prethodnih relacija isto tako može nam poslužiti propozicija 6.3.2 u kojoj imamo općenitu formulu za djelovanje operatora $A : V \to W$ pomoću njegova matričnog prikaza u paru baza (e) i (f). Ovdje promatramo posebni slučaj u kojem jedinični operator $I : V \to V$ ima matricu $T = [I]_{(e,e')}$ pa vrijedi

$$[I(x)]_{(e)} = [I]_{(e,e')}[x]_{(e')},$$

odnosno

$$[x]_{(e)} = T[x]_{(e')}.$$

Analogno,

$$[I(x)]_{(e')} = [I]_{(e',e)}[x]_{(e)},$$

odnosno

$$[x]_{(e')} = T^{-1}[x]_{(e)}.$$

Nadalje, izvest ćemo relaciju između matričnih prikaza linearnog operatora u dvama različitim parovima baza, dakle u općem slučaju kad je moguća promjena i baze domene i baze kodomene. U toj će se relaciji morati onda pojaviti dvije matrice prijelaza.

Propozicija 6.7.4. *Neka su V i W konačnodimenzionalni vektorski prostori nad istim poljem, (e) i (e') baze za V te (f) i (f') baze za W. Ako je $A \in \mathcal{L}(V, W)$, tada vrijedi*

$$[A]_{(f',e')} = S^{-1} \cdot [A]_{(f,e)} \cdot T,$$

gdje je $T \in M_n(\mathbb{F})$ matrica prijelaza iz baze (e) u bazu (e'), a $S \in M_m(\mathbb{F})$ matrica prijelaza iz baze (f) u bazu (f'), pri čemu je $\dim V = n$, a $\dim W = m$.

Dokaz. Prema propoziciji 6.7.3 za $x \in V$ i $Ax \in W$ vrijedi

$$[x]_{(e)} = T \cdot [x]_{(e')},\ [Ax]_{(f')} = S^{-1} \cdot [Ax]_{(f)}.$$

Nadalje,

$$[Ax]_{(f')} = [A]_{(f',e')}[x]_{(e')},\ [Ax]_{(f)} = [A]_{(f,e)}[x]_{(e)},$$

pa je

$$[A]_{(f',e')}[x]_{(e')} = S^{-1}([A]_{(f,e)}[x]_{(e)}) = S^{-1}([A]_{(f,e)}T[x]_{(e')}) = (S^{-1}[A]_{(f,e)}T)[x]_{(e')}.$$

Kako prethodna jednakost vrijedi za svaki $x \in V$, odnosno $[x]_{(e')} \in M_{n1}(\mathbb{F})$, vrijedi

$$[A]_{(f',e')} = S^{-1}[A]_{(f,e)}T.$$

Naglasimo da izjednačavanje matrica na lijevoj i desnoj strani prethodno dobivene jednakosti ne možemo provesti nikakvim „skraćivanjem" s vektor-stupcem $[x]_{(e')}$ koji se pojavljuje s obje strane. Važno je da jednakost vrijedi za svaki vektor x, a time i za svaki vektor stupac $[x]_{(e')}$. Naime, ako su $A, B \in M_{mn}(\mathbb{F})$ takve da je $AX = BX$ za sve $X \in M_{n1}(\mathbb{F})$, tada je prostor rješenja jednadžbe $(A - B)X = 0$, to jest odgovarajućeg homogenog sustava, jednak cijelom prostoru $M_{n1}(\mathbb{F})$, odnosno dimenzije je n. Dakle, rang matrice $A - B$ je 0, to jest $A - B$ je nulmatrica. $\square$

Primjer 6.16. Neka na prostoru $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ djeluje operator deriviranja D. Za kodomenu možemo uzeti prostor $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ jer se deriviranjem snižava stupanj polinoma. Dakle, $D : \mathcal{P}_3(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$. U paru kanonskih baza $(e) = \{1, t, t^2, t^3\}$ i $(f) = \{1, t, t^2\}$ operatoru D pridružena je matrica

$$[D]_{(f,e)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Kao bazu (e') prostora $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ uzmimo potencije polinoma $t - 2$, dakle $\{1, t - 2, (t - 2)^2, (t - 2)^3\}$. Matrica prijelaza T iz (e) u (e') glasi:

$$T = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 & -8 \\ 0 & 1 & -4 & 12 \\ 0 & 0 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Za bazu (f') prostora $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ izaberimo bazu $\{1, t, t^2 - \frac{1}{3}\}$. (Inače, to je ortogonalna baza u skalarnom produktu zadanom pomoću integrala na segmentu $[-1, 1]$, što ovdje nema posebnu važnost, samo je izabrana kao baza koja se katkad doista primjenjuje.) Matrica prijelaza S iz (f) u (f') je

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

U paru baza (e'), (f') operator D ima matrični prikaz $S^{-1}D_{(f,e)}T$. Kako je

$$S^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

dobivamo:

$$[D]_{(f',e')} = S^{-1}[D]_{(f,e)}T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -4 & 13 \\ 0 & 0 & 2 & -12 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Testirajmo dobiveni rezultat na konkretnom polinomu, npr. na

$$p(t) = 1 + (t - 2) + (t - 2)^2 + (t - 2)^3.$$

Deriviranjem polinoma p dobivamo

$$(Dp)(t) = 1 + 2(t - 2) + 3(t - 2)^2 = 9 - 10t + 3t^2.$$

S druge strane, množenjem matrice $[D]_{(f',e')}$ vektor stupcem $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ koji predstavlja zapis polinoma p u bazi (e') dobivamo

$$[D]_{(f',e')}[p]_{(e')} = \begin{pmatrix} 10 \\ -10 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

U bazi (f') ovo je zapis polinoma $10 - 10t + 3(t^2 - \frac{1}{3}) = 9 - 10t + 3t^2$, što se podudara s već izračunatim polinomom $(Dp)(t)$.

♡

Tvrdnju propozicije 6.7.4 mogli smo dokazati i pomoću kompozicije operatora $A \in \mathcal{L}(V, W)$ s jediničnim operatorima na V i W, I_V i I_W . Naime,

$$A = A \circ I_V = I_W \circ A$$

te

$$[A \circ I_V]_{(f',e)} = [I_W \circ A]_{(f',e)}.$$

Dakle,

$$[A]_{(f',e')}[I_V]_{(e',e)} = [I_W]_{(f',f)}[A]_{(f,e)}. \tag{6.5}$$

Već smo uočili da se matrica prijelaza iz baze (e) u bazu (e') može interpretirati kao

$$T = [I_V]_{(e,e')},$$

pa je analogno matrica prijelaza iz baze (f) u bazu (f') jednaka

$$S = [I_W]_{(f,f')}.$$

Stoga (6.5) pišemo kao

$$[A]_{(f',e')}T^{-1} = S^{-1}[A]_{(f,e)},$$

to jest

$$[A]_{(f',e')} = S^{-1}[A]_{(f,e)}T.$$

Prema propoziciji 6.7.4 zaključujemo da su matrični zapisi istog linearnog operatora iz $\mathcal{L}(V, W)$ *ekvivalentne* matrice. Iz Linearne algebre 1 znamo da su matrice $A, B \in M_{mn}(\mathbb{F})$ ekvivalentne ako i samo ako postoje regularne matrice $S \in M_m(\mathbb{F})$ i $T \in M_n(\mathbb{F})$ za koje je $B = SAT$. Ekvivalentne matrice imaju isti rang pa bi se rang linearnog operatora mogao definirati i kao rang nekog (bilo kojeg) njegova matričnog prikaza. Za veličine koje se linearnom operatoru mogu pridružiti uz pomoć baza pa onda i izračunavati uz pomoć baza, ali ne ovise o izboru baza, kažemo da su *invarijante* linearnog operatora. Uskoro ćemo upoznati još neke od njih.

Iz propozicije 6.7.4 izravno slijedi:

Korolar 6.7.5. *Neka je V konačnodimenzionalni vektorski prostor te (e) i (e') baze za V. Ako je $A \in \mathcal{L}(V)$, tada vrijedi*

$$[A]_{(e')} = T^{-1} \cdot [A]_{(e)} \cdot T,$$

gdje je T matrica prijelaza iz baze (e) u bazu (e').

Definicija 6.7.6. *Neka su $A, B \in M_n(\mathbb{F})$. Kažemo da je matrica A* ***slična*** *matrici B ako postoji regularna matrica $T \in M_n(\mathbb{F})$ takva da vrijedi*

$$B = T^{-1}AT.$$

Često ćemo kratko reći da su matrice A i B slične jer se lako vidi da je relacija sličnosti na $M_n(\mathbb{F})$ simetrična. Nadalje, iz same definicije sličnosti matrica slijedi da su slične matrice i ekvivalentne, dok obrat očito ne vrijedi. Primjerice, jedinična matrica I reda n slična je samo sama sebi jer za bilo koju regularnu matricu T reda n vrijedi $T^{-1}IT = I$, dok je I ekvivalentna svakoj regularnoj matrici reda n s obzirom na to da su matrice jednakog tipa ekvivalentne ako i samo ako imaju isti rang. Dakako, slične matrice imaju jednak rang.

Iz korolara 6.7.5 slijedi da su matrični zapisi istog linearnog operatora iz $\mathcal{L}(V)$ slične matrice. To je vrlo važna činjenica na koju ćemo se često pozivati.

Iz Linearne algebre 1 također znamo da je ekvivalentnost matrica relacija ekvivalencije na skupu matrica $M_{mn}(\mathbb{F})$ za bilo koje $m, n \in \mathbb{N}$ (propozicija 2.4.7). Pojedinu klasu ekvivalencije tada čine sve matrice tipa (m, n) kojima se podudara rang. Standardni predstavnik pojedine klase je kanonska matrica određenog ranga r. Sad ćemo pokazati da je i sličnost kvadratnih matrica relacija ekvivalencije, dakako na skupu $M_n(\mathbb{F})$, za bilo koji n, a zatim ćemo usporediti klase ekvivalencije relacije sličnosti s prethodno spomenutim klasama za relaciju ekvivalentnosti matrica.

Propozicija 6.7.7. *Relacija* biti sličan *je relacija ekvivalencije na skupu svih kvadratnih matrica istog reda.*

Dokaz. Pokažimo redom svojstva relacije ekvivalencije.
Refleksivnost. Matrica A je slična samoj sebi jer je $A = I^{-1}AI$, I jedinična matrica.
Simetričnost. Ako su A i B slične matrice, postoji regularna matrica T takva da je $B = T^{-1}AT$. Množenjem prethodne jednakosti s T^{-1} s desna te s T lijeva slijedi $TBT^{-1} = A$, odnosno $A = (T^{-1})^{-1}BT^{-1} = A$, pa su B i A slične.
Tranzitivnost. Ako je A slična s B te B slična s C, postoje regularne matrice T, S takve da je $B = T^{-1}AT$ i $C = S^{-1}BS$. Kako je i TS regularna matrica te $C = S^{-1}(T^{-1}AT)S = (TS)^{-1}A(TS)$, zaključujemo da je i A slična s C. $\square$

Razmotrimo kako relacija sličnosti rastavlja skup $M_n(\mathbb{F})$ u klase ekvivalencije. Relacija sličnosti „finija" je od relacije u kojoj sve matrice iz $M_n(\mathbb{F})$ kojima je rang jednak čine jednu klasu. Unutar skupa matrica jednakog ranga r nalaze se i matrice koje jesu slične, kao i neke matrice koje nisu slične. To vidimo već na primjeru kvadratnih matrica punog ranga n. Svaka skalarna matrica αI, $\alpha \neq 0$, slična je samo sebi pa je jedini član svoje klase. S druge strane, sve te matrice pripadaju istoj klasi ekvivalentnih matrica ranga n. Možemo to dodatno protumačiti ako matrice promatramo kao matrične prikaze linearnih operatora iz $\mathcal{L}(V)$, $\dim V = n$. Svaki bijektivni linearni operator ima, u bilo kojoj bazi, matricu punog ranga n, ali različiti bijektivni operatori djeluju na bitno različite načine koji se nipošto ne mogu odrediti samo podatkom o rangu. Tek sličnost pridruženih matrica, kao znatno „finiji" podatak, pokazuje jesu li to matrice pridružene istom linearnom operatoru, samo u različitim bazama.

Primjer 6.17. Sljedeće matrice reda 2

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

imaju rang 2 i međusobno su ekvivalentne, ali nikoje dvije od njih nisu slične. To nas i ne čudi uzmemo li u obzir njihov geometrijski smisao ako su pridružene na standardni način operatorima: zrcaljenjem, centralnom simetrijom (ili rotacijom za kut π) i rotacijom za kut $\pi/3$ na prostoru $V^2(O)$. Promjenom baze tog prostora prva i treća matrica bit će zamijenjene nekim drugim, ali njima sličnim matricama, dok će operatoru centralne simetrije u bilo kojoj bazi pripadati ista matrica $-I$, slična jedino sama sebi.

♡

Važno je pitanje kako prepoznati, to jest izračunati jesu li neke dvije kvadratne matrice slične, dakle mogu li biti pridružene istom linearnom operatoru a da pritom, po mogućnosti, ne moramo efektivno određivati matricu prijelaza T pomoću koje je ostvarena sličnost. Vidjet ćemo da slične matrice imaju još neka zajednička svojstva koja su nužni, premda ne i dovoljni uvjeti za sličnost. Zapravo je riječ o *invarijantama* linearnog operatora, veličinama odnosno funkcijama koje moraju poprimati istu vrijednost za sve slične matrice s obzirom na to da su pridružene jednom linearnom operatoru. Ukratko, invarijante linearnog operatora neovisne su o konkretnom izboru matričnog prikaza linearnog operatora.

Propozicija 6.7.8. *Slične matrice imaju jednaku determinantu.*

Dokaz. Neka su A i B slične matrice te T regularna matrica za koju je $B = T^{-1}AT$. Tada zbog *Binet-Cauchyjeva teorema* dobivamo

$$\begin{aligned} \det B &= \det(T^{-1}AT) = \det T^{-1} \det A \det T = \det A (\det T^{-1} \det T) \\ &= \det A \underbrace{\det T^{-1}T}_{\det I = 1} = \det A. \end{aligned}$$

□

Obrat prethodne propozicije ne vrijedi. Na primjer, matrice

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

imaju jednaku determinantu. Ako bi one bile slične, postojala bi regularna matrica T takva da je $A = T^{-1}IT = I$, što je očita neistina.

Budući da su matrice istog linearnog operatora iz $\mathcal{L}(V)$ u različitim bazama slične, propozicija 6.7.8 omogućuje nam definiciju još jedne invarijante linearnog operatora.

Definicija 6.7.9. *Neka je $A \in \mathcal{L}(V)$ te (e) neka baza za V. Tada se* ***determinanta linearnog operatora*** *A definira kao determinanta matričnog zapisa operatora A u bazi (e), to jest*

$$\det A = \det[A]_{(e)}.$$

Vidimo, dakle, da je linearnom operatoru A na prostoru V na taj način pridružena vrijednost determinante kao determinanta njegove matrice u bilo kojoj bazi i ta je definicija korektna jer, zahvaljujući propoziciji 6.7.8 , $\det A$ ne ovisi o izboru baze.

Primjer 6.18. Analogno kao za determinantu, linearnom operatoru na konačnodimenzionalnom prostoru V može se pridružiti i *trag*, kao trag njegova matričnog zapisa u bilo kojoj bazi (e). Prisjetimo se, trag kvadratne matrice $A = [a_{ij}] \in M_n(\mathbb{F})$ definira se kao zbroj svih elemenata dijagonale:

$$\operatorname{tr} A = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}.$$

Definicija traga linearnog operatora bit će korektna ako se vrijednosti traga sličnih matrica podudaraju. Provjerite to.
(*Uputa*: Nije teško provjeriti da za bilo koje matrice $A, T \in M_n(\mathbb{F})$ vrijedi $\operatorname{tr}(AT) = \operatorname{tr}(TA)$. Ako je T regularna matrica, primijenite prethodnu jednakost na matrice AT i T^{-1}.)

♡

Zadatak 6.11. *Pronađite, ako je moguće, matrice $A, B \in M_2(\mathbb{R})$ takve da vrijedi $r(A) = r(B)$, $\det A = \det B$ i $\operatorname{tr} A = \operatorname{tr} B$, ali da A i B nisu slične.*

Zadatak 6.12. *Odredite skup svih realnih antisimetričnih matrica reda 2 koje su slične:*

(a) svojoj transponiranoj matrici,

(b) svojoj inverznoj matrici.

Uputa. Svaka antisimetrična matrica A reda 2 slična je svojoj transponiranoj. Naime, izravno se mogu odrediti regularne matrice T reda 2 takve da vrijedi $AT = -TA$, za sve antisimetrične matrice A reda 2.

Svaka antisimetrična matrica reda 2, osim nulmatrice, regularna je pa se može tražiti takva regularna matrica T da vrijedi $T^{-1}AT = A^{-1}$, odnosno ekvivalentno tome $ATA = T$. Račun pokazuje da T postoji samo za $A = \pm \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

6.8 Svojstvene vrijednosti i svojstveni vektori linearnog operatora

Neka je $A \in \mathcal{L}(V)$, pri čemu je V vektorski prostor nad poljem $\mathbb{F}$ ne nužno konačnodimenzionalan. Neki vektori iz prostora V i neki skalari iz $\mathbb{F}$ mogu imati posebno istaknutu ulogu za djelovanje operatora A. Poznavanje takvih vektora i skalara može uvelike doprinijeti tumačenju kako djeluje linearni operator te kako izabrati negu pogodnu bazu prostora V, ako je konačnodimenzionalan, da bi matrični prikaz operatora bio što jednostavniji.

Riječ je o vektorima $x \in V$ takvima da slika Ax ima jednak „smjer" kao vektor x, to jest takvima da postoji neki $\lambda \in \mathbb{F}$ sa svojstvom $Ax = \lambda x$. Pritom nulvektor 0_V nije od interesa jer se uvijek preslika u 0_V pa se isključuje iz razmatranja, odnosno iz definicije koja će uslijediti nakon primjera.

Uzmimo geometrijski primjer zrcaljenja A s obzirom na neki dvodimenzionalni potprostor L prostora $V^3(O)$. Za svaki $\vec{x} \in L$ vrijedi $A\vec{x} = \vec{x}$, a za svaki $\vec{x}$ ortogonalan na L vrijedi $A\vec{x} = -\vec{x}$. Dakle, zrcaljenje „čuva" svaki smjer u potprostoru L (na jednostavan način, restrikcija na L mu je jedinični operator), kao i smjer ortogonalan na L, preslikavajući svaki $\vec{x} \in L^{\perp}$ u njemu suprotni vektor. U ovom primjeru ako bazu prostora V izaberemo tako da su prva dva vektora iz L, a treći ortogonalan na L, djelovanje operatora A u potpunosti je prepoznatljivo kao zrcaljenje, a matrični prikaz u takvoj bazi je dijagonalna matrica $\mathrm{diag}(1, 1, -1)$. Naravno, da nam je isti operator zadan matricom u nekoj općenitoj bazi čiji vektori nemaju posebnu ulogu za njegovo djelovanje, imali bismo dosta posla da ustanovimo kako zapravo djeluje taj operator i da prepoznamo zrcaljenje.

Definicija 6.8.1. *Neka je V vektorski prostor nad poljem $\mathbb{F}$ i $A \in \mathcal{L}(V)$. Za skalar $\lambda \in \mathbb{F}$ kažemo da je* ***svojstvena*** *ili* ***karakteristična vrijednost*** *operatora A ako postoji vektor $x \in V$, različit od 0_V, takav da vrijedi $Ax = \lambda x$. Taj vektor naziva se* ***svojstveni*** *ili* ***karakteristični vektor*** *operatora A, pridružen svojstvenoj (karakterističnoj) vrijednosti λ.*

(Za svojstveni vektor, odnosno svojstvenu vrijednost još se rabe nazivi *vlastiti* vektor, odnosno *vlastita* vrijednost. Engleski nazivi za te pojmove su *eigenvector* i *eigenvalue.*)

Uočimo da smo u primjeru zrcaljenja lako prepoznali svojstvene vrijednosti 1 i -1. Svaki vektor iz L različit od 0_V svojstveni je vektor pridružen svojstvenoj vrijednosti 1, a svaki vektor iz $L^{\perp}$ različit od 0_V svojstveni je vektor pridružen svojstvenoj vrijednosti -1. Geometrijski je jasno, a može se i izračunati da su to jedine svojstvene vrijednosti i svojstveni vektori zrcaljenja. Naime, svaki $\vec{v} \in V^3(O)$ može se prikazati kao $\vec{v} = \vec{y} + \vec{z}$, pri čemu $\vec{y} \in L$, $\vec{z} \in L^{\perp}$. Zato je $A\vec{v} = A\vec{y} + A\vec{z} = \vec{y} - \vec{z}$. Ako bi postojao neki $\lambda \in \mathbb{F}$ takav da vrijedi $A\vec{v} = \lambda\vec{v}$, imali bismo $\vec{y} - \vec{z} = \lambda(\vec{y} + \vec{z})$ i odatle $(1 - \lambda)\vec{y} = (1 + \lambda)\vec{z}$. To je moguće samo ako je $\lambda = 1$ i $\vec{z} = \vec{0}$ ili ako $\lambda = -1$ i $\vec{y} = \vec{0}$, odnosno ako $\vec{y} = \vec{z} = \vec{0}$, no tada je $\vec{v} = \vec{0}$ pa $\vec{v}$ u tom slučaju nije svojstveni vektor.

U daljnjem izlaganju pretpostavljamo da su svi promatrani vektorski prostori konačno-dimenzionalni.

Definicija 6.8.2. *Skup svih svojstvenih vrijednosti linearnog operatora A naziva se* ***spektar*** *i označava sa $\sigma(A)$.*

Iz same definicije je jasno da je spektar podskup polja $\mathbb{F}$, $\sigma(A) \subseteq \mathbb{F}$. No spektar može biti i prazan skup kao što ćemo vidjeti na primjeru rotacije u $V^2(O)$ za kut različit od $k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Naime, zakret svakog vektora za kut koji nije višekratnik od π očito svaki vektor $\vec{v} \neq \vec{0}$ preslika u vektor smjera različitog od $\vec{v}$.

Napomenimo da smo u definiciji pojmova svojstvenih vrijednosti i svojstvenih vektora mogli krenuti i obrnuto, to jest za vektor $x \in V$, $x \neq 0_V$ kažemo da je *svojstveni* ili *karakteristični vektor* operatora A ako postoji skalar $\lambda \in \mathbb{F}$ takav da vrijedi $Ax = \lambda x$. No ako je $\lambda \in \sigma(A)$ i x bilo koji svojstveni vektor pridružen svojstvenoj vrijednosti λ, x nije jedinstven, nego je i svaki αx, $\alpha \in \mathbb{F}\backslash\{0\}$ također svojstveni vektor pridružen svojstvenoj vrijednosti λ. Štoviše, svakom $\lambda \in \sigma(A)$ pridružen je na taj način cijeli potprostor (vidi propoziciju 6.8.6).

Sada ćemo se pozabaviti određivanjem svojstvenih vrijednosti danog operatora na konačno-dimenzionalnom vektorskom prostoru. Dakle, neka je V n-dimenzionalni vektorski prostor i $A \in \mathcal{L}(V)$. Tražimo $\lambda \in \mathbb{F}$ takav da je

$$A(x) = \lambda x \tag{6.6}$$

za neki $x \in V\backslash\{0_V\}$. Odatle je

$$A(x) - \lambda x = 0_V,$$

odnosno

$$A(x) - \lambda I(x) = 0_V,$$

gdje je I jedinični operator na V. Po definiciji zbrajanja i množenja skalarom na prostoru $\mathcal{L}(V)$ vrijedi

$$(A - \lambda I)(x) = 0_V,$$

gdje je $A - \lambda I$ linearni operator, odnosno element prostora $\mathcal{L}(V)$. Zaključujemo da ako postoji vektor $x \neq 0_V$ takav da vrijedi (6.6), tada je on nužno iz jezgre operatora $A - \lambda I$. Nadalje vidimo da jezgra operatora $A - \lambda I$ nije trivijalna, odnosno operator $A - \lambda I$ nije monomorfizam pa mu je defekt pozitivan, odnosno $d(A - \lambda I) \geq 1$. Stoga $A - \lambda I$ nije regularni operator pa mu je determinanta jednaka nuli, $\det(A - \lambda I) = 0$.

Konačno možemo rezimirati:

Propozicija 6.8.3. *Neka je $A \in \mathcal{L}(V)$. Ako je $\lambda_0 \in \mathbb{F}$ svojstvena vrijednost operatora A, onda je λ_0 rješenje algebarske jednadžbe* $\det(A - \lambda I) = 0$.

Prisjetimo se, determinanta linearnog operatora definira se kao determinanta matričnog zapisa tog operatora u nekoj bazi. Dakle, ako je (e) baza za V, tada je

$$\det(A-\lambda I)=\det[A-\lambda I]_{(e)}=\det([A]_{(e)}-\lambda I),$$

gdje smo s I označili i jediničnu matricu. Ovdje je važno uočiti da $\det(A-\lambda I)$ predstavlja jedan polinom stupnja $n=\dim V$ u varijabli λ. Naime, pri izračunavanju determinante matrice $[A]_{(e)}-\lambda I=[a_{ij}-\lambda\delta_{ij}]$ varijabla λ će se pojaviti u svakom članu koji sadrži barem jedan element dijagonale s obzirom na to da su svi oni oblika $a_{ii}-\lambda$. Prvi član determinante jednak je umnošku elemenata na dijagonali: $(a_{11}-\lambda)\cdots(a_{nn}-\lambda)$ u kojem se stoga pojavljuje $(-\lambda)^n=(-1)^n\lambda^n$ i to je vodeći član polinoma s obzirom na to da se samo u prvom članu determinante λ pojavljuje u svakom faktoru.

Definicija 6.8.4. *Neka je $A\in\mathcal{L}(V)$. Polinom $k_A(\lambda)=\det(A-\lambda I)$ naziva se* ***karakteristični*** *ili* ***svojstveni polinom*** *operatora A.*

Dana definicija pojma koji je vezan uz linearni operator $A\in\mathcal{L}(V)$ korektna je stoga što ne ovisi o izboru baze pomoću koje se izračunava razmatrani polinom (kao i primjerice definicija determinante takvog operatora). Naime, ako je $[A]_{(e')}$ matrica operatora A u nekoj drugoj bazi (e'), matrice $[A]_{(e)}$ i $[A]_{(e')}$ su slične, a odatle lako slijedi da su slične i matrice $[A-\lambda I]_{(e)}$ i $[A-\lambda I]_{(e')}$. Zaista, ako je T regularna matrica takva da je

$$[A]_{(e')}=T^{-1}[A]_{(e)}T,$$

imamo

$$T^{-1}[A-\lambda I]_{(e)}T=T^{-1}[A]_{(e)}T-\lambda T^{-1}IT=[A]_{(e')}-\lambda I=[A-\lambda I]_{(e')}.$$

Prema propoziciji 6.7.8

$$\det[A-\lambda I]_{(e)}=\det[A-\lambda I]_{(e')}$$

pa karakteristični polinom operatora A ne ovisi o izboru baze pomoću koje je izračunat. Vidimo, dakle, da je i karakteristični polinom invarijanta linearnog operatora $A\in\mathcal{L}(V)$. Naglasimo da to posebno znači da je svaki koeficijent karakterističnog polinoma invarijanta operatora A. (Vidi primjer 6.21.)

Smisleno je i za matricu $A\in M_n(\mathbb{F})$ definirati *karakteristični polinom matrice A*:

$$k_A(\lambda)=\det(A-\lambda I).$$

Teorem 6.8.5. *Neka je V n-dimenzionalni vektorski prostor nad poljem $\mathbb{F}$ i $A\in\mathcal{L}(V)$. Skalar λ_0 je svojstvena vrijednost operatora A ako i samo ako je λ_0 nultočka karakterističnog polinoma $k_A(\lambda)$ i $\lambda_0\in\mathbb{F}$.*

Dokaz. Nužnost je pokazana propozicijom 6.8.3.

Sada pretpostavimo da je $\lambda_0 \in \mathbb{F}$ nultočka karakterističnog polinoma $k_A(\lambda)$, odnosno $\det(A-\lambda_0 I) = 0$. Stoga operator $A-\lambda_0 I$ nije regularan, što je ekvivalentno s činjenicom da nije monomorfizam (prema korolaru 6.4.12). Dakle, $J(A-\lambda_0 I) \neq \{0_V\}$, pa postoji $x \in J(A-\lambda_0 I)$, $x \neq 0_V$. Imamo $(A-\lambda_0 I)x = 0_V$, odnosno $Ax = \lambda_0 x$, što zbog $x \neq 0_V$ upravo znači da je x svojstveni vektor pridružen svojstvenoj vrijednosti λ_0. □

Primjer 6.19. Neka je $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ zadan svojim djelovanjem na kanonskoj bazi:

$$A(1,0) = (3,2),\ \ A(0,1) = (2,3).$$

Operator A u kanonskoj bazi (e) ima matricu: $[A]_{(e)} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$. Odredimo mu karakteristični polinom i spektar.

$$k_A(\lambda) = \det(A-\lambda I) = \det([A]_{(e)} - \lambda I) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 \\ 2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)^2 - 4 = \lambda^2 - 6\lambda + 5.$$

Očito su nultočke karakterističnog polinoma $k_A(\lambda)$, $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 5$. Dakle, $\sigma(A) = \{1,5\}$.

U prethodnom primjeru linearni operator A zadan je na realnom vektorskom prostoru, a obje nultočke karakterističnog polinoma su realni brojevi. Stoga ta dva broja jesu svojstvene vrijednosti operatora A jer ispunjavaju uvjete iz teorema 6.8.5.

Obratimo pozornost na uvjet da nultočka λ_0 karakterističnog polinoma mora biti skalar iz polja $\mathbb{F}$, nad kojim je definiran vektorski prostor V, kako bi taj skalar bio svojstvena vrijednost linearnog operatora. Naime, karakteristični polinom ne mora općenito imati sve svoje nultočke u polju $\mathbb{F}$. Štoviše, ne mora imati nijednu nultočku u tom polju, premda može imati nultočku u nekom polju koje sadrži $\mathbb{F}$. Tipični i za nas najvažniji primjeri odnose se na polja $\mathbb{R}$ i $\mathbb{C}$. Prema osnovnom teoremu algebre svaki polinom stupnja barem 1 s kompleksnim koeficijentima ima barem jednu nultočku u polju kompleksnih brojeva. Poznato nam je, međutim, da postoje polinomi s realnim koeficijentima koji nemaju nijednu realnu nultočku. Takvi su, primjerice, polinomi t^2+1 i t^4+3. Sljedeći primjer pokazat će kako se takav polinom može pojaviti kao karakteristični polinom linearnog operatora, dobro poznatog iz geometrije euklidske ravnine.

Primjer 6.20. Neka je $R \in \mathcal{L}(V^2(O))$ rotacija za $\pi/3$ oko O. Odredimo joj karakteristični polinom i spektar. Kako je

$$[R]_{(e)} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

pri čemu je (e) kanonska baza za $V^2(O)$, karakteristični polinom od R je

$$k_R(\lambda) = \det(R-\lambda I) = \begin{vmatrix} \frac{1}{2}-\lambda & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2}-\lambda \end{vmatrix} = (\frac{1}{2}-\lambda)^2 + \frac{3}{4} = \lambda^2 - \lambda + 1.$$

Očito $k_R(\lambda)$ nema realnih nultočaka pa je $\sigma(R) = \emptyset$. Taj račun u skladu je s prijašnjim zaključkom da rotacija ravnine za kut različit od $k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, nema svojstvenih vrijednosti. ♡

Primjer 6.21. Već je naglašeno kako invarijantnost karakterističnog polinoma linearnog operatora znači da je svaki pojedini koeficijent tog polinoma invarijanta dotičnog operatora. Pogledajmo pobliže neke od tih koeficijenata jer su nam otprije poznati kao invarijante linearnog operatora.

(a) Neka je $\dim V = 2$ i $A \in \mathcal{L}(V)$ te neka je matrica $[a_{ij}]$ pridružena tom operatoru u nekoj bazi (e). Tada vrijedi:

$$k_A(\lambda) = \lambda^2 - \operatorname{tr} A\lambda + \det A.$$

(Provjerite to računom.) Dakle, determinanta i trag (to jest, $-\operatorname{tr} A$) pojavljuju se kao koeficijenti u $k_A(\lambda)$ ako je $n = 2$.

(b) Rezultat za $n = 2$ nije iznimka. Uzmimo $n \geq 2$. U bilo kojem polinomu $p(t)$ slobodni član možemo dobiti tako da uvrstimo $t = 0$. Uvrstimo li $\lambda = 0$ u $k_A(\lambda) = \det(A - \lambda I)$, dobivamo

$$k_A(0) = \det(A - 0 \cdot I) = \det A$$

pa je općenito slobodni član karakterističnog polinoma operatora A jednak upravo $\det A$. Posebno, slobodni član jednak je 0 („iščezava") ako i samo ako je $r(A) < n$. Nadalje, koeficijent uz λ^{n-1} općenito je jednak $(-1)^{n-1} \operatorname{tr} A$. To nije teško vidjeti iz $\det(A - \lambda I)$ s obzirom na to da član determinante sadrži λ^{n-1} ako i samo ako se nalazi u umnošku $(a_{11} - \lambda) \cdots (a_{nn} - \lambda)$ tako da se iz bilo kojih $n - 1$ faktora izabere $-\lambda$, a iz preostalog odgovarajući a_{jj}. U zbroju onda imamo

$$(-1)^{n-1}(a_{11} + \cdots + a_{nn})\lambda^{n-1} = (-1)^{n-1} \operatorname{tr} A\lambda^{n-1}.$$

Dakle,

$$k_A(\lambda) = (-1)^n\lambda^n + (-1)^{n-1} \operatorname{tr} A\lambda^{n-1} + \cdots + \det A.$$

♡

Zadatak 6.13. *Neka je* $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ *prvi stupac kvadratne matrice. Može li se drugi stupac popuniti tako da to bude matrica nekog zrcaljenja na prostoru* $V^2(O)$*? Ima li više rješenja?*

Uputa. Kako mora izgledati karakteristični polinom zrcaljenja u $V^2(O)$?

Zadatak 6.14. *Napišite karakteristični polinom:*

(a) ortogonalnog projektora na jednodimenzionalni potprostor prostora $V^3(O)$*,*

(b) zrcaljenja na dvodimenzionalnom potprostoru prostora $V^3(O)$*.*

Uputa. Budući da karakteristični polinom ne ovisi o izboru baze, možemo izabrati standardne matrice zadanih tipova operatora i izračunati njihove karakteristične polinome.

Propozicija 6.8.6. *Neka je V vektorski prostor i $A \in \mathcal{L}(V)$. Ako je $\lambda \in \sigma(A)$, tada je skup*

$$V_A(\lambda) = \{x \in V \, : \, Ax = \lambda x\}.$$

potprostor od V.

Dokaz. Očito je $V_A(\lambda) = J(A - \lambda I)$. No dokaz se može provesti i izravnom provjerom. Ako su $x, y \in V_A(\lambda)$ i $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$, tada je

$$A(\alpha x + \beta y) = \alpha A(x) + \beta A(y) = \alpha(\lambda x) + \beta(\lambda y) = \lambda(\alpha x + \beta y),$$

pa zaključujemo $\alpha x + \beta y \in V_A(\lambda)$. □

Definicija 6.8.7. *Neka je $A \in \mathcal{L}(V)$ te $\lambda \in \sigma(A)$. Potprostor $V_A(\lambda)$ naziva se* ***svojstveni potprostor*** *pridružen svojstvenoj vrijednosti λ. Ako je $V_A(\lambda)$ konačnodimenzionalan, njegova dimenzija naziva se* ***geometrijska kratnost*** *svojstvene vrijednosti λ.*

Budući da je svojstveni potprostor $V_A(\lambda_0)$ jednak jezgri operatora $A - \lambda_0 I$, geometrijska kratnost svojstvene vrijednosti λ_0 upravo je jednaka defektu $d(A - \lambda_0 I)$. Ako je V konačnodimenzionalan i $\dim V = n$, prema teoremu o rangu i defektu znamo da je geometrijska kratnost jednaka $n - r(A - \lambda_0 I)$. Pritom možemo primijetiti da se problem određivanja svojstvenih vrijednosti i njihovih geometrijskih kratnosti svodi na tip zadatka kakav se često rješavao u Linearnoj algebri 1 u vezi s rangom matrice: Odredite rang zadane matrice u ovisnosti o parametru (katkad označavanom upravo s λ, katkad drukčije). Za operator A, odnosno njegovu matricu, ovdje izračunavamo rang matrice $A - \lambda I$ u ovisnosti o parametru λ. Od interesa su nam sve vrijednosti λ za koje $r(A - \lambda I)$ nije n, to jest puni rang, a pripadne vrijednosti $n - r(A - \lambda I)$ tada su geometrijske kratnosti odgovarajućih svojstvenih vrijednosti.

U skladu s teoremom 6.8.5 svojstvene vrijednosti tražimo kao nultočke karakterističnog polinoma, dakle kao rješenja algebarske jednadžbe n-tog stupnja. To je ekvivalentno određivanju vrijednosti λ za koje je $r(A - \lambda I) < n$, a povoljno je utoliko što je uvjet izražen jednom jednadžbom. Međutim, čim je ta jednadžba stupnja većeg od 2, njezino rješavanje općenito nije jednostavno.

Vratimo se karakterističnom polinomu. Svaki polinom f stupnja n, za $n \geq 1$, ima točno n nultočaka u polju $\mathbb{C}$, pri čemu brojimo i kratnost svake nultočke. Podsjetimo se da je kompleksni broj x_0 nultočka polinoma f kratnosti k ako vrijedi $f(x_0) = 0$ i postoji polinom g takav da je $f(x) = \alpha(x - x_0)^k g(x)$, pri čemu $g(x_0) \neq 0$. (α je kompleksni broj različit od 0 i predstavlja koeficijent u vodećem članu polinoma f.) Drugim riječima, kratnost k nultočke x_0 polinoma $f(x)$ najveći je eksponent za koji polinom $(x - x_0)^k$ dijeli polinom $f(x)$. Neka su kompleksni brojevi $x_1, x_2, \ldots, x_m$ sve različite nultočke polinoma f stupnja $n \geq 1$, a prirodni brojevi $k_1, k_2, \ldots k_m$ njihove pripadne kratnosti kao nultočaka. Tada je $m \leq n$ i $k_1+k_2+\cdots+k_m = n$. Ukratko, polinom f s kompleksnim koeficijentima stupnja n, $n \geq 1$, nad poljem $\mathbb{C}$ može se prikazati kao

$$f(x) = \alpha(x-x_1)^{k_1}\cdots(x-x_m)^{k_m}.$$

Pojam kratnosti nultočke odnosi se i na realne nultočke, posebno i u slučaju polinoma s realnim koeficijentima. Zbroj kratnosti realnih nultočaka općenito nije jednak n, nego poprima neku cjelobrojnu vrijednost od 0 do n. Stoga ako polinom f stupnja $n \geq 1$ nad poljem $\mathbb{R}$ ima realne nultočke $x_1, x_2, \ldots, x_m$ s pripadnim kratnostima $k_1, k_2, \ldots, k_m$, onda je

$$f(x) = (x-x_1)^{k_1}\cdots(x-x_m)^{k_m} g(x), \;\; k_1+k_2+\cdots+k_m \leq n,$$

gdje je g polinom stupnja $k = n-(k_1+k_2+\cdots+k_m)$, $0 \leq k \leq n$, koji nema realnih nultočki.

Definicija 6.8.8. *Neka je $A \in \mathcal{L}(V)$ te $\lambda_0 \in \sigma(A)$.* ***Algebarska kratnost*** *svojstvene vrijednosti λ_0 je kratnost koju λ_0 ima kao nultočka karakterističnog polinoma $k_A(\lambda)$.*

Napomena. Pri određivanju nultočaka karakterističnog polinoma važno je voditi računa o tome nad kojim je poljem definiran vektorski prostor na kojem djeluje promatrani linearni operator. Ako je to polje $\mathbb{R}$ realnih brojeva, nultočke iz $\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$ nisu svojstvene vrijednosti operatora. Korisno je podsjetiti se da ako karakteristični polinom ima samo realne koeficijente, sve nultočke iz $\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$ pojavljuju se u kompleksno konjugiranim parovima. Zbog toga polinom neparnog stupnja s realnim koeficijentima sigurno ima barem jednu realnu nultočku. Budući da se mnogi nama važni primjeri odnose na trodimenzionalni realni prostor $V^3(O)$, zaključujemo da karakteristični polinom linearnog operatora na tom prostoru ima ili jednu ili tri realne nultočke (ne nužno različite).

Nastavimo razmatranje algebarske i geometrijske kratnosti svojstvene vrijednosti $\lambda_0 \in \sigma(A)$. Te dvije kratnosti mogu, ali ne moraju biti jednake. Dakako, ako je algebarska kratnost jednaka barem 1, tada je i geometrijska kratnost jednaka barem 1, što lako slijedi iz teorema 6.8.5 i propozicije 6.8.6. U mogućnost različitosti algebarske i geometrijske kratnosti uvjerimo se odmah na primjerima dvaju jednostavnih operatora na prostoru $\mathbb{R}^2$:

Primjer 6.22. Jedinični operator $I \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ ima karakteristični polinom $(\lambda-1)^2$, s jedinom nultočkom 1, čija su i algebarska i geometrijska kratnost jednake 2 (jer cijeli $\mathbb{R}^2$ je svojstveni potprostor za svojstvenu vrijednost 1, zbog $Ix = x$ za svaki $x \in \mathbb{R}^2$). S druge strane, neka je $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ zadan djelovanjem na bazu (e_1, e_2) s $Ae_1 = e_1$, $Ae_2 = e_1 + e_2$. Tada je

$$[A]_{(e)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

pa je $k_A(\lambda) = (\lambda-1)^2$ i ponovno je $\lambda_0 = 1$ jedina nultočka, algebarske kratnosti 2. Međutim, $r(A-\lambda_0 I) = r(A-I) = 1$ pa je geometrijska kratnost za $\lambda_0 = 1$ jednaka $d(A-I) = 1$. Operator A ima samo jedan svojstveni potprostor, i to dimenzije 1 (očito je to $[e_1]$).

♡

Općenita relacija između algebarske i geometrijske kratnosti iskazana je sljedećom propozicijom.

Propozicija 6.8.9. *Geometrijska kratnost svojstvene vrijednosti nekog linearnog operatora nije veća od algebarske kratnosti.*

Dokaz. Neka je $A \in \mathcal{L}(V)$, $\dim V = n$ i $\lambda_0 \in \sigma(A)$. Označimo s g geometrijsku kratnost od λ_0, odnosno

$$1 \leq g = \dim V_A(\lambda_0) \leq n.$$

Bazu za $V_A(\lambda_0)$ čini g svojstvenih vektora za λ_0. Ako tu bazu proširimo do baze cijelog prostora, (b), dobit ćemo bazu u kojoj operator A ima matrični prikaz oblika

$$[A]_{(b)} = \begin{pmatrix} \lambda_0 & 0 & \cdots & 0 & * & \cdots & * \\ 0 & \lambda_0 & \cdots & 0 & * & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_0 & * & \cdots & * \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & * & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & * & \cdots & * \end{pmatrix}.$$

U matrici $[A - \lambda I]_{(b)}$ imamo onda elemente $\lambda_0 - \lambda$ na prvih g mjesta dijagonale, što će pri računanju determinante dati $(\lambda_0 - \lambda)^g$. O izgledu preostalih $n - g$ stupaca ne može se zaključiti ništa posebno, osim da će se na daljnjim mjestima na dijagonali pojavljivati koeficijenti koji sadrže $-\lambda$. To nam je dovoljno da bismo vidjeli kako će u $\det[A - \lambda I]_{(b)}$ posljednjih $n - g$ stupaca dati doprinos oblika nekog polinoma $p(\lambda)$ stupnja $n - g$ u varijabli λ. Skalar λ_0 može, ali ne mora biti nultočka polinoma $p(\lambda)$. Dakle, imamo

$$k_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = (\lambda_0 - \lambda)^g p(\lambda)$$

pa je algebarska kratnost nultočke λ_0 veća od g ili jednaka g, ovisno o tome je li λ_0 nultočka polinoma $p(\lambda)$. □

U uvodu ovog odjeljka spomenuli smo da se poznavanje svojstvenih vrijednosti i svojstvenih vektora linearnog operatora na konačnodimenzionalnom prostoru može iskoristiti kako bi se izabrala baza prostora u kojoj je matrični prikaz operatora što jednostavniji. Jedan mogući cilj pojednostavljivanja je pridruživanje dijagonalne matrice zadanom operatoru ako je to moguće ili barem matrice koja „djelomično" izgleda kao dijagonalna. Naime, izvođenje operacija s dijagonalnim matricama, posebno množenje pa time i potenciranje, znatno je lakše nego s općenitim matricama.

Već u dokazu propozicije 6.8.9 razabire se osnovna zamisao: birati bazu prostora tako da se u njoj nalazi što je više moguće svojstvenih vektora zadanog operatora A. Čim je za j-ti vektor baze izabran svojstveni vektor v pridružen nekom $\lambda_0 \in \sigma(A)$, zbog $Av = \lambda_0 v$ u j-tom stupcu matrice operatora bit će λ_0 na poziciji (j, j), dok će svi ostali elementi tog stupca biti jednaki 0.

Definicija 6.8.10. *Kažemo da se operator $A \in \mathcal{L}(V)$ može* ***dijagonalizirati****, odnosno da je* ***dijagonalizabilan****, ako postoji baza prostora V u kojoj A ima dijagonalnu matricu.*

Propozicija 6.8.11. *Linearni operator $A \in \mathcal{L}(V)$ može se dijagonalizirati ako i samo ako postoji baza prostora V koja se sastoji od svojstvenih vektora operatora A.*

Dokaz. Ako se operator A dijagonalizira u bazi $(b) = \{b_1, \ldots, b_n\}$, postoje $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{F}$ takvi da je

$$[A]_{(b)} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix},$$

odnosno vrijedi

$$A(b_i) = \lambda_i b_i,$$

pa je λ_i svojstvena vrijednost s pripadnim svojstvenim vektorom b_i. Stoga je (b) baza prostora V koja se sastoji od svojstvenih vektora operatora A.

Obrat slijedi direktno iz definicije svojstvenog vektora, odnosno svojstvene vrijednosti. $\square$

Pretpostavimo da je $A \in \mathcal{L}(V)$ i

$$\sigma(A) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_k\},$$

pri čemu su svojstvene vrijednosti λ_i međusobno različite. Ako je zbroj pripadnih algebarskih kratnosti tih svojstvenih vrijednosti manji od n, to jest ako $a_1 + \cdots + a_k < n$, tada je prema propoziciji 6.8.9

$$g_1 + \cdots + g_k \leq a_1 + \cdots + a_k < n,$$

gdje su g_i pripadne geometrijske kratnosti, odnosno dimenzije pripadnih svojstvenih potprostora. Stoga možemo zaključiti da u ovom slučaju *ne možemo* imati bazu za V koja se sastoji od svojstvenih vektora. Dakle, nužan uvjet da se operator može dijagonalizirati jest da *zbroj algebarskih kratnosti svih svojstvenih vrijednosti bude jednak* $n = \dim V$. Praktično, u zadacima, taj uvjet najčešće znači da za operator na realnom n-dimenzionalnom prostoru V njegov karakteristični polinom mora imati svih n nultočaka (računajući s njihovim kratnostima) u polju $\mathbb{R}$. Čim je barem jedna nultočka kompleksni broj koji nije realni, neće biti dostatno svojstvenih vektora za sastavljanje baze pa se operator neće moći dijagonalizirati.

Nadalje, ako je $g_i < a_i$ za neku svojstvenu vrijednost λ_i, ponovo je

$$g_1 + \cdots + g_k < n,$$

pa ni u ovom slučaju nije moguće sastaviti bazu od svojstvenih vektora operatora A. Stoga još jedan nužan uvjet dijagonalizabilnosti operatora jest da je *algebarska kratnost jednaka geometrijskoj kratnosti za svaku svojstvenu vrijednost* λ_i, $i = 1, \ldots, k$. Uskoro ćemo ustanoviti da su navedena dva uvjeta i dovoljna. Najprije je potrebno dokazati da uzimanjem po jednog vektora iz različitih svojstvenih potprostora dobivamo linearno nezavisan skup. Naime, jasno je da različiti svojstveni potprostori imaju u presjeku samo nulvektor jer za različite $\lambda_1, \lambda_2 \in \sigma(A)$ ne može vrijediti $Av = \lambda_1 v = \lambda_2 v$ ako je $v \neq 0_V$. No nije očito da je skup od po jednog vektora pridruženog različitim svojstvenim vrijednostima linearno nezavisan (što je svakako nužno da bi se od svojstvenih vektora mogla sastaviti baza prostora).

Propozicija 6.8.12. *Neka su $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ različite svojstvene vrijednosti operatora $A \in \mathcal{L}(V)$ i neka su $v_1, \ldots, v_k$ pripadni svojstveni vektori pridruženi redom tim svojstvenim vrijednostima. Tada je skup $\{v_1, \ldots, v_k\}$ linearno nezavisan.*

Dokaz. Prema pretpostavci je

$$A(v_i) = \lambda_i v_i,\ v_i \neq 0_V,\ i = 1, \ldots, k.$$

Pretpostavimo, suprotno tvrdnji propozicije, da je skup $\{v_1, \ldots, v_k\}$ linearno zavisan. Tada postoji vektor koji je linearna kombinacija svojih prethodnika. Bez smanjenja općenitosti uzmimo da je to vektor v_k, odnosno da je

$$v_k \in [v_1, \ldots, v_{k-1}]$$

te da je $\{v_1, \ldots, v_{k-1}\}$ linearno nezavisan skup. Tada postoje skalari $\alpha_1, \ldots, \alpha_{k-1}$ za koje je

$$v_k = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_{k-1} v_{k-1}.$$

Ako na prethodnu jednakost djelujemo operatorom A, dobit ćemo

$$\lambda_k v_k = \alpha_1 \lambda_1 v_1 + \cdots + \alpha_{k-1} \lambda_{k-1} v_{k-1}. \tag{6.7}$$

Sada razlikujemo dva slučaja: $\lambda_k = 0$ i $\lambda_k \neq 0$. Ako je $\lambda_k = 0$, jednakost (6.7), zbog linearne nezavisnosti skupa $\{v_1, \ldots, v_{k-1}\}$, povlači

$$\alpha_1 \lambda_1 = \cdots = \alpha_{k-1} \lambda_{k-1} = 0.$$

Nadalje, svojstvene vrijednosti $\lambda_1, \ldots, \lambda_{k-1}$ su nužno različite od 0 (jer je $\lambda_k = 0$ i sve su različite), pa je i

$$\alpha_1 = \cdots = \alpha_{k-1} = 0.$$

Sada je $v_k = \alpha_1 v_1 + \cdots \alpha_{k-1} v_{k-1} = 0_V$, što ne može biti jer je v_k svojstveni vektor.

Pokažimo tvrdnju i u drugom slučaju, $\lambda_k \neq 0$. Množenjem relacije (6.7) s λ_k^{-1} dobivamo

$$v_k = \lambda_k^{-1} \alpha_1 \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_k^{-1} \alpha_{k-1} \lambda_{k-1} v_{k-1}.$$

Kako je i $v_k = \alpha_1 v_1 + \cdots \alpha_{k-1} v_{k-1}$, zbog jednoznačnosti prikaza slijedi

$$\alpha_i = \lambda_k^{-1} \alpha_i \lambda_i,\ i = 1, \ldots, k-1.$$

Ako postoji neki $\alpha_j \neq 0$, tada slijedi

$$1 = \lambda_k^{-1} \lambda_j,$$

to jest $\lambda_k = \lambda_j$ i $1 \leq j < k$, što nije moguće jer su sve svojstvene vrijednosti različite. Dakle, jedino je moguće da je $\alpha_i = 0$ za sve $i = 1, \ldots, k-1$. No tada ponovno slijedi da je svojstveni vektor $v_k = \alpha_1 v_1 + \cdots \alpha_{k-1} v_{k-1} = 0_V$.

U oba slučaja pokazali smo da pretpostavka $v_k \in [v_1, \ldots, v_{k-1}]$ i $\{v_1, \ldots, v_{k-1}\}$ linearno nezavisan skup povlači da je svojstveni vektor v_k nulvektor, što je nemoguće. Dakle, skup $\{v_1, \ldots, v_k\}$ je linearno nezavisan. □

Korolar 6.8.13. *Ako operator $A \in \mathcal{L}(V)$ ima n različitih svojstvenih vrijednosti u polju $\mathbb{F}$, A se može dijagonalizirati.*

Dokaz. Ako je $\sigma(A) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$ i $\{v_1, \ldots, v_n\}$ skup pripadnih svojstvenih vektora, tada je prema propoziciji 6.8.12 taj skup linearno nezavisan prema pa je ujedno baza prostora V. Stoga propozicija 6.8.11 povlači da je A dijagonalizabilni operator. □

Propozicija 6.8.12 nije nam dovoljna da bismo u općem slučaju, uz pretpostavku da je zbroj svih geometrijskih kratnosti jednak $\dim V = n$, mogli zaključiti kako se baza prostora može sastaviti od svojstvenih vektora. Razlika je u tome što ćemo općenito morati uzeti ne samo po jedan svojstveni vektor za svaku svojstvenu vrijednost nego koliko ih je najviše moguće izabrati linearno nezavisnih iz svakog svojstvenog potprostora. Konkretno, ako je npr. $\dim V = 7$, a $\sigma(A)$ čine λ_1, λ_2 i λ_3 koje redom imaju geometrijske kratnosti 3, 2, 2, pitanje je hoće li skup od sedam vektora (tri linearno nezavisna za λ_1 i po dva linearno nezavisna za λ_2 i λ_3) biti linearno nezavisan. To će doista vrijediti, a dokaz nije bitno teži od dokaza propozicije 6.8.12, samo što bi općenite oznake bile dosta nespretne pa ćemo dokaz samo ilustrirati na upravo spomenutom primjeru. Općeniti dokaz teče posve analogno, samo s k svojstvenih vrijednosti, njihovim geometrijskim kratnostima $g_1, \ldots, g_k$ i s ukupno n svojstvenih vektora za koje bismo trebali dvostruke indekse.

Primjer 6.23. Neka je $\dim V = 7$ i $\sigma(A) = \{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\}$, s geometrijskim kratnostima redom 3, 2 i 2. Uzmimo da su $\{a_1, a_2, a_3\}$, $\{b_1, b_2\}$ i $\{c_1, c_2\}$ redom baze svojstvenih potprostora $V_A(\lambda_1)$, $V_A(\lambda_2)$ i $V_A(\lambda_3)$. Treba dokazati da je skup

$$S = \{a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, c_1, c_2\}$$

linearno nezavisan. Pretpostavimo da vrijedi jednakost

$$\underbrace{\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \alpha_3 a_3}_{=a} + \underbrace{\beta_1 b_1 + \beta_2 b_2}_{=b} + \underbrace{\gamma_1 c_1 + \gamma_2 c_2}_{=c} = 0_V. \tag{6.8}$$

Vektori gore označeni s a, b i c pripadaju redom svojstvenim potprostorima $V_A(\lambda_1)$, $V_A(\lambda_2)$ i $V_A(\lambda_3)$ pa je svaki od njih ili svojstveni vektor pridružen odgovarajućoj svojstvenoj vrijednosti ili je nulvektor.

Sva tri vektora a, b, c ne mogu biti svojstveni vektori (i time različiti od nulvektora). Naime, ako bi a, b, c bili svojstveni vektori, bili bi pridruženi različitim svojstvenim vrijednostima pa bi iz propozicije 6.8.12 slijedilo da je skup $\{a, b, c\}$ linearno nezavisan što je u proturječju s jednakosti $a + b + c = 0_V$.

Dakle, barem jedan od vektora a, b, c jednak je 0_V, a onda su i svi njegovi koeficijenti iz prikaza u bazi svojstvenog potprostora jednaki 0. (Na primjer, ako je $a = 0_V$, onda je $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$.) Ispitajmo sve mogućnosti.

- Ako je $a = b = c = 0_V$, slijedi da su svi koeficijenti $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2, \gamma_1, \gamma_2$ u (6.8) jednaki 0 pa je skup S linearno nezavisan.
- Ako su dva od vektora a, b, c jednaki 0_V i treći je takav pa se to svodi na prethodni slučaj.
- Ako je samo jedan od vektora a, b, c jednak 0_V, npr. $a = 0_V$, imamo $b + c = 0_V$, što je opet nemoguće zbog propozicije 6.8.12.

Time je pokazano da je skup S linearno nezavisan.

♡

Smatrat ćemo, na temelju ovog primjera, dokazanom sljedeću tvrdnju:

Propozicija 6.8.14. *Neka su $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ različite svojstvene vrijednosti operatora $A \in \mathcal{L}(V)$. Ako se iz svakog od pripadnih svojstvenih potprostora izabere linearno nezavisan podskup, unija svih tih podskupova je linearno nezavisan podskup prostora V.*

Posebno, ako je zbroj geometrijskih kratnosti svih svojstvenih vrijednosti od A jednak dimenziji n prostora V te ako se za svaki od svojstvenih potprostora izabere po jedna baza, unija svih tih baza bit će baza prostora V.

Primijetimo još da je, uz pretpostavke u drugoj tvrdnji te propozicije, prostor V jednak direktnoj sumi svih svojstvenih potprostora operatora A.

Na temelju svega izloženog možemo iskazati nužne i dovoljne uvjete za dijagonalizaciju linearnog operatora sljedećim teoremom:

Teorem 6.8.15. *Neka je V n-dimenzionalni vektorski prostor i $A \in \mathcal{L}(V)$. Linearni operator A može se dijagonalizirati ako i samo ako vrijedi da*

1. *polinom $k_A(\lambda)$ ima n nultočaka u polju $\mathbb{F}$ računajući kratnost,*
2. *algebarska kratnost jednaka je geometrijskoj kratnosti za svaku svojstvenu vrijednost operatora A.*

Temu određivanja spektra i svojstvenih potprostora linearnog operatora na konačnodimenzionalnom prostoru te ispitivanja mogućnosti njegove dijagonalizacije zaključit ćemo sljedećim sažetkom i primjerima. Pretpostavljamo da je operator zadan matricom u nekoj bazi (ili da smo tu matricu napisali pomoću zadanih podataka o operatoru).

Postupak rješavanja problema $Ax = \lambda x$ uz uvjet $x \neq 0_V$:

1. Napiše se matrica $A - \lambda I$ („oduzme se λ po dijagonali" matrice A) i izračuna determinanta te matrice. Time se dobije karakteristični polinom $k_A(\lambda)$ stupnja n u varijabli λ, pri čemu je $n = \dim V$, odnosno n je red matrice A.

2. Odrede se nultočke polinoma $k_A(\lambda)$ i njihove algebarske kratnosti. Važne su nultočke koje pripadaju polju $\mathbb{F}$ nad kojim je zadan vektorski prostor V, odnosno nad kojim je zadana matrica A. Poznavanje nultočaka i njihovih algebarskih kratnosti znači da možemo polinom $k_A(\lambda)$ napisati u obliku umnoška polinoma oblika $(\lambda - \lambda_j)^{\mu_j}$ za nultočke $\lambda_j \in \mathbb{F}$ i možda još jednog polinoma $p(\lambda)$ koji nema nultočaka u polju $\mathbb{F}$. (Moguće je da su sve nultočke u polju $\mathbb{F}$, da su samo neke u $\mathbb{F}$ ili da uopće nema nultočaka u polju $\mathbb{F}$.)

3. Spektar $\sigma(A) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_m\}$ sastoji se od svih nultočaka polinoma $k_A(\lambda)$ koje pripadaju polju $\mathbb{F}$ i to su svojstvene vrijednosti operatora A (odnosno matrice A). Za svaku pojedinu svojstvenu vrijedost λ_j treba riješiti homogeni sustav $(A - \lambda_j I)x = 0$. Rješavanjem sustava dobivamo bazu svojstvenog potprostora $V_A(\lambda_j)$ i tako nalazimo geometrijsku kratnost za λ_j. Geometrijska kratnost za λ_j jednaka je $n - r(A - \lambda_j I)$ pa se može odrediti i bez efektivnog rješavanja sustava.

Opisanim postupkom određen je spektar $\sigma(A)$ i svi svojstveni potprostori, odnosno ustanovljeno je da je $\sigma(A)$ prazan ako karakteristični polinom nema nultočaka u polju $\mathbb{F}$.

Dodatno možemo ispitati je li operator dijagonalizabilan, pa u slučaju da jest odrediti i bazu u kojoj se dijagonalizira ili, ekvivalentno tomu, odrediti matricu prijelaza T pomoću koje se za zadanu matricu A dobiva dijagonalna matrica $D = T^{-1}AT$.

4. Budući da smo odredili svojstvene vrijednosti te njihove algebarske i geometrijske kratnosti, vidimo je li ispunjen nužan i dovoljan uvjet dijagonalizacije: da zbroj algebarskih kratnosti bude jednak n te da je geometrijska kratnost svake svojstvene vrijednosti jednaka njezinoj algebarskoj kratnosti. U slučaju da su ti uvjeti ispunjeni, bazu u kojoj se operator dijagonalizira dobivamo kao uniju (nekih) baza svih svojstvenih potprostora. (Baza za dijagonalizaciju nije jednoznačno određena.) Matrica T formira se tako da se u stupce napišu izabrani svojstveni vektori koji čine baze svih svojstvenih potprostora.

Nemogućnost dijagonalizacije prepoznaje se čim karakteristični polinom ima manje od n nultočaka u polju $\mathbb{F}$ ili, ako je to ispunjeno, čim je za barem jednu svojstvenu vrijednost njezina geometrijska kratnost strogo manja od algebarske kratnosti.

Primjer 6.24. Linearni operator A na četverodimenzionalnom realnom prostoru V zadan je svojim djelovanjem na bazu $(v) = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$:

$$A(v_1) = A(v_4) = v_1 + v_4, \ A(v_2) = -v_2, \ A(v_3) = v_2 - v_3.$$

Naš zadatak bit će odrediti $\sigma(A)$ i sve svojstvene potprostore. Nadalje, ispitati može li se A dijagonalizirati i ako može, u kojoj bazi. Ako ne može, odredit ćemo neku bazu prostora V koja sadrži što je više moguće svojstvenih vektora od A i napisati matricu operatora A u toj bazi.

Matrica operatora A u zadanoj bazi glasi:

$$[A]_{(v)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Izračuna se da je

$$k_A(\lambda) = \lambda(\lambda-2)(\lambda+1)^2.$$

Dakle, $\sigma(A) = \{-1, 0, 2\}$. Nultočke 0 i 2 imaju algebarsku kratnost 1, a -1 algebarsku kratnost 2. Što se tiče dijagonalizacije, trebao bi biti ispunjen samo još uvjet da svojstvena vrijednost -1 ima geometrijsku kratnost također 2, odnosno da bude $r(A-(-1)I) = r(A+I) = 4-2 = 2$. Međutim,

$$[A+I]_{(v)} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

pa je $r(A+I) = 3$ i geometrijska kratnost za -1 je $4-3=1$. Operator A ne može se dijagonalizirati. Odmah vidimo da je $J(A+I) = [v_2]$. Lako izračunamo i $J(A - 0 \cdot I) = J(A) = [v_1 - v_4]$ te $J(A-2I) = [v_1+v_4]$.

Imamo, dakle, tri jednodimenzionalna svojstvena potprostora za A pa u bazu prostora V možemo uzeti tri odgovarajuća svojstvena vektora u bilo kojem redoslijedu, npr. $a_1 = v_1 + v_4$, $a_2 = v_2$ i $a_3 = v_1 - v_4$. Dopunu do baze najlakše dobivamo izborom $a_4 = v_3$ za četvrti vektor. Matrica operatora A u toj bazi, tj. u bazi $(a) = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ izgleda ovako:

$$[A]_{(a)} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

(Ako želimo, možemo promijeniti redoslijed trećeg i četvrtog vektora u bazi pa će se u matrici zamijeniti treći i četvrti stupac tako da će četvrti biti nul-stupac.)

♡

Napomena 6.8.16. *Nakon definicije 6.8.4 i popratnog komentara spomenuto je da se karakteristični polinom može definirati i za kvadratnu matricu, bez isticanja pretpostavke da je ta matrica pridružena linearnom operatoru u nekoj bazi. Doista, karakteristični polinom definiran je pomoću determinante kvadratne matrice, a sve slične matrice imaju jedan „zajednički" karakteristični polinom. Linearnom operatoru A na konačnodimenzionalnom prostoru V odgovara cijela klasa ekvivalencije sličnih matrica. Stoga možemo definirati da je* ***matrica*** $A \in M_n(\mathbb{F})$ ***dijagonalizabilna nad poljem*** $\mathbb{F}$ *ako je slična nekoj dijagonalnoj matrici $D \in M_n(\mathbb{F})$. Ako je pritom $T \in M_n(\mathbb{F})$ regularna matrica* *takva da vrijedi $T^{-1}AT = D$, jasno je da T ima ulogu matrice prijelaza između dviju baza u kojima je linearnom operatoru pridružena matrica A, odnosno D.*

Možemo govoriti i o svojstvenim vrijednostima matrice *i* svojstvenim vektorima matrice $A \in M_n(\mathbb{F})$, *ne ističući pritom uvijek linearni operator. Skalar $\lambda \in \mathbb{F}$ bit će* ***svojstvena vrijednost matrice*** *A ako postoji vektor (jednostupčana matrica) $X \in M_{n,1}(\mathbb{F})$, $X \neq 0$ takav da vrijedi $AX = \lambda X$. Naime, uzmemo li vektorski prostor $M_{n,1}(\mathbb{F})$ i njegovu kanonsku bazu (e), matrica A pridružena je u toj bazi linearnom operatoru koji na prostoru $M_{n,1}(\mathbb{F})$ djeluje jednostavno množenjem vektora stupaca matricom A, dakle preslikava $X \mapsto AX$. (U primjeru 6.6, u općenitijoj situaciji, odgovarajući linearni operator označen je s L).*

Slična matrica $T^{-1}AT$ pridružena je istom linearnom operatoru u bazi (e'), takvoj da je T matrica prijelaza iz (e) u (e'). To je samo jedan od mogućih, ali standardan i jednostavan način definiranja linearnog operatora čiji je matrični zapis upravo zadana matrica.

U nekima od daljnjih primjera i zadataka razmatrat će se prethodni pojmovi, vezani uz spektar, samo za zadane matrice, a postupak rješavanja neće se razlikovati od onoga kad su primarno zadani linearni operatori pa im najčešće prvo treba pridružiti matricu u nekoj bazi.

Istaknimo ipak još jednu važnu pojedinost. Ako je zadana kvadratna matrica A s realnim koeficijentima, pri ispitivanju njezine dijagonalizabilnosti ima smisla naglasiti je li riječ o dijagonalizaciji nad poljem $\mathbb{R}$ ili nad poljem $\mathbb{C}$. Naime, matrica s realnim koeficijentima može biti pridružena linearnom operatoru na kompleksnom prostoru (dok obrnuto nije moguće jer ako u matrici postoji element koji je kompleksni, ali ne i realni broj, ta matrica ne može predstavljati zapis operatora na realnom prostoru). Dijagonalizabilnost realne matrice nad poljem $\mathbb{R}$ svakako je posebno, specifično svojstvo. To ćemo vidjeti u primjeru 6.27 čim realnu matricu reda 2, koja nam je poznata kao matrica rotacije za pravi kut u bazi $\{\vec{i}, \vec{j}\}$ realnog prostora V^2 "odvojimo" od takvog tumačenja i promotrimo je "samo" kao matricu. Ipak, njezina dijagonalizabilnost nad poljem $\mathbb{C}$ otkrit će nam sasvim blisku geometrijsku interpretaciju.

Primjer 6.25. Ispitat ćemo može li se dijagonalizirati nad poljem $\mathbb{R}$ matrica C reda 4 čiji su svi elementi na dijagonali jednaki 3, a svi ostali elementi su jednaki 1. Ako može, provest ćemo dijagonalizaciju i odrediti matricu pomoću koje se ostvaruje sličnost matrice C i neke dijagonalne matrice. (U odjeljku 2.9. naučit ćemo da se svaka simetrična realna matrica može dijagonalizirati, no zasad odgovor tražimo uobičajenim postupkom.)

Izračuna se
$$k_C(\lambda) = (\lambda - 2)^3(\lambda - 6).$$
Nultočke su 2 s algebarskom kratnosti 3 i 6 s algebarskom kratnosti 1. Očito je $r(A-2I) = 1$ pa je geometrijska kratnost za 2 jednaka 3 i C se može dijagonalizirati. Dijagonalna matrica slična matrici C jest npr. $\operatorname{diag}(2, 2, 2, 6)$.

Potprostor $V_C(2)$ zadan je jednadžbom $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$. Za bazu možemo uzeti npr. skup $\{(1, -1, 0, 0), (1, 0, -1, 0), (1, 0, 0, -1)\}$.

Vektor baze za jednodimenzionalni potprostor $V_C(6)$ određujemo rješavanjem sustava $(C - 6I)x = 0$, a vrlo lako možemo uočiti da je $v = (1, 1, 1, 1)$ jedno rješenje s obzirom na to da je $Cv = 6v$. (Množenje bilo koje matrice s vektor-stupcem samih jedinica zapravo daje zbroj svih stupaca matrice, a to je u ovom slučaju $\begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix}$.) Matrica potrebna za dijagonalizaciju tada je

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

a njezin inverz

$$T^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dakle,

$$T^{-1}CT = D = \mathrm{diag}(2, 2, 2, 6).$$

♡

Zadatak 6.15. *Poopćite primjer 6.25 na matrice reda n koje na svim mjestima dijagonale imaju skalar x, a na svim mjestima izvan dijagonale skalar y (može biti i $x = y$).*

Uputa. U Linearnoj algebri 1 standardni je zadatak izračunavanje determinante reda n navedenog oblika, a rezultat glasi $(x - y)^{n-1}(x + (n - 1)y)$. (Provjerite vlastitim računom.) Za karakteristični polinom takve matrice možemo primijeniti istu formulu, samo što se na dijagonali determinante nalaze elementi $x - \lambda$. Dobivamo polinom $(x - \lambda - y)^{n-1}(x - \lambda + (n - 1)y)$ tako da se u spektru nalaze $x - y$, s algebarskom kratnosti $n - 1$ i $x + (n - 1)y$ s algebarskom kratnosti 1. (U slučaju $x = y$ imamo jezgru dimenzije $n - 1$ i svojstvenu vrijednost nx kratnosti 1.) Preostaje odrediti geometrijsku kratnost za $x - y$. Dovršite račun sami i izvedite zaključak.

Zadatak 6.16. *Dokažite da se svaka realna simetrična matrica reda 2 može dijagonalizirati.*

Uputa. Karakteristični polinom simetrične matrice

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$$

glasi

$$k_A(\lambda) = \lambda^2 - (a + c)\lambda + ac - b^2$$

pa treba razmotriti rješenja pripadne kvadratne jednadžbe.

Ako je neku matricu A moguće dijagonalizirati, to uvelike olakšava izračunavanje potencija te matrice. Uzmimo da je D dijagonalna matrica i $D = T^{-1}AT$. Odatle je $A = TDT^{-1}$ i zatim

$$A^n = (TDT^{-1})(TDT^{-1}) \cdots (TDT^{-1}).$$

Primjećujemo da zbog asocijativnosti množenja matrica, svi susjedni faktori T i T^{-1} daju jediničnu matricu I pa dobivamo jednostavno

$$A^n = TD^nT^{-1},$$

Za $D = \operatorname{diag}(\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$ vrijedi $D^n = \operatorname{diag}(\alpha_1^n, \ldots, \alpha_k^n)$ pa lako izračunamo i A^n.

Primjer 6.26. Odredit ćemo G^n, $n \in \mathbb{N}$, za matricu

$$G = \begin{pmatrix} 2017 & 2016 \\ 2016 & 2017 \end{pmatrix}.$$

Budući da je matrica G simetrična, moći će se dijagonalizirati (vidi prethodni zadatak 6.16). Konkretno G se dijagonalizira u bazi svojstvenih vektora $\{(1,1),(1,-1)\}$ u $D = \operatorname{diag}(4033, 1)$. Matrica prijelaza glasi

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},$$

i $T^{-1} = \frac{1}{2}T$. Stoga je

$$A^n = TD^nT^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4033^n & 0 \\ 0 & 1^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 4033^n+1 & 4033^n-1 \\ 4033^n-1 & 4033^n+1 \end{pmatrix}.$$

♡

Primjer 6.27. Znamo da se operator rotacije za pravi kut prostora $V^2(O)$ ne može dijagonalizirati jer nema svojstvenih vektora. Ispitat ćemo mogućnost dijagonalizacije nad poljem $\mathbb{C}$ matrice R pridružene operatoru rotacije za kut $\frac{\pi}{2}$. Matrica rotacije za kut $\frac{\pi}{2}$ u ortonormiranoj bazi glasi

$$R = \begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{2} & -\sin\frac{\pi}{2} \\ \sin\frac{\pi}{2} & \cos\frac{\pi}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

a karakteristični polinom je

$$k_R(\lambda) = \lambda^2 + 1$$

pa je $\sigma(R) = \{i, -i\}$ (nad poljem $\mathbb{C}$). Čim matrica reda 2 ima dvije različite svojstvene vrijednosti, može se dijagonalizirati. Lako nalazimo svojstvene potprostore $V_R(-i) = [(1,i)]$ i $V_R(i) = [(1,-i)]$ prostora $\mathbb{C}^2$.

Primijetimo da u kompleksnoj ravnini množenje brojem i, odnosno $-i$, geometrijski znači rotaciju za $\frac{\pi}{2}$ u pozitivnom, odnosno negativnom smjeru. ♡

Zadatak 6.17. *Odredite skup svih $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ kojima je u svakoj bazi matrični prikaz dijagonalna matrica.*

Uputa. Za takve operatore svaki vektor prostora, osim nulvektora, mora biti svojstveni vektor. Očito nuloperator, jedinični operator i svaka homotetija – operator oblika αI – imaju to svojstvo. Operator s traženim svojstvom ne može imati dvije različite svojstvene vrijednosti λ_1 i λ_2 jer zbroj pridruženih svojstvenih vektora ne bi bio svojstveni vektor. Izvedite zaključak.

Zadatak 6.18. *Neka je $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ ortonormirana baza prostora $V^3(O)$. Zadajte $Z \in \mathcal{L}(V^3(O))$ takav da bude $Z(\vec{i}) = \vec{k}$ i $\sigma(Z) = \{1, -1\}$.*

Uputa. Za Z moraju postojati takvi vektori $\vec{a}$, $\vec{b}$ da bude $Z\vec{a} = \vec{a}$ i $Z\vec{b} = -\vec{b}$ i oni su svakako linearno nezavisni. No kako 0 nije u $\sigma(Z)$, $r(Z) = 3$, i ne bi bilo dobro staviti npr. $Z\vec{j} = \vec{j}$, $Z\vec{k} = -\vec{k}$ jer bi vektor $\vec{i} + \vec{k}$ bio u $J(Z)$. Ni $Z\vec{j} = -\vec{j}$, $Z\vec{k} = \vec{k}$ nije dobro jer tada je $-\vec{i} + \vec{k} \in J(Z)$. No stavimo li $Z\vec{k} = \vec{i}$, $Z\vec{j} = \vec{j}$, imat ćemo zrcaljenje s obzirom na potprostor $[\vec{i} + \vec{k}, \vec{j}]$ i uvjeti će biti ispunjeni.

Zadatak 6.19. *Neka je A linearni operator na realnom trodimenzionalnom vektorskom prostoru V takav da je $r(A) = 2$ i $\operatorname{tr} A = 0$. Kako izgleda karakteristični polinom $k_A(\lambda)$? Zadajte takav operator A.*

Rješenje. Budući da A nema puni rang, $\det A = 0$ pa je slobodni član karakterističnog polinoma jednak 0. Koeficijent polinoma uz λ^2 jednak je $\operatorname{tr} A = 0$. Zato je $k_A(\lambda) = -\lambda^3 + a\lambda$, za neki skalar a. Npr. $A = \operatorname{diag}(1, -1, 0)$ ima tražena svojstva i $k_A(\lambda) = -\lambda^3 + \lambda$. ♡

Zadatak 6.20. *Navedite što više primjera linearnih operatora A na realnom trodimenzionalnom prostoru V takvih da vrijedi $A^3 = A$, a da su im spektri različiti.*

Rješenje. Operator na trodimenzionalnom prostoru svakako ima neprazan spektar jer mu je karakteristični polinom stupnja 3 pa ima barem jednu realnu nultočku. Ako je $\lambda \in \sigma(A)$ i x neki pridruženi svojstveni vektor, iz $Ax = \lambda x$ slijedi

$$A^2x = A(\lambda x) = \lambda^2 x, \;\; A^3 x = \lambda^3 x.$$

Po pretpostavci je $A^3 = A$ pa je $\lambda^3 x = \lambda x$. Odatle je $\lambda^3 = \lambda$ pa λ može biti samo 0, 1 i -1.

Spektar operatora A može biti bilo koji neprazan podskup od $\{1, -1, 0\}$, a takvih podskupova ima sedam. Tražene operatore možemo zadati dijagonalnim matricama:

- $\operatorname{diag}(0, 0, 0)$ (nuloperator),
- $\operatorname{diag}(1, 1, 1)$ (jedinični operator),
- $\operatorname{diag}(-1, -1, -1)$ (centralna simetrija),
- $\operatorname{diag}(1, 1, -1)$ (zrcaljenje na dvodimenzionalnom potprostoru) ili $\operatorname{diag}(1, -1, -1)$ (zrcaljenje na 1-dimenzionalnom potprostoru),
- $\operatorname{diag}(1, 1, 0)$ (projekcija na dvodimenzionalni potprostor) ili $\operatorname{diag}(1, 0, 0)$ (projekcija na jednodimenzionalni potprostor),
- $\operatorname{diag}(1, -1, 0)$,
- $\operatorname{diag}(-1, 0, 0)$ ili $\operatorname{diag}(-1, -1, 0)$

Očito za svaku od tih matrica vrijedi $A^3 = A$. Dakle, postoji barem deset tipova operatora traženog oblika s različitim spektrima. Pritom smatramo da pojedini tip obuhvaća sve operatore čiji su matrični prikazi međusobno slične matrice. Zapravo, ima *točno deset* tipova operatora koji ispunjavaju zadane uvjete. Naime, može se pokazati da se svaki takav operator može dijagonalizirati pa su stoga mogući samo navedeni tipovi. ♡

Na kraju ovog odjeljka ukratko ćemo spomenuti još neke važne pojmove i tvrdnje povezane s linearnim operatorima, a koji se ne razrađuju u okviru ovog kolegija.

6.8.1 Algebra linearnih operatora i operatorski polinomi. Hamilton-Cayleyev teorem. Minimalni polinom

Na vektorskom prostoru $\mathcal{L}(V)$ svih linearnih operatora na prostoru V definirana je i operacija kompozicije, čime prostor $\mathcal{L}(V)$ dobiva dodatnu strukturu algebre, i to asocijativne algebre s jedinicom. Taj pojam uveden je u Linearnoj algebri 1 u vezi s prostorom matrica $M_n(\mathbb{F})$ (u udžbeniku pri kraju odjeljka 6.3 o operaciji množenja matrica i pripadnim svojstvima). Prostor $\mathcal{L}(V)$ ima takvu strukturu neovisno o tome je li V konačnodimenzionalni prostor, a ako je $\dim V = n$, tada je $\mathcal{L}(V)$ izomorfan s prostorom kvadratnih matrica $M_n(\mathbb{F})$ ne samo kao vektorski prostor nego i kao algebra. Izomorfizam se uspostavlja pomoću matričnog prikaza operatora. To slijedi iz tvrdnje iskazane u zadatku 6.9 i komentara koji slijedi nakon njega, a ključno je da se kompozicija operatora iz $\mathcal{L}(V)$ matričnim prikazom preslikava u umnožak pripadnih matrica.

U svakoj algebri (nad poljem $\mathbb{F}$) mogu se promatrati polinomi s koeficijentima iz $\mathbb{F}$. Ako je

$$p(t) = \sum_{i=0}^{k} \alpha_i t^i,$$

definirana je vrijednost polinoma u A, dakle

$$p(A) = \sum_{i=0}^{k} \alpha_i A^i,$$

kako za operator $A \in \mathcal{L}(V)$, tako i za matricu $A \in M_n(\mathbb{F})$. Dobiva se također linearni operator, odnosno matrica, a pritom se uzima $A^0 = I$. Operatorski, odnosno matrični polinomi pokazuju se vrlo važnima u linearnoj algebri.

Ako je $\dim V = n$, tada je $\dim \mathcal{L}(V) = n^2$. Za $A \in \mathcal{L}(V)$ razmotrimo skup$\{A^0 = I, A, A^2, \ldots, A^{n^2}\}$. U slučaju da su svi elementi tog skupa različiti skup je linearno zavisan jer sadrži $n^2 + 1$ elemenata, više nego što je dimenzija prostora. Stoga se neki element može prikazati kao linearna kombinacija njegovih prethodnika. U slučaju da u skupu ima jednakih elemenata, dakle ako je $A^j = A^k$ za neke $0 \leq j < k \leq n^2$, također postoji element, a to je A^k, izražen (trivijalno) kao linearna kombinacija njegovih prethodnika. Neka je $m \in \mathbb{N}$ najmanji takav da se A^m može izraziti kao linearna kombinacija prethodnika, to jest da postoje α_j, $j = 0, 1, \ldots, m-1$, koji nisu svi jednaki 0, takvi da je

$$A^m = \sum_{j=0}^{m-1} \alpha_j A^j.$$

Vidimo da polinom

$$p(t) = t^m - \sum_{j=0}^{m-1} \alpha_j t^j$$

ima svojstvo da vrijedi $p(A) = 0$ (nuloperator). Dakle, za svaki $A \in \mathcal{L}(V)$ postoji polinom $p(t)$ stupnja najviše n^2 koji A *poništava*, tj. $p(A) = 0$.

Zapravo vrijedi i znatno jači rezultat iskazan teoremom Hamiltona i Cayleya: *Svaki operator na konačnodimenzionalnom vektorskom prostoru poništava vlastiti karakteristični polinom.* Dakle, za svaki $A \in \mathcal{L}(V)$ vrijedi $k_A(A) = 0$.

Uočimo da je prednost tog teorema u odnosu na prethodni zaključak u tome što je stupanj karakterističnog polinoma jednak $\dim V = n$, dok smo prije lako ustanovili postojanje polinoma $p(t)$ sa svojstvom $p(A) = 0$, ali stupnja koji može dosegnuti (čak) n^2. Jasno, sve napisano odnosi se i na matričnu algebru $M_n(\mathbb{F})$.

Primjerice, uzmimo matricu $A \in M_2(\mathbb{F})$. Među matricama I, A, A^2, A^3 i A^4 mora postojati linearna zavisnost, no Hamilton-Cayleyev teorem govori da će ta zavisnost nastupiti već za I, A, A^2. Znamo da je karakteristični polinom jednak

$$k_A(\lambda) = \lambda^2 - (\operatorname{tr} A)\lambda + \det A.$$

Izračunamo li $k_A(A) = A^2 - (\operatorname{tr} A)A + (\det A)I$, kao rezultat doista dobivamo nulmatricu. Dakle,

$$A^2 = (\operatorname{tr} A)A - (\det A)I.$$

Odgovarajući rezultat dobili bismo uz malo više računanja i za $n = 3$. Dokaz Hamilton-Cayleyeva teorema za općeniti n je složeniji i može se naći u [1] i [2].

Spomenimo još da se za invertibilne operatore (izomorfizme na V), odnosno ekvivalentno, regularne matrice na temelju Hamilton-Cayleyeva teorema može inverz A^{-1} izraziti kao polinom u A. Naime, budući da je tada $\det A \neq 0$, član $(\det A)I$ različit je od nuloperatora, odnosno nulmatrice pa se iz jednakosti $k_A(A) = 0$ može izraziti $(\det A)I$ i zatim, množenjem s A^{-1} i skalarom $\frac{1}{\det A}$, dobivamo A^{-1} kao linearnu kombinaciju potencija od A. U primjeru $n = 2$ dobiva se

$$A^{-1} = -\frac{1}{\det A}A + \frac{\operatorname{tr} A}{\det A}I.$$

Za pojedini operator ili matricu A karakteristični polinom ne mora biti i polinom najmanjeg stupnja koji A poništava. Polinom s tim svojstvom naziva se *minimalni polinom operatora* A, odnosno matrice A. (Dogovorno se uzima da je vodeći koeficijent minimalnog polinoma jednak 1 jer ako je p neki takav polinom, jasno je da je i αp polinom jednakog stupnja koji ima isto svojstvo, za svaki skalar $\alpha \neq 0$.) Općenito vrijedi da je karakteristični polinom djeljiv minimalnim polinomom. Slične matrice imaju jednak minimalni polinom.

Neke jednostavne primjere minimalnog polinoma možemo naći u zadatku 6.20. Zadatak se odnosi na operatore na trodimenzionalnom prostoru za koje vrijedi $A^3 = A$, što znači da je $A^3 - A = 0$ pa svi oni poništavaju polinom $p(t) = t^3 - t$ stupnja 3. No za neke od navedenih operatora vrijedi i $A^2 = I$ pa takvi poništavaju polinom $q(t) = t^2 - 1$, dakle za njih je minimalni polinom stupnja najviše 2. Posebno, operatori $A = I$ i $A = -I$ poništavaju već polinome $t-1$, odnosno $t+1$ i to su njihovi minimalni polinomi, dok npr. za $\operatorname{diag}(1, -1, -1)$ minimalni polinom je $q(t) = t^2 - 1$. S druge strane, za $\operatorname{diag}(1, -1, 0)$ minimalni polinom je upravo $p(t) = t^3 - t$. Za $\operatorname{diag}(1, 0, 0)$ minimalni polinom je $t^2 - t$.

Polinom $p(t) = t^3 - t$ faktorizira se kao $p(t) = t(t-1)(t+1)$ pa, kako vidimo iz ovih primjera, minimalni polinom za neki od promatranih operatora može biti i svaki od njegovih djelitelja stupnja barem 1.

Napomena: Istaknimo da se Hamilton-Cayleyev teorem ne može dokazati "izravnim uvrštavanjem" matrice A u polinom $\det(A - \lambda I)$ (čime bi se, pogrešno, dobilo $\det(A - A) = \det O = 0$) s obzirom na to da nema smisla uvrštavati matricu na mjesto (skalarnog) elementa matrice $A - \lambda I$.

6.8.2 Invarijantni potprostori

Upoznali smo neke invarijante linearnih operatora na (konačnodimenzionalnom) prostoru V. To su rang, determinanta, trag, karakteristični polinom, spektar. Potprostor $L \leq V$ naziva se *invarijantnim potprostorom* za $A \in \mathcal{L}(V)$ ako je slika tog potprostora sadržana u njemu samom, dakle $A(L) \leq L$. Kao i za ostale invarijante, poznavanje invarijantnih potprostora znatno doprinosi razumijevanju djelovanja operatora. Pritom nulpotprostor $\{0\}$ i cijeli V, kao trivijalni invarijantni potprostori, nisu od stvarnog interesa.

Svaki svojstveni potprostor, ako ga operator A ima, očito je invarijantan za A. Naravno, direktna suma različitih svojstvenih potprostora također je invarijantni potprostor. Linearni operator općenito ne mora imati netrivijalnih invarijantnih potprostora. Jednostavan primjer ponovno je rotacija prostora $V^2(O)$ za kut $\pi/2$. S druge strane, netrivijalni invarijantni potprostor ne mora biti ni svojstven ni suma svojstvenih potprostora.

Uzmimo npr. operator A na prostoru $\mathbb{R}^4$, zadan u standardnoj bazi matricom

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Invarijantni potprostori su očito $[e_1, e_2]$ i $[e_3, e_4]$, ali svojstvenih potprostora nema jer nema ni realnih nultočaka karakterističnog polinoma. Na navedenim potprostorima A djeluje kao rotacija za kut $\pi/2$, odnosno $-\pi/2$.

Općenito netrivijalni invarijantni potprostor može se iskoristiti za izbor baze u kojoj će operatoru biti pridružena jednostavnija matrica. Sasvim slično kao u slučaju svojstvenih potprostora treba uzeti neku bazu invarijantnog potprostora pa je proširiti do baze prostora. Na taj način ako je L invarijantni potprostor dimenzije k, možemo dobiti npr. matricu u kojoj prvih k stupaca ima elemente 0 na svim pozicijama od $(k+1)$-og do zadnjeg, n-tog retka.

Posebno je povoljno ako se prostor V može prikazati kao direktna suma dvaju ili više (netrivijalnih) potprostora invarijantnih za operator A, npr. $V = L_1 \dot{+} \cdots \dot{+} L_r$. Takav operator naziva se *reducibilnim*, a njegova matrica u bazi sastavljenoj kao unija baza pojedinih invarijantnih potprostora ima oblik dijagonalne blok-matrice:

$$\begin{pmatrix} A_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_r \end{pmatrix}_{n\times n}, \quad A_i = \begin{pmatrix} \alpha_{11}^{(i)} & \cdots & \alpha_{1n_i}^{(i)} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ \alpha_{n_i1}^{(i)} & \cdots & \alpha_{n_in_i}^{(i)} \end{pmatrix}_{n_i\times n_i}, \quad \sum_{i=1}^{r} n_i = n.$$

6.8.3 Adjungirani operator

Neka su V i W konačnodimenzionalni prostori nad poljem $\mathbb{F}$, V^* i W^* njihovi dualni prostori te $A \in \mathcal{L}(V, W)$. Operatoru A može se pridružiti takozvani *adjungirani operator* $A^* \in \mathcal{L}(W^*, V^*)$ tako da za svaki vektor $v \in V$ i svaki funkcional $f \in W^*$ bude ispunjeno

$$(A^* f)(v) = f(Av).$$

Znamo da su prostori $\mathcal{L}(V, W)$ i $L(W^*, V^*)$ izomorfni jer su jednakih dimenzija: $\dim V \dim W = \dim V^* \dim W^*$, a pridruživanje $A \mapsto A^*$ jedan je njihov izomorfizam. Pokazuje se da je rang operatora A jednak rangu adjungiranog operatora A^*.

Nadalje, ako je (e) baza prostora V i (f) baza prostora W, a (e^*) i (f^*) njima dualne baze prostora V^* i W^*, nije teško provjeriti da su matrice $[A]_{(f,e)}$ i $[A^*]_{(e^*,f^*)}$ međusobno transponirane. Tako se dokazuje da bilo koje dvije međusobno transponirane matrice imaju jednak rang, tj. da je za svaku matricu maksimalni broj linearno nezavisnih stupaca jednak maksimalnom broju linearno nezavisnih redaka (teoremi 2.5.3 i 2.5.4). Tim pristupom pomoću adjungiranog operatora postaje jasnija veza između uzajamno transponiranih matrica i bolje se vidi razlog „ravnopravnosti“ stupaca i redaka u pogledu linearne nezavisnosti.

6.9 Linearni operatori na unitarnom prostoru

Nakon što smo se detaljno upoznali s osnovnim svojstvima linearnih operatora na općenitim i posebno konačnodimenzionalnim vektorskim prostorima, preostaje nam razmotriti linearne operatore koji djeluju na unitarnim prostorima te pritom posjeduju neka dodatna svojstva u odnosu na skalarno množenje. Dakako, osobito nas zanimaju realni unitarni prostori V^2 i V^3, odnosno $V^2(O)$ i $V^3(O)$, čija se geometrija uvelike zasniva na skalarnom množenju.

Kakva bi mogla biti ta „dodatna svojstva” linearnih operatora s obzirom na skalarno množenje? U načelu za preslikavanja se zahtijeva „čuvanje strukture” pa su linearni operatori preslikavanja vektorskih prostora koja su usklađena s operacijama zbrajanja vektora i množenja vektora skalarom tako da su „sačuvane” linearne kombinacije vektora: za $A \in \mathcal{L}(V, W)$ vrijedi

$$A(\alpha x + \beta y) = \alpha A(x) + \beta A(y).$$

Prirodno je stoga razmatrati one linearne operatore na unitarnim prostorima koji „čuvaju” skalarni produkt, u smislu da je skalarni produkt bilo kojih dvaju vektora iz domene jednak skalarnom produktu njihovih slika, dakle da vrijedi $\langle x|y\rangle = (Ax|Ay)$. Pritom je domena unitarni prostor V sa skalarnim množenjem $\langle\cdot|\cdot\rangle$, a kodomena W sa skalarnim množenjem $(\cdot|\cdot)$. (Naravno, isti unitarni prostor može biti i domena i kodomena.)

Čini li se taj uvjet čuvanja vrijednosti skalarnog produkta previše zahtjevan, to jest možemo li očekivati da takvih linearnih operatora uopće postoji toliko da bi ih bilo opravdano proučavati? U nekim otprije poznatim primjerima linearnih operatora nije teško razabrati da imaju i svojstvo čuvanja skalarnog produkta. To je osobito vidljivo kod nekih linearnih operatora na prostorima $V^2(O)$ i $V^3(O)$ (primjer 6.5) na temelju jasne geometrijske predodžbe njihova djelovanja. U tim prostorima skalarno množenje definirano je pomoću modula (duljine) vektora i kuta između vektora.

Ako, dakle, neki linearni operator ne promijeni ni modul ni kut, neće promijeniti ni vrijednost skalarnog produkta. Svaki operator zrcaljenja i svaki operator rotacije ima upravo takva svojstva. Naprotiv, operator homotetije čuva kut, ali ne i modul (osim iznimno za koeficijente 1 i -1, dakle jedinični operator i centralnu simetriju) pa općenito ne čuva skalarni produkt. Možemo očekivati da će primjera čuvanja skalarnog produkta biti i znatno više, u različitim unitarnim prostorima. Umjesto izravne provjere u pojedinačnim primjerima naučit ćemo neke kriterije za navedeno dodatno svojstvo čuvanja skalarnog produkta. Linearni operatori s tim svojstvom nazivaju se jednostavno unitarni operatori, uz pretpostavku da su domena i kodomena konačnodimenzionalni unitarni prostori jednakih dimenzija.

Definicija 6.9.1. *Neka su $(V, \langle\cdot|\cdot\rangle)$ i $(W, (\cdot|\cdot))$ konačnodimenzionalni unitarni prostori nad poljem $\mathbb{F}$, $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ ili $\mathbb{C}$, pri čemu je $\dim V = \dim W$. Linearni operator $A \in \mathcal{L}(V, W)$ nazivamo* ***unitarnim operatorom*** *ako za sve $x, y \in V$ vrijedi $\langle x|y\rangle = (Ax|Ay)$.*

Specijalno, u slučaju realnog unitarnog prostora ($\mathbb{F} = \mathbb{R}$), unitarni operator se često naziva ***ortogonalni operator****.*

Uočimo da je unitarni operator po definiciji i linearan, tako da se linearnost podrazumijeva čim se za preslikavanje $A : V \to W$ kaže da je to unitarni operator. Iz primjera je očito da ima linearnih operatora na unitarnim prostorima koji nisu unitarni operatori.

Primjer 6.28. *Neka je V unitarni prostor, različit od $\{0_V\}$ i $\alpha \in \mathbb{F}$. Preslikavanje $A : V \to V$ zadano s $Ax = \alpha x$ je unitarni operator na V ako i samo ako je $|\alpha| = 1$.*

Rješenje. Znamo da je tako zadano preslikavanje A linearni operator. Ispitajmo uz koji uvjet je A unitarni operator:

$$\langle Ax|Ay\rangle = \langle \alpha x|\alpha y\rangle = \alpha\overline{\alpha}\langle x|y\rangle = |\alpha|^2\langle x|y\rangle.$$

Očito je uvjet za unitarni operator ispunjen ako i samo ako je $|\alpha| = 1$. Posebno, za $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ α mora biti 1 ili -1. Za $\mathbb{F} = \mathbb{C}$, α može biti bilo koji kompleksni broj modula 1, npr. i ili $-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$. ♡

Budući da već imamo dosta iskustva u razmatranju linearnih operatora i unitarnih prostora, sad ćemo privremeno odstupiti od uobičajenog slijeda propozicija s dokazima. Umjesto toga pokušat ćemo ponešto „neformalno”, bez previše oznaka i formula, ali povezivanjem otprije poznatih činjenica zaključiti dosta toga o važnim svojstvima unitarnih operatora.

Na unitarnom prostoru uvodi se norma na standardni način pomoću skalarnog produkta. Ako je vrijednost skalarnog produkta nepromijenjena pod djelovanjem linearnog operatora, tada i vrijednost norme svakog vektora ostaje nepromijenjena. Dakle, unitarni operator čuva normu. Posebno, jedinični vektor preslikava se u neki (ne nužno isti) jedinični vektor. Nadalje, vektor različit od 0 ne može se preslikati u 0 jer bi time bilo narušeno svojstvo čuvanja norme. Odatle zaključujemo da je unitarni operator nužno injektivan, dakle monomorfizam. Unitarni operator kojem su domena i kodomena konačnodimenzionalni prostori jednakih dimenzija (moguće jedan te isti prostor) svakako je izomorfizam. U tom slučaju i inverzni operator očito je unitaran.

Čuvanje skalarnog umnoška implicira i čuvanje relacije ortogonalnosti jer se par vektora sa skalarnim umnoškom 0 preslikava u par vektora s jednakim takvim skalarnim umnoškom. Vidimo stoga da unitarni operator preslikava svaki ortogonalni podskup domene u neki ortogonalni podskup kodomene. Posebno, zbog čuvanja norme, ortonormirani podskup preslikava se u ortonormirani podskup. Ako je unitarni operator ne samo monomorfizam nego i izomorfizam konačnodimenzionalnih prostora, očito svaku ortonormiranu bazu domene preslika u ortonormiranu bazu kodomene.

Iz tog važnog svojstva vidimo i kako možemo zadati „po volji mnogo" unitarnih operatora (čim je dimenzija prostora veća od 1). Izaberemo bilo koje dvije ortonormirane baze unitarnog prostora (odnosno dvaju unitarnih prostora jednakih dimenzija) te zadamo linearni operator koji vektore izabrane baze domene preslikava redom u vektore izabrane baze kodomene. Je li takav linearni operator doista unitaran? To jest ako jednu ortonormiranu bazu preslika u bazu istog tipa, je li to dovoljno da bude sačuvana vrijednost skalarnog produkta bilo kojih dvaju vektora? Odgovor je potvrdan, što se vidi čim vektore domene prikažemo kao linearne kombinacije odabrane ortonormirane baze. Njihov skalarni produkt izražava se onda pomoću međusobnih skalarnih umnožaka pojedinih vektora baze, a lako je zamisliti i bez raspisivanja (iako je poželjno sve to i napisati) da će se za skalarni produkt slika tih vektora dobiti isti izraz, dobro poznata suma umnožaka odgovarajućih koordinata u odabranoj bazi.

To primjerice znači da ako ortonormiranu bazu $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ prostora $V^3(O)$ „pošaljemo" u ortonormiranu bazu $\{\vec{j}, -\vec{i}, \vec{k}\}$, time će biti zadan unitarni operator (očito rotacija za pravi kut, oko z-osi). Također, ako vektore baze $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ preslikamo redom u vektore $\{-\vec{k}, \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{i}-\vec{j}), \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{i}+\vec{j}\}$, time ćemo također zadati jedan unitarni operator s obzirom na to da smo za slike opet izabrali tri jedinična, u parovima ortogonalna vektora, premda možda nećemo smjesta prepoznati što taj operator predstavlja geometrijski.

Naravno, i za unitarne operatore na konačnodimenzionalnim prostorima od velike je koristi matrični prikaz. Pritom posebna, i to osobito jednostavna svojstva nastupaju ako se za matrični prikaz biraju ortonormirane baze kako bi do izražaja došlo ono što je maloprije spomenuto: unitarni operator preslikava ortonormirani skup u ortonormirani skup, a posebno to vrijedi za ortonormirane baze ako su domena i kodomena jednakih dimenzija (i tada je svaki unitarni operator izomorfizam).

Pretpostavimo, dakle, da su izabrane (jednakobrojne) ortonormirane baze domene i kodomene unitarnog operatora. Što možemo zaključiti o pripadnoj matrici? Njezini stupci predstavljaju slike vektora baze, a to su ortogonalni vektori. Dakle, skalarni umnožak svakih dvaju različitih stupaca iznosi 0. Pomnožimo li skalarno bilo koji stupac sam sa sobom, dobivamo kvadrat norme slike odgovarajućeg vektora baze, a i to je jedinični vektor pa je rezultat 1. Ukratko, matrica unitarnog operatora u paru ortonormiranih baza bit će ortogonalna matrica u slučaju realnih, odnosno unitarna matrica u slučaju kompleksnih unitarnih prostora. (Realna kvadratna matrica je ortogonalna ako je njezin umnožak s transponiranom matricom jednak jediničnoj matrici. Kompleksna kvadratna matrica je unitarna ako je njezin umnožak s hermitski adjungiranom matricom jedinična matrica.) Tim činjenicama dopunjeno je tumačenje važnosti spomenutih posebnih tipova matrica, koje su definirane u Linearnoj algebri 1.

Napokon, vrlo jednostavno možemo zaključiti ponešto o spektru unitarnog operatora. Već znamo da spektar može biti prazan skup (opet primjer rotacije prostora $V^2(O)$ za kut koji nije višekratnik od π jer operator rotacije jest unitaran). No ako je spektar neprazan, u njemu se nalaze samo skalari čija je apsolutna vrijednost jednaka 1. U realnom slučaju to lako zaključimo odatle što svojstveni vektor i njegova slika imaju isti smjer, a unitarni operator čuva normu. Slika svojstvenog vektora može stoga biti ili on sam ili njemu suprotni vektor. Znamo, primjerice, da je spektar svakog zrcaljenja s obzirom na potprostor dimenzije barem 1 upravo $\{1, -1\}$. U kompleksnom slučaju sve je analogno, samo što umjesto o „smjeru" radije govorimo o linearnoj zavisnosti svojstvenog vektora i njegove slike.

Važna činjenica koju bismo mogli naslutiti, ali za čiji je dokaz ipak potrebno barem malo pisanja, sastoji se u tome da su svojstveni vektori unitarnog operatora koji su pridruženi različitim svojstvenim vrijednostima nužno ortogonalni međusobno. To je također vidljivo pri zrcaljenju.

Sad ćemo pregledno navesti propozicije koje su u prethodnim razmatranjima unitarnih operatora zapravo bile iskazane, pa i protumačene. Za usvajanje izložene materije korisno je dobro razumjeti sve prethodno i bez raspisivanja računa (redovito dosta kratkih), no također je potrebno znati sve to i egzaktno dokazati. Razlika nije velika.

U iskazima i oznakama pretpostavljat ćemo da domena i kodomena unitarnog operatora mogu biti različiti unitarni prostori, dakle i s različitim skalarnim množenjem, a da je norma definirana pomoću skalarnog množenja na standardni način. Radi jednostavnosti upotrijebit ćemo samo jednu oznaku za skalarno množenje i jednu, uobičajenu oznaku za pripadnu normu: $\|x\| = \sqrt{\langle x|x\rangle}$.

Propozicija 6.9.2. *Neka su V i W unitarni prostori, ne nužno konačnodimenzionalni i neka je $A \in \mathcal{L}(V, W)$ operator takav da za sve $x, y \in V$ vrijedi $\langle x|y\rangle = \langle Ax|Ay\rangle$. Tada vrijedi:*

(i) $\|Ax\| = \|x\|$ za svaki $x \in V$,

(ii) A je monomorfizam,

(iii) Ako je $S = \{x_1, \ldots, x_k\}$ ortogonalni podskup prostora V, onda je $A(S) = \{Ax_1, \ldots, Ax_k\}$ ortogonalni podskup prostora W; posebno, ako je S ortonormirani podskup od V, onda je $A(S)$ ortonormirani podskup od W.

Dokaz. (i) $\|Ax\| = \sqrt{\langle Ax|Ax\rangle} = \{A \text{ je unitaran}\} = \sqrt{\langle x|x\rangle} = \|x\|$.

(ii) Ako je $x \in J(A)$, to jest $Ax = 0_W$, onda je $\|Ax\| = 0$, a zbog (i) tada je i $\|x\| = 0$, što znači da je $x = 0_V$.

(iii) Budući da je skalarni produkt bilo kojih dvaju različitih vektora iz S jednak 0, skalarni produkt njihovih slika također je 0. Zbog (i) slika svakog jediničnog vektora iz V jedinični je vektor u W.

□

Primijenimo tvrdnje iz prethodne propozicije na slučaj konačnodimenzionalnih unitarnih prostora. Ako su V i W jednake dimenzije, iz (ii) pomoću teorema o rangu i defektu (v. korolar 6.4.12) slijedi da je A izomorfizam. Odatle i primjenom (iii) na ortonormiranu bazu prostora V dobivamo sljedeću tvrdnju.

Korolar 6.9.3. *Neka su V i W konačnodimenzionalni unitarni prostori takvi da je $\dim V = \dim W = n$ i neka je $A \in \mathcal{L}(V, W)$ unitarni operator. Tada je A izomorfizam. Ako je $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ ortonormirana baza prostora V, operator A preslikava je u ortonormiranu bazu $\{Ae_1, Ae_2, \dots, Ae_n\}$ prostora W.*

Svojstvo „čuvanja” ortonormiranih baza važan je kriterij za unitarnost linearnih operatora na konačnodimenzionalnim prostorima.

Propozicija 6.9.4. *Neka su V i W konačnodimenzionalni unitarni prostori i neka je $A \in \mathcal{L}(V, W)$ linearni operator. Ako A barem jednu ortonormiranu bazu prostora V preslika u ortonormiranu bazu prostora W, tada je A unitarni operator te svaku ortonormiranu bazu prostora V preslika u ortonormiranu bazu prostora W.*

Dokaz. Pretpostavimo da je $(e) = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ ortonormirana baza prostora V koju linearni operator A preslika u ortonormiranu bazu $\{Ae_1, Ae_2, \dots, Ae_n\}$ prostora W. Tada su V i W nužno jednakih dimenzija. Treba dokazati da je A unitarni operator, a druga tvrdnja zatim slijedi iz korolara 6.9.3.

Prikažimo $x, y \in V$ u bazi (e),

$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i, \;\; y = \sum_{i=1}^{n} y_i e_i.$$

Poznati račun (kao u 5.4, str. 15) daje nam

$$\langle x | y \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{y_i}.$$

Isti rezultat dobivamo za $\langle Ax | Ay \rangle$ jer

$$Ax = \sum_{i=1}^{n} x_i A e_i, \;\; Ay = \sum_{i=1}^{n} y_i A e_i,$$

a skup $\{Ae_1, Ae_2, \dots, Ae_n\}$ je ortonormirana baza. $\square$

Navest ćemo još jednu korisnu tvrdnju, koja nije ograničena na konačnodimenzionalne unitarne prostore.

Propozicija 6.9.5. *Neka je $A \in \mathcal{L}(V,W)$ unitarni izomorfizam. Tada je i inverzni operator A^{-1} unitaran. Nadalje, tada vrijedi*

$$\langle Ax|y\rangle = \langle x|A^{-1}y\rangle$$

za sve $x \in V$, $y \in W$.

Dokaz. Za vektore $w, z \in W$ vrijedi $w = A(A^{-1}w)$ i analogno za z pa je

$$\langle w|z\rangle = \langle A(A^{-1}w)|A(A^{-1}z)\rangle = \{A \text{ je unitaran}\} = \langle A^{-1}w|A^{-1}z\rangle.$$

To znači da je $A^{-1} \in \mathcal{L}(W,V)$ unitaran. Nadalje, za $x \in V$ i $y \in W$ imamo

$$\langle Ax|y\rangle = \langle Ax|A(A^{-1}y)\rangle = \langle x|A^{-1}y\rangle.$$

□

Zadatak 6.21. *Ilustrirajte drugu tvrdnju iz prethodne propozicije na primjerima rotacije prostora $V^2(O)$ i zrcaljenja istog prostora s obzirom na jednodimenzionalni potprostor.*

Zadatak 6.22. *Dokažite da je skup svih unitarnih operatora na konačnodimenzionalnom unitarnom prostoru V grupa s obzirom na kompoziciju operatora. Odredite te grupe za realni i za kompleksni jednodimenzionalni unitarni prostor V.*

Slijedi razmatranje matričnog prikaza unitarnog operatora, i to u paru ortonormiranih baza, s obzirom na to da je takav izbor baza očito najpovoljniji. Podsjetimo se definicija ortogonalne i unitarne matrice.

Definicija 6.9.6. *(a) Matrica $A \in M_n(\mathbb{R})$ naziva se* ***ortogonalna matrica*** *ako za nju vrijedi $AA^t = A^tA = I$.*

(b) Matrica $A \in M_n(\mathbb{C})$ naziva se ***unitarna matrica*** *ako za nju vrijedi $AA^* = A^*A = I$. Pritom je A^* hermitski adjungirana matrica, dobivena transponiranjem matrice čiji elementi su konjugirano kompleksni brojevi elemenata matrice A, dakle za $A = [\alpha_{ij}]$ to je matrica $A^* = [\overline{\alpha_{ji}}]$.*

Uočimo da je inverz ortogonalne matrice upravo njezina transponirana matrica, a inverz unitarne matrice njezina hermitski adjungirana matrica. Za matricu A čiji su svi elementi realni brojevi podudaraju se njezina transponirana i hermitski adjungirana matrica.

Nadalje, iz definicije ortogonalne matrice, činjenice da se determinanta matrice ne mijenja transponiranjem te pomoću Binet-Cauchyjeva teorema slijedi da za ortogonalnu matricu A vrijedi

$$(\det A)^2 = 1$$

pa je $\det A = 1$ ili -1. Analogno, za unitarnu matricu A, uz primjedbu da je za nju $\det A^* = \overline{\det A}$ (transponiranje ne mijenja determinantu, ali kompleksno konjugiranje svih elemenata matrice očito dovodi do kompleksnog konjugiranja vrijednosti determinante), dobivamo

$$\det(AA^*) = (\det A)(\det A^*) = \det A \cdot \overline{\det A} = |\det A|^2 = 1.$$

Ovaj put to je kvadrat modula kompleksnog broja pa je opet $|\det A| = 1$, no to može biti bilo koji kompleksni broj modula 1.

Propozicija 6.9.7. *Neka su V i W konačnodimenzionalni unitarni prostori takvi da je $\dim V = \dim W = n$ i neka je $A \in \mathcal{L}(V, W)$ unitarni operator. Neka je $(e) = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ ortonormirana baza prostora V i $(f) = \{f_1, f_2, \ldots, f_n\}$ ortonormirana baza prostora W. Matrica operatora A u tom paru baza je ortogonalna matrica u slučaju realnih, odnosno unitarna matrica u slučaju kompleksnih prostora V i W.*

Dokaz. U paru baza (e) i (f) operatoru A pridružena je matrica $[A]_{(f,e)} = [\alpha_{ij}]$, što znači da je

$$Ae_j = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ij} f_i, \ j = 1, \ldots, n.$$

Za različite j i k vrijedi

$$\langle Ae_j | Ae_k \rangle = \langle e_j | e_k \rangle = 0,$$

a to je jednako

$$\langle \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ij} f_i \,|\, \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ik} f_i \rangle = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ij} \overline{\alpha_{ik}}.$$

Nadalje,

$$\langle Ae_j | Ae_j \rangle = \langle e_j | e_j \rangle = 1,$$

što je s druge strane jednako

$$\langle \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ij} f_i | \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ij} f_i \rangle = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ij} \overline{\alpha_{ij}} = \sum_{i=1}^{n} |\alpha_{ij}|^2.$$

Odatle vidimo da je umnožak

$$[A]^*_{(f,e)} [A]_{(f,e)} = I.$$

Očito je onda

$$[A]^*_{(f,e)} = [A]^{-1}_{(f,e)}$$

pa je i

$$[A]_{(f,e)} [A]^*_{(f,e)} = I.$$

Posebno, ako je $[A]_{(f,e)}$ realna matrica, $[A]^*_{(f,e)} = [A]^t_{(f,e)}$ i time je tvrdnja dokazana. □

Napomena. Budući da vrijednost determinante linearnog operatora $A \in \mathcal{L}(V)$ ne ovisi o izboru baze, iz ove propozicije slijedi da je determinanta unitarnog operatora jednaka 1 ili -1 nad $\mathbb{R}$, odnosno da je to kompleksni broj modula 1 nad $\mathbb{C}$.

Korolar 6.9.8. *Matrica prijelaza između dviju ortonormiranih baza je ortogonalna u realnom slučaju, odnosno unitarna u slučaju kompleksnog unitarnog prostora.*

Dokaz. Kako je jedinični operator unitaran, a znamo da je matrica prijelaza između dviju baza ujedno matrica jediničnog operatora (v. 6.7, str. 184), primijenimo prethodnu propoziciju na jedinični operator I, dakako, za one dvije ortonormirane baze na koje se odnosi matrica prijelaza u tvrdnji korolara. □

Korolar 6.9.9. *Neka su (e) i (e') dvije ortonormirane baze konačnodimenzionalnog unitarnog prostora V i neka je $A \in \mathcal{L}(V)$. Za matrične prikaze tog operatora u naznačenim bazama tada vrijedi*

$$[A]_{(e')} = T^t [A]_{(e)} T$$

nad poljem $\mathbb{R}$, odnosno

$$[A]_{(e')} = T^* [A]_{(e)} T$$

nad poljem $\mathbb{C}$, pri čemu je T matrica prijelaza iz baze (e) u bazu (e').

Ovaj korolar dobiven je izravno iz korolara 6.7.5 primjenom korolara 6.9.8. Dakle, relacija sličnosti između matrica linearnog operatora u različitim bazama pojednostavljuje se za ortonormirane baze time što se za inverznu matricu stavlja transponirana (za realni prostor), odnosno hermitski adjungirana matrica (za kompleksni prostor). Općenit postupak invertiranja matrice svodi se na sasvim jednostavnu operaciju transponiranja, odnosno hermitskog adjungiranja. Korolar vrijedi za bilo koji $A \in \mathcal{L}(V)$, samo što u slučaju da je to unitarni operator sve su matrice u navedenoj relaciji ortogonalne, odnosno unitarne.

Ako su matrice A i B slične, i to tako da postoji ortogonalna, odnosno unitarna matrica T pomoću koje je ostvarena relacija $B = T^t AT$, odnosno $B = T^* AT$, ukratko kažemo da su A i B *ortogonalno slične*, odnosno *unitarno slične matrice.*

Primjer 6.29. *Neka je $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ ortonormirana baza prostora $V^3(O)$, a R operator rotacije za kut $\pi/3$ oko osi zadane vektorom $\vec{v} = \vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$. Izračunajmo matricu operatora R u bazi $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$.*

Rješenje. Poslužimo se time što znamo kako izgleda tipična matrica rotacije za kut φ u ortonormiranoj bazi. Ako je os rotacije određena prvim vektorom te baze, matrica glasi

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi \\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}.$$

Takvu matricu R će imati u ortonormiranoj bazi kojoj je prvi vektor jedinični vektor smjera $\vec{v}$ (zapravo taj vektor ne mora biti jedinični, ali nam je za daljnji račun praktičnije služiti se samo ortonormiranim bazama i ortogonalnim matricama). To je

$$\vec{a_1} = \frac{1}{\sqrt{3}}(\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}).$$

Za drugi vektor te baze možemo uzeti bilo koji jedinični $\vec{a_2}$ takav da je ortogonalan na $\vec{a_1}$ pa izaberimo

$$\vec{a_2} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{i} + \vec{j}).$$

Konačno, $\vec{a_3}$ treba biti ortogonalan na $\vec{a_1}$ i na $\vec{a_2}$ pa ga možemo odrediti pomoću vektorskog produkta, pri čemu, ako pazimo i na orijentaciju, $(\vec{a_1}, \vec{a_2}, \vec{a_3})$ treba biti pozitivno orijentirana („desna") baza tako da je

$$\vec{a_3} = \vec{a_1} \times \vec{a_2} = \frac{1}{\sqrt{6}}(-\vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}).$$

Matrica prijelaza iz baze $(e) = \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ u bazu $(a) = \{\vec{a_1}, \vec{a_2}, \vec{a_3}\}$ glasi:

$$T = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}.$$

U našem slučaju

$$[R]_{(a)} = T^t [R]_{(e)} T,$$

a tražimo $[R]_{(e)}$, dakle

$$[R]_{(e)} = T[R]_{(a)} T^t$$

Znamo da je

$$[R]_{(a)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Izračunavanjem umnoška $T[R]_{(a)}T^t$ dobivamo

$$[R]_{(e)} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

Valjanost tog rezultata možemo testirati tako da provjerimo da je dobivena matrica ortogonalna (zbroj kvadrata svakog stupca iznosi 1, skalarni umnožak različitih stupaca iznosi 0), da joj je trag jednak 2 (općenito $1 + 2\cos\varphi$ za rotaciju) i determinanta jednaka 1. Ti uvjeti su nužni kako bi matrica bila pridružena rotaciji za kut $\pi/3$ oko neke osi. (Zapravo su to i dovoljni uvjeti, što će se vidjeti iz primjera 6.30). Budući da za tu matricu vrijedi

$$[R]_{(e)}[\vec{v}]_{(e)} = [\vec{v}]_{(e)},$$

os te rotacije doista je pravac kroz ishodište smjera $\vec{v}$, odnosno $[\vec{v}]$. ♡

Prelazimo sada na razmatranje spektra i svojstvenih vektora unitarnog operatora. Primijetimo da spektar unitarnog operatora na realnom prostoru može biti prazan skup tako da je većina sljedećih tvrdnji od stvarnog interesa u realnom slučaju samo ako je spektar operatora neprazan.

Propozicija 6.9.10. *Neka je A unitarni operator na unitarnom prostoru V. Tada vrijedi:*

(a) Ako je $\lambda \in \sigma(A)$, onda je $|\lambda| = 1$. Posebno, ako je svojstvena vrijednost λ realni broj, tada je to 1 ili -1.

(b) Ako su $\lambda_1, \lambda_2 \in \sigma(A)$ različite svojstvene vrijednosti, a v_1, v_2 pripadni svojstveni vektori, tada su v_1 i v_2 ortogonalni vektori. Odatle slijedi da su svojstveni potprostori pridruženi različitim svojstvenim vrijednostima međusobno ortogonalni.

(c) Ako je v svojstveni vektor operatora A i x bilo koji vektor ortogonalan na v, tada je i Ax ortogonalan na v. Drugim riječima, ako je v svojstveni vektor, ortogonalni komplement potprostora $[v]$ invarijantan je pod djelovanjem A.

Dokaz. (a) Neka je $Av = \lambda v$, $v \neq 0_V$. Tada je

$$\langle v|v\rangle = \langle Av|Av\rangle = \langle \lambda v|\lambda v\rangle = \lambda\overline{\lambda}\langle v|v\rangle = |\lambda|^2\langle v|v\rangle,$$

odakle slijedi $|\lambda| = 1$.

(b) Imamo

$$\langle v_1|v_2\rangle = \langle Av_1|Av_2\rangle = \langle \lambda_1 v_1|\lambda_2 v_2\rangle = \lambda_1\overline{\lambda_2}\langle v_1|v_2\rangle.$$

Ako bi bilo $\langle v_1|v_2\rangle \neq 0$, vrijedilo bi $\lambda_1\overline{\lambda_2} = 1$, no tada množenjem obiju strana jednakosti s λ_2 dobivamo $\lambda_1 = \lambda_2$, suprotno pretpostavci o različitosti tih svojstvenih vrijednosti.

(c) Neka je $Av = \lambda v$, $v \neq 0$ i $\langle v|x\rangle = 0$. Treba dokazati da je tada $\langle v|Ax\rangle = 0$. No $\langle v|x\rangle = \langle Av|Ax\rangle = \lambda\langle v|Ax\rangle$, a budući da je $|\lambda| = 1$, mora biti $\langle v|Ax\rangle = 0$.

□

Želimo li ilustrirati (b) na primjeru, uzmimo bilo koje zrcaljenje prostora $V^2(O)$ ili $V^3(O)$ s obzirom na potprostor dimenzije 1 ili 2. Svojstveni potprostor za svojstvenu vrijednost 1 je potprostor fiksnih vektora s obzirom na koji je zadano zrcaljenje, a njegov ortogonalni komplement je svojstveni potprostor za svojstvenu vrijednost -1. Svojstvo (c) također možemo ilustrirati na zrcaljenju, ali i na rotaciji $V^3(O)$ oko neke osi. Ta os je zapravo jednodimenzionalni svojstveni potprostor za svojstvenu vrijednost 1, a njegov ortogonalni komplement je dvodimenzionalni potprostor (geometrijski, ravnina kroz ishodište u kojoj se izvodi rotacija) i taj je invarijantan neovisno o tome ima li u njemu svojstvenih vektora, dakle invarijantan za bilo koji kut rotacije.

Nakon prethodne propozicije raspolažemo znanjem potrebnim kako bismo u potpunosti opisali unitarne operatore na realnim unitarnim prostorima dimenzija 1, 2 i 3. Za dimenziju 1 mogli smo još pri rješavanju zadatka 6.22. lako ustanoviti da su jedinični operator I i operator $-I$ koji svakom vektoru pridružuje njemu suprotni vektor jedini unitarni operatori. Za dimenzije 2 i 3 možemo promatrati prostore $V^2(O)$ i $V^3(O)$, koji su nam i geometrijski najzanimljiviji.

Primjer 6.30. *Klasifikacija unitarnih operatora na prostorima $V^2(O)$ i $V^3(O)$.* Opisat ćemo sve unitarne operatore na prostorima $V^2(O)$ i $V^3(O)$. Uvjerit ćemo se da ih zapravo sve već otprije znamo.

(a) Unitarni operatori na prostoru $V^2(O)$. Neka je A unitarni operator na prostoru $V^2(O)$. Njegov spektar može biti prazan skup ili jedan od skupova $\{1\}$, $\{-1\}$ i $\{1, -1\}$.

Ako je $\sigma(A) = \{1, -1\}$, A ima dva međusobno ortogonalna svojstvena potprostora i očito se može dijagonalizirati u ortonormiranoj bazi. A je tada zrcaljenje s obzirom na svojstveni potprostor $V_A(1)$. Matrica u bazi svojstvenih vektora je $\operatorname{diag}(1, -1)$ ili $\operatorname{diag}(-1, 1)$.

Ako je $\sigma(A) = \{1\}$, svojstvena vrijednost 1 ima algebarsku kratnost 2. Ako je i njezina geometrijska kratnost 2, A je jedinični operator. Može li geometrijska kratnost iznositi 1? Ne može, zbog svojstva (c) u propoziciji 6.9.10. Kad bi bilo $\dim V_A(1) = 1$ i $A\vec{v} = \vec{v}$, pri čemu je $\vec{v} \neq \vec{0}$, za bilo koji vektor $\vec{w} \neq \vec{0}$ ortogonalan na $\vec{v}$, imali bismo da je i $A\vec{w}$ ortogonalan na $\vec{v}$. Vektor $A\vec{w}$ bio bi linearno zavisan s $\vec{w}$ pa bi i $\vec{w}$ bio svojstveni vektor za A, nemoguće. Analogno razmatranje za slučaj $\sigma(A) = \{-1\}$ pokazuje da tada mora biti $A = -I$.

Preostaje slučaj kad A nema svojstvenih vrijednosti. U bilo kojoj ortonormiranoj bazi tom operatoru pridružena je ortogonalna matrica pa kako je slika jediničnog vektora također jedinični vektor, koeficijente u prvom stupcu matrice možemo izraziti kao $\cos\varphi$ i $\sin\varphi$, a u drugom stupcu kao $\cos\psi$ i $\sin\psi$, pri čemu su $\varphi, \psi \in [0, 2\pi\rangle$ i vrijedi

$$\cos\varphi\cos\psi + \sin\varphi\sin\psi = 0$$

(ortogonalnost stupaca). Zato je $\cos(\varphi - \psi) = 0$ pa je $\varphi - \psi = \pi/2$ ili $-\pi/2$. U prvom slučaju je $\cos\psi = \sin\varphi$, a u drugom $\cos\psi = -\sin\varphi$. Mogući oblici matrica su, dakle, ovi:

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & -\cos\varphi \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}.$$

Budući da prva matrica ima determinantu -1, a druga determinantu 1, svakako su pridružene različitim operatorima. No karakteristični polinom prve matrice ima nultočke 1 i -1 pa je to zapravo matrica zrcaljenja. Druga matrica poznata nam je kao matrica rotacije za kut φ, pri čemu zbog pretpostavke o praznom spektru φ nije 0 (što bi značilo jedinični operator) ni π (rotacija za kut π je operator $-I$).

(b) Unitarni operatori na prostoru $V^3(O)$. Linearni operator na prostoru neparne dimenzije n ima barem jednu svojstvenu vrijednost jer je karakteristični polinom stupnja n (v. napomenu na str. 197). Neka je λ svojstvena vrijednost unitarnog operatora A i $\vec{v}$ pripadni svojstveni vektor. Prema propoziciji 6.9.10 $\lambda \in \{-1, 1\}$.

Ortogonalni komplement $[\vec{v}]^{\perp}$ sada je dvodimenzionalni potprostor, a prema tvrdnji (c) prethodne propozicije taj je potprostor invarijantan za operator A. Prostor $V^3(O)$ jednak je ortogonalnoj sumi invarijantnih potprostora,

$$V^3(O) = [\vec{v}] + [\vec{v}]^{\perp},$$

a drugi je izomorfan prostoru $V^2(O)$. Stoga je daljnja analiza već obuhvaćena slučajem (a).

Za matricu operatora A u ortonormiranoj bazi koja se sastoji od vektora $\vec{v}$ i bilo kojih dvaju ortonormiranih vektora iz $[\vec{v}]^{\perp}$ to znači da poprima ovaj oblik:

$$\begin{pmatrix} \pm 1 & 0 & 0 \\ 0 & \beta_{11} & \beta_{12} \\ 0 & \beta_{21} & \beta_{22} \end{pmatrix},$$

pri čemu podmatrica $B = [\beta_{ij}]$ reda 2 ima jedan od oblika ustanovljenih u slučaju (a) jer to je matrica restrikcije unitarnog operatora A na dvodimenzionalni potprostor $V^2(O)$.

Matrica A može imati jedan od dijagonalnih oblika:

- $\operatorname{diag}(1, 1, 1)$ (jedinični operator I),
- $\operatorname{diag}(-1, -1, -1)$ (operator $-I$, zrcaljenje s obzirom na ishodište)
- $\operatorname{diag}(-1, 1, 1)$, $\operatorname{diag}(1, -1, 1)$, $\operatorname{diag}(1, 1, -1)$ (zrcaljenje s obzirom na dvodimenzionalni potprostor),
- $\operatorname{diag}(1, -1, -1)$, $\operatorname{diag}(-1, 1, -1)$, $\operatorname{diag}(-1, -1, 1)$ (zrcaljenje s obzirom na jednodimenzionalni potprostor)

ili oblik u kojem B prikazuje operator rotacije koji se ne da dijagonalizirati; za svojstvenu vrijednost 1 to predstavlja rotaciju $V^3(O)$ oko osi određene svojstvenim vektorom, a za svojstvenu vrijednost -1 to je kompozicija rotacije i zrcaljenja s obzirom na dvodimenzionalni potprostor (umnožak matrice $diag(-1, 1, 1)$ i matrice rotacije).

Naglasimo još ovdje da spomenuta preslikavanja (zrcaljenje i rotacija) ne moraju biti zadana s obzirom na koordinatne osi i ravnine, kako smo možda naviknuti, nego da se taj oblik dobiva pogodnim izborom ortonormirane baze (iz svojstvenih potprostora i njihovih ortogonalnih komplemenata). To vidimo u primjeru 6.29 gdje je tipična matrica rotacije dobivena u bazi koja ima prikladan geometrijski smisao s obzirom na rotaciju, dok matrica u nekoj unaprijed zadanoj ortonormiranoj bazi nije odmah prepoznatljiva kao matrica rotacije.

Međutim, sad smo u stanju ispitati može li se tip unitarnog operatora odrediti iz samih njegovih invarijanti. Iz gornjeg popisa svih tipova vidimo sljedeće mogućnosti:

(1) $\operatorname{tr} A = 3$, $\det A = 1$,

(2) $\operatorname{tr} A = -3$, $\det A = -1$,

(3) $\operatorname{tr} A = 1$, $\det A = -1$,

(4) $\operatorname{tr} A = -1$, $\det A = 1$,

(5) $\operatorname{tr} A = -1 + 2\cos\varphi$, $\det A = -1$,

(6) $\operatorname{tr} A = 1 + 2\cos\varphi$, $\det A = 1$.

U slučaju (5) i (6) vrijedi $-1 < \cos\varphi < 1$ pa u (6) imamo $-1 < \operatorname{tr} A < 3$. Stoga je slučaj (6) bitno različit od svih ostalih kad gledamo vrijednosti traga i determinante. Također, slučaj (5) ne može se uklopiti u neki od ostalih slučajeva gdje je $\det A = -1$, a to su (2) i (3) jer za njih bi moralo biti $\cos\varphi = -1$, odnosno $\cos\varphi = 1$, a to je isključeno.

Stoga tipove unitarnih operatora na prostoru $V^3(O)$ možemo već na temelju vrijednosti traga i determinante razvrstati ovako:

(I) $\det A = 1$, *operatori koji čuvaju orijentaciju:*

- *(I-1)* $\operatorname{tr} A = 3$, *jedinični operator,*
- *(I-2)* $\operatorname{tr} A = -1$, *zrcaljenje s obzirom na pravac (rotacija za kut* π *oko pravca),*
- *(I-3)* $-1 < \operatorname{tr} A < 3$, *rotacija za kut* φ *takav da je* $\cos\varphi = (\operatorname{tr} A - 1)/2$,

(II) $\det A = -1$, *operatori koji mijenjaju orijentaciju:*

- *(II-1)* $\operatorname{tr} A = -3$, *zrcaljenje s obzirom na ishodište,*
- *(II-2)* $\operatorname{tr} A = 1$, *zrcaljenje s obzirom na ravninu,*
- *(II-3)* $-3 < \operatorname{tr} A < 1$, *kompozicija rotacije za kut* φ *takav da je* $\cos\varphi = (\operatorname{tr} A + 1)/2$ *i zrcaljenja s obzirom na ravninu okomitu na os te rotacije.*

Podsjetimo da je pojam orijentacije ovdje vezan uz bazu. Prva skupina unitarnih operatora preslikava pozitivno orijentiranu bazu u pozitivno orijentiranu (a negativnu u negativnu), dok operatori druge skupine pozitivnu bazu preslikaju u negativnu i obrnuto.

Za matricu $[R]_{(e)}$ dobivenu u primjeru 6.29 lako ustanovimo da joj je trag jednak 2, a determinanta jednaka 1 pa je to svakako matrica rotacije za kut φ takav da je $\cos\varphi = \frac{1}{2}$, dakle rotacija za kut $\pi/3$ ili $5\pi/3$.

Naravno, sve to vrijedi ako je doista u pitanju unitarni operator, a to je prepoznatljivo po svojstvu da mu je matrica u ortonormiranoj bazi ortogonalna matrica.

♡

Osim unitarnih operatora važni su još neki tipovi linearnih operatora s posebnim svojstvima na unitarnim prostorima. Ovdje ukratko spominjemo samo simetrične, odnosno hermitski simetrične operatore.

Definicija 6.9.11. *Neka je* $(V, \langle\cdot|\cdot\rangle)$ *unitarni prostor nad poljem* $\mathbb{F}$, $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ *ili* $\mathbb{C}$. *Linearni operator* $A \in \mathcal{L}(V)$ *nazivamo* ***simetričnim operatorom*** *u slučaju* $\mathbb{F} = \mathbb{R}$, *odnosno* ***hermitski simetričnim operatorom*** *u slučaju* $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ *za ako za sve* $x, y \in V$ *vrijedi*

$$\langle Ax|y\rangle = \langle x|Ay\rangle.$$

U slučaju kompleksnog prostora hermitski simetrični operator nazivat ćemo kraće *hermitskim operatorom.* Tom pojmu korespondira pojam *hermitski simetrične* ili, kraće, *hermitske matrice*, a to je matrica $A \in M_n(\mathbb{C})$ za koju vrijedi $A = A^*$.

Relacija kojom je definirano svojstvo simetričnog linearnog operatora može se učiniti neobičnom, no među već dobro poznatim primjerima linearnih operatora dosta lako ćemo prepoznati neke koji su simetrični. Neki od njih su i unitarni, a neki nisu.

Primjer 6.31. *Na realnom unitarnom prostoru V među simetrične operatore ubrajaju se sve homotetije, zrcaljenja i ortogonalni projektori. Rotacije prostora $V^2(O)$ i $V^3(O)$ općenito nisu simetrični operatori.*

♡

Provjerite istinitost tvrdnji u prethodnom primjeru. Općenito će svojstvo simetričnosti, odnosno hermitske simetričnosti biti lakše provjeriti pomoću matričnog prikaza u ortonormiranoj bazi.

Propozicija 6.9.12. *Neka je V konačnodimenzionalni unitarni prostor. Linearni operator $A \in \mathcal{L}(V)$ je simetrični operator u slučaju realnog prostora, odnosno hermitski u slučaju kompleksnog prostora V ako i samo ako je njegova matrica u bilo kojoj ortonormiranoj bazi simetrična, odnosno hermitski simetrična matrica.*

Prije dokaza naglasimo da ta tvrdnja znači da je za svojstvo simetričnosti, odnosno hermitske simetričnosti nužno i dovoljno da linearni operator u barem jednoj ortonormiranoj bazi bude prikazan simetričnom, odnosno hermitski simetričnom matricom. Ako je to ispunjeno, takvom će operatoru u svakoj ortonormiranoj bazi biti pridružena simetrična (hermitski simetrična) matrica.

Dokaz. Neka je u ortonormiranoj bazi (e) simetričnom operatoru A pridružena matrica $[A]_{(e)} = [\alpha_{ij}]$. Tada vrijedi

$$\langle Ae_j|e_k\rangle = \langle e_j|Ae_k\rangle,\ j,k = 1,2,\dots,n.$$

Odatle izravno dobivamo $\alpha_{kj} = \overline{\alpha_{jk}}$ pa je A simetrična, odnosno hermitski simetrična matrica.

Obrnuto, neka postoji ortonormirana baza (e) takva da je matrica $[A]_{(e)} = [\alpha_{ij}]$ simetrična (hermitski simetrična). Treba dokazati da tada vrijedi $\langle Ax|y\rangle = \langle x|Ay\rangle$ za sve $x, y \in V$. Iz pretpostavke da vrijedi $\alpha_{kj} = \overline{\alpha_{jk}}$ za sve j, k slijedi da je $\langle Ae_j|e_k\rangle = \langle e_j|Ae_k\rangle$. Uvrštavanjem prikaza vektora x, y u bazi (e) u skalarne umnoške $\langle Ax|y\rangle$ i $\langle x|Ay\rangle$ te primjenom jednakosti $\langle Ae_j|e_k\rangle = \langle e_j|Ae_k\rangle$ lako dobivamo da su ti skalarni umnošci jednaki. □

Neka najvažnija svojstva simetričnih operatora odnose se na njihov spektar i mogućnost dijagonalizacije. Sljedeća tvrdnja analogna je propoziciji 2.9.10. za unitarne operatore.

Propozicija 6.9.13. *Neka je A simetrični ili hermitski operator na unitarnom prostoru V. Tada vrijedi:*

(a) Ako je $\lambda \in \sigma(A)$, λ je realni broj.

(b) Ako su $\lambda_1, \lambda_2 \in \sigma(A)$ različite svojstvene vrijednosti, a v_1, v_2 pripadni svojstveni vektori, tada su v_1 i v_2 ortogonalni vektori. Odatle slijedi da su svojstveni potprostori pridruženi različitim svojstvenim vrijednostima međusobno ortogonalni.

(c) Ako je v svojstveni vektor operatora A i x bilo koji vektor ortogonalan na v, tada je i Ax ortogonalan na v. Drugim riječima, ako je v svojstveni vektor, ortogonalni komplement potprostora $[v]$ invarijantan je pod djelovanjem A.

Dokaz. (a) Neka je $Av = \lambda v$, $v \neq 0$. Tada je $\langle Av|v\rangle = \langle v|Av\rangle$, odakle slijedi $\langle \lambda v|v\rangle = \langle v|\lambda v\rangle$ i zatim $\lambda\langle v|v\rangle = \overline{\lambda}\langle v|v\rangle$. Budući da je $v \neq 0$, imamo $\lambda = \overline{\lambda}$ pa je $\lambda \in \mathbb{R}$.

(b) Imamo $\langle Av_1|v_2\rangle = \langle v_1|Av_2\rangle$ i stoga $\langle \lambda_1 v_1|v_2\rangle = \langle v_1|\lambda_2 v_2\rangle$ te $\lambda_1\langle v_1|v_2\rangle = \overline{\lambda_2}\langle v_1|v_2\rangle = \lambda_2\langle v_1|v_2\rangle$ s obzirom na to da su $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$. Ako bi bilo $\langle v_1|v_2\rangle \neq 0$, vrijedilo bi $\lambda_1 = \lambda_2$, suprotno pretpostavci o različitosti tih svojstvenih vrijednosti.

(c) Neka je $Av = \lambda v$, $v \neq 0$ i $\langle v|x\rangle = 0$. Treba dokazati da je tada $\langle v|Ax\rangle = 0$. No $\langle v|Ax\rangle = \langle Av|x\rangle = \lambda\langle v|x\rangle = 0$.

□

Napomena. Uočimo da tvrdnja (a) u prethodnoj propoziciji ne govori, sama po sebi, da simetrični odnosno hermitski operator uvijek ima neprazan spektar (premda je to zapravo istina, ali na konačnodimenzionalnom prostoru dimenzije barem 1), nego da se spektar, ako je neprazan, sastoji samo od realnih brojeva.

Nadalje, ako primijenimo (a) na simetrične ili hermitski simetrične matrice, vidimo da su svojstvene vrijednosti takvih matrica (ako uopće imaju svojstvene vrijednosti) realni brojevi, čak i kad se u matrici (hermitski simetričnoj) pojavljuju kompleksni brojevi koji nisu realni. (Jasno, svaku simetričnu odnosno hermitski simetričnu matricu možemo shvatiti kao matrični prikaz odgovarajućeg operatora u ortonormiranoj bazi pa zatim primijenimo (a).)

Ako bismo znali da svaki simetrični odnosno hermitski operator ima neprazan spektar, na temelju (b) i (c) iz prethodne propozicije mogli bismo dokazati da se svaki takav operator može dijagonalizirati, i to u ortonormiranoj bazi, a zbog (a) dijagonalizacija se, štoviše, ostvaruje nad poljem $\mathbb{R}$.

Prije općenitih rezultata pogledajmo jedan primjer kako bismo lakše razumjeli tvrdnje koje će zatim uslijediti.

Primjer 6.32. Ispitajmo dijagonalizaciju hermitski simetrične matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}.$$

Lako izračunamo karakteristični polinom $k_A(\lambda) = \lambda^2 - 1$ pa je $\sigma(A) = \{1, -1\}$. Uobičajenim računom dobivamo svojstvene vektore $v_1 = (1, -i)$ za $\lambda_1 = 1$ i $v_2 = (1, i)$ za $\lambda_2 = -1$. Baza $\{v_1, v_2\}$ očito je ortogonalna, možemo je normirati pa dobivamo bazu $\{\frac{1}{\sqrt{2}}v_1, \frac{1}{\sqrt{2}}v_2\}$. Matrica A dijagonalizira se, dakle, u njoj sličnu matricu $\text{diag}(1, -1)$, a matrica prijelaza je unitarna matrica

$$T = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix}.$$

Vrijedi

$$T^t AT = \text{diag}(1, -1).$$

Primijetimo da matrica A ima kompleksne elemente, ali njezin karakteristični polinom ima samo realne koeficijente. Nultočke su realni brojevi (svojstvene vrijednosti), ali vektori ortonormirane baze u kojoj se A dijagonalizira pripadaju prostoru $\mathbb{C}^2$, a ne $\mathbb{R}^2$. ♡

Zadatak 6.23. *U zadatku 6.16 navedeno je da se svaka (realna) simetrična matrica reda 2 može dijagonalizirati. Dokažite da to svojstvo imaju i sve hermitski simetrične matrice reda 2, i to također nad poljem $\mathbb{R}$.*
Uputa: Uočite da hermitski simetrične matrice imaju na dijagonali samo realne brojeve zbog definicijskog uvjeta $A = A^*$. Pokažite da su svi koeficijenti karakterističnog polinoma realni i da mu je diskriminanta uvijek strogo pozitivna, osim za skalarne matrice.

Propozicija 6.9.14. *Spektar simetričnog odnosno hermitskog operatora na konačnodimenzionalnom unitarnom prostoru je neprazan skup.*
(Ovdje izuzimamo trivijalni slučaj nulprostora.)

Dokaz. Tvrdnja je očita za hermitski operator A na kompleksnom prostoru dimenzije $n \geq 1$ jer je njegov karakteristični polinom stupnja n te prema Osnovnom teoremu algebre ima barem jednu kompleksnu nultočku. Takva nultočka λ je svojstvena vrijednost pa postoji i svojstveni vektor, a prema propoziciji 6.9.13 (a) je λ realni broj. (Vidi primjer 6.32.)

Uzmimo, dakle, da je A simetrični operator na realnom prostoru dimenzije n. Prikažimo ga u nekoj ortonormiranoj bazi (e) matricom $[A]_{(e)}$ koja je, dakako, simetrična i svi njezini elementi su realni brojevi. Karakteristični polinom operatora A ujedno je karakteristični polinom matrice $[A]_{(e)}$. Želimo dokazati da su njegove nultočke realni brojevi. U tu svrhu, možda neočekivano, "prelazimo u područje kompleksnih brojeva".

Naime, matricu $[A]_{(e)}$ možemo promatrati kao matricu linearnog operatora na kompleksnom unitarnom prostoru $\mathbb{C}^n$, u kanonskoj (standardnoj) bazi. To, naravno, nije operator A na čiji se spektar odnosi tvrdnja, ali svakako je to neki hermitski operator na prostoru $\mathbb{C}^n$ i njegov spektar čine nultočke karakterističnog polinoma matrice $[A]_{(e)}$. Prema prijašnjem zaključku te su nultočke realni brojevi. No simetrični operator A na realnom prostoru V ima isti taj karakteristični polinom, s istim nultočkama pa su te nultočke ujedno svojstvene vrijednosti operatora A. Propozicija je time dokazana. □

Sad je sve pripremljeno za dokaz jednog od ključnih rezultata o linearnim operatorima na unitarnom prostoru.

Teorem 6.9.15. *Svaki simetrični odnosno svaki hermitski operator na konačnodimenzionalnom unitarnom prostoru može se dijagonalizirati, i to u ortonormiranoj bazi. Dijagonalni oblik simetričnog odnosno hermitskog operatora je realna dijagonalna matrica.*

Dokaz. Ako se simetrični odnosno hermitski operator može dijagonalizirati, taj dijagonalni oblik je realna matrica prema propoziciji 6.9.13 (a). Treba, dakle, dokazati dijagonalizabilnost takvih operatora, a možemo razmatrati samo simetrični operator A jer je za hermitski sve potpuno analogno.

Uzmimo da je $\dim V = n > 1$ (jer je za $n = 1$ tvrdnja trivijalna). Prema propoziciji 6.9.14 operator A ima neku realnu svojstvenu vrijednost λ . Neka je v pripadni svojstveni vektor. Ortogonalni komplement $[v]^{\perp}$ sada je $(n-1)$-dimenzionalni potprostor, a prema tvrdnji (c) propozicije 6.9.13 taj je potprostor invarijantan za operator A. Prostor V jednak je ortogonalnoj sumi invarijantnih potprostora, $V = [v] \oplus [v]^{\perp}$, a restrikcija operatora A na potprostor $[v]^{\perp}$ očito je simetrični operator na tom potprostoru. Ako je $n > 2$, odnosno $\dim[v]^{\perp} = n - 1 > 1$, ponavljamo isto razmatranje za taj potprostor, rastavljamo ga u ortogonalnu sumu invarijantnih za operator A potprostora dimenzija 1 i $n - 2$ itd. Postupak na kraju dovodi do rastava prostora V u ortogonalnu sumu jednodimenzionalnih svojstvenih potprostora operatora A. $\square$

Važno je i za primjene korisno iskazati i odgovarajuće tvrdnje za matrice:

Korolar 6.9.16. *(1) Svaka realna simetrična matrica ortogonalno je slična realnoj dijagonalnoj matrici.*

(2) Svaka kompleksna hermitski simetrična matrica unitarno je slična realnoj dijagonalnoj matrici.

Tvrdnje slijede iz teorema 2.9.15. tako da se matrice shvate kao matrični prikazi simetričnog odnosno hermitskog operatora. Istaknimo još jedanput što te tvrdnje znače:

(1) Ako je $A \in M_n(\mathbb{R})$ simetrična matrica, postoje dijagonalna matrica $D \in M_n(\mathbb{R})$ i ortogonalna matrica $T \in M_n(\mathbb{R})$ takve da vrijedi $T^t AT = D$.

(2) Ako je $A \in M_n(\mathbb{C})$ hermitski simetrična matrica, postoje dijagonalna matrica $D \in M_n(\mathbb{R})$ i unitarna matrica $T \in M_n(\mathbb{C})$ takve da vrijedi $T^* AT = D$.

U sljedećem zadatku iskazat ćemo svojstvo hermitskog operatora koje se moglo opaziti za jednu određenu hermitski simetričnu matricu reda 2 u primjeru 6.32, a općenito za takve matrice reda 2 pokazuje se u sklopu rješavanja zadatka 6.23.

Zadatak 6.24. *Dokažite da je karakteristični polinom hermitskog operatora na konačnodimenzionalnom kompleksnom prostoru realni polinom, to jest da su mu svi koeficijenti realni brojevi.*

Primjer 6.33. *Primjena dijagonalizacije simetrične matrice na krivulje 2. reda.*

U kolegiju Analitička geometrija (odjeljak 3.9. Krivulje drugog reda u $\mathbb{R}^2$ iz skripte predmeta) provedena je potpuna klasifikacija skupova točaka u ravnini zadanih jednadžbom oblika

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0,$$

pri čemu su $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$ takvi da je barem jedan od koeficijenata a, b i c različit od 0. Pogodnim rotacijama i translacijama koordinatnog sustava opća jednadžba svodila se na neki od prepoznatljivih oblika. Izvedene su i invarijante krivulja 2. reda, spomenute su svojstvene vrijednosti te je najavljeno da će se više o tome učiti u Linearnoj algebri.

Pokažimo na primjeru jednog zadatka iz skripti iz Analitičke geometrije kako bismo ovdje pristupili rješavanju. Treba odrediti tip i kanonsku jednadžbu krivulje zadane jednadžbom

$$6xy + 8y^2 - 12x - 26y + 11 = 0.$$

Za opću jednadžbu definiramo simetričnu matricu

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}.$$

Trinom $ax^2 + 2bxy + cy^2$ može se sada napisati kao

$$\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix},$$

odnosno kao skalarni produkt $\langle Av|v\rangle$ za $v = (x, y) \in \mathbb{R}^2$. Budući da se A zbog simetričnosti može dijagonalizirati u ortonormiranoj bazi $\{v_1, v_2\}$ svojstvenih vektora pridruženih svojstvenim vrijednostima λ_1 i λ_2, za vektor $v = \alpha v_1 + \beta v_2$ imamo

$$\langle Av|v\rangle = \lambda_1\langle \alpha v_1|\alpha v_1\rangle + \lambda_2\langle \beta v_2|\beta v_2\rangle = \lambda_1(\alpha)^2 + \lambda_2(\beta)^2.$$

Dakle, $\langle Av|v\rangle$ je linearna kombinacija kvadrata koordinata vektora v u ortonormiranoj bazi svojstvenih vektora, što smo istaknuli postavljanjem zagrada.

Matrica A može se napisati u obliku $A = TDT^t$, gdje je $D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2)$, a T ortogonalna matrica. Dalje računamo u terminima pravokutnih koordinatnih sustava u ravnini $\mathbb{R}^2$. Uzmemo li nove koordinate

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = T^t \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

(riječ je zapravo o rotaciji pravokutnog koordinatnog sustava i koordinatama (x', y') u tako dobivenom novom sustavu), možemo napisati:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} TDT^t \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \left(T^t \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right)^t D \left(T^t \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) \\ &= \begin{bmatrix} x' & y' \end{bmatrix} D \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \lambda_1(x_1')^2 + \lambda_2(x_2')^2. \end{aligned} \tag{6.9}$$

U našem primjeru izračunamo da za

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 8 \end{bmatrix}$$

vrijedi $\sigma(A) = \{-1, 9\}$, a svojstveni potprostori su $[(1,3)]$ za svojstvenu vrijednost $\lambda_1 = 9$ i $[(-3,1)]$ za svojstvenu vrijednost $\lambda_2 = -1$. Stoga su

$$D = \begin{bmatrix} 9 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \ T = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Dalje imamo

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = T^t \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix},$$

a binom $6xy + 8y^2$ transformira se u binom $9(x')^2 - (y')^2$ (što je u skladu s relacijom (6.9)).

Preostaje transformirati linearni trinom $-12x - 26y + 11$. Uvrštavanjem $x = \frac{1}{\sqrt{10}}(x' - 3y')$ i $y = \frac{1}{\sqrt{10}}(3x' + y')$ dobivamo

$$-12x - 26y + 11 = \sqrt{10}(-9x' + y') + 11.$$

Konačno imamo

$$\begin{aligned} 6xy + 8y^2 - 12x - 26y + 11 &= 9(x')^2 - (y')^2 - \sqrt{10}(9x' - y') + 11 \\ &= 9\left(x' - \frac{\sqrt{10}}{2}\right)^2 - \left(y' - \frac{\sqrt{10}}{2}\right)^2 - 9 = 0, \end{aligned}$$

odnosno

$$\frac{(x' - \sqrt{10}/2)^2}{1} - \frac{(y' - \sqrt{10}/2)^2}{9} = 1.$$

Posljednji izraz dobiven je „dopunjavanjem do kvadrata", odnosno translacijom koordinatnog sustava. U Analitičkoj geometriji bilo je to izraženo prelaskom na nove koordinate $x'' = x' - v$, $y'' = y' - w$, odnosno konkretno

$$x'' = x' - \frac{\sqrt{10}}{2} = \frac{1}{\sqrt{10}}(x + 3y - 5), \ y'' = y' - \frac{\sqrt{10}}{2} = \frac{1}{\sqrt{10}}(-3x + y - 5),$$

čime smo dobili jednadžbu

$$(x'')^2 - \frac{(y'')^2}{9} = 1.$$

Zaključujemo da je zadana krivulja je hiperbola. Njezin centar je u točki $(x'', y'') = (0, 0)$ koja u (x, y)-koordinatama glasi $(-1, 2)$.

♡

Primjer 6.34. *Primjena dijagonalizacije na rješavanje rekurzivnih jednadžbi.*

Ovdje ćemo kao primjer razmotriti samo slučaj linearne rekurzivne jednadžbe oblika

$$x_n = ax_{n-1} + bx_{n-2},$$

uz zadane vrijednosti početnih članova x_0 i x_1. Dakle, niz (x_n) zadan je tako da je opći član izražen kao linearna kombinacija prethodnih dvaju članova sa stalnim koeficijentima a i b. Želimo eksplicitno izraziti x_n kao funkciju od n.

Definiramo niz vektor-stupaca

$$X_n = \begin{bmatrix} x_n \\ x_{n-1} \end{bmatrix},$$

za $n \geq 1$ te izrazimo X_n pomoću X_{n-1}:

$$X_n = \begin{bmatrix} a & b \\ 1 & 0 \end{bmatrix} X_{n-1}.$$

Neka je $A = \begin{bmatrix} a & b \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. Pomoću te matrice jednostavno dobivamo

$$X_n = AX_{n-1} = A^2 X_{n-2} = \ldots = A^{n-1} X_1.$$

Kako je X_1 zadan, očito preostaje samo izračunati matricu A^{n-1}, a to će biti lako izvedivo npr. u slučaju kad se A može dijagonalizirati jer tada primijenimo način izračunavanja kakav je naveden u zadatku 6.16. Naime, ako se A dijagonalizira u matricu D i $D = T^{-1}AT$, onda je $A = TDT^{-1}$ pa je

$$A^n = TD^nT^{-1}$$

i time je u načelu problem riješen. Ako je uz to matrica prijelaza T ortogonalna, račun je još lakši zbog $T^{-1} = T^t$.

Ilustrirat ćemo taj postupak na vjerojatno najpoznatijem nizu koji se zadaje rekurzivno pomoću dvaju prethodnih članova, *Fibonaccijevu nizu*, zadanom relacijom

$$x_n = x_{n-1} + x_{n-2}, \ n \geq 2$$

Za početne članove uzmimo $x_0 = 0$, $x_1 = 1$. Tako dobivamo poznati niz $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \ldots$. Tada je $a = b = 1$, matrica A je simetrična, ortogonalno je slična matrici $D = \mathrm{diag}(\alpha, \beta)$, pri čemu su α i β svojstvene vrijednosti, dakle nultočke polinoma

$$k_A(\lambda) = \lambda^2 - \lambda - 1.$$

Rješenja su

$$\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \ \beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2},$$

a korisno je uočiti relacije

$$\alpha\beta = -1, \ \alpha + \beta = 1, \ \alpha - \beta = \sqrt{5}.$$

Lako nalazimo svojstvene potprostore, to su $[(\alpha,1)]$ i $[(\beta,1)]$. Napisani vektori su ortogonalni, ali ne i normirani. Sad nije nužno uzimati ortonormiranu bazu pa neka je

$$T=\begin{bmatrix}\alpha & \beta\\ 1 & 1\end{bmatrix}.$$

Kako je $\det T=\alpha-\beta$, imamo

$$T^{-1}=\frac{1}{\alpha-\beta}\begin{bmatrix}1 & -\beta\\ -1 & \alpha\end{bmatrix}$$

te

$$A^{n-1}=TD^{n-1}T^{-1}=T\operatorname{diag}(\alpha^{n-1},\beta^{n-1})T^{-1}=\frac{1}{\alpha-\beta}\begin{bmatrix}\alpha^n-\beta^n & \alpha^{n-1}-\beta^{n-1}\\ \alpha^{n-1}-\beta^{n-1} & \alpha^{n-2}-\beta^{n-2}\end{bmatrix}.$$

Odavde uvrštavanjem u

$$X_n=A^{n-1}X_1=A^{n-1}\begin{bmatrix}x_1\\ x_0\end{bmatrix}=A^{n-1}\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}$$

dobivamo

$$x_n=\frac{\alpha^n-\beta^n}{\alpha-\beta}.$$

Iako se u formuli pojavljuje iracionalni broj $\sqrt{5}$, vrijednosti članova niza su prirodni brojevi, kao što očito i moraju biti (jer su definirani cjelobrojnom linearnom rekurzijom i cjelobrojnim početnim uvjetima). Članovi Fibonaccijeva niza uglavnom se označavaju s F_n. Npr. za $n=3$ imamo

$$F_3=\frac{\alpha^3-\beta^3}{\alpha-\beta}=\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-\alpha\beta=1+1=2.$$

$\heartsuit$

BIBLIOGRAFIJA

[1] D. Bakić, *Linearna algebra*, Školska knjiga, Zagreb 2008.

[2] K. Horvatić, *Linearna algebra I, II*, PMF–Matematički odjel, Zagreb 1995.

INDEKS POJMOVA

INDEKS OZNAKA

$\mathbb{N}$	skup prirodnih brojeva
$\mathbb{Z}$	skup (prsten) cijelih brojeva
$\mathbb{Q}$	skup (polje) racionalnih brojeva
$\mathbb{R}$	skup (polje) realnih brojeva
$\mathbb{C}$	skup (polje) kompleksnih brojeva
$\mathbb{Z}_m$	prsten cijelih brojeva modulo m
$\mathcal{P}$	skup (prsten, vektorski prostor) polinoma (s koeficijentima iz $\mathbb{R}$)
$\mathcal{P}_n$	skup (prsten, vektorski prostor) polinoma stupnja manjeg ili jednakog n s nulpolinom (s koeficijentima iz $\mathbb{R}$)
$\mathbb{Q}(\sqrt{d})$	kvadratno proširenje polja $\mathbb{Q}$ (kvadratno polje)
0_V	nulvektor iz vektorskog prostora V
V^1, V^2, V^3	skupovi (vektorski prostori) klasa orijentiranih dužina na pravcu, u ravnini i u prostoru
$V^i(O)$	$i = 1, 2, 3$, skupovi (vektorski prostori) radijvektora s početnom točkom O na pravcu, u ravnini i u prostoru
$\mathbb{R}^n$	skup (vektorski prostor) svih uređenih n-torki realnih brojeva
$\mathbb{C}^n$	skup (vektorski prostor) svih uređenih n-torki kompleksnih brojeva
$\mathbb{C}_\mathbb{R}$	skup kompleksnih brojeva shvaćen kao realni vektorski prostor
$\mathbb{R}^\mathbb{N}$	skup (vektorski prostor) realnih nizova
$\mathbb{R}^\mathbb{R}$	skup (vektorski prostor) svih realnih funkcija realne varijable
$[S]$	linearna ljuska skupa S
$\dim V$	dimenzija vektorskog prostora V
$L \leq V$	L je potprostor od V
$L < V$	L je pravi potprostor od V
$L \cap M$	presjek potprostora L i M
$L + M$	suma potprostora L i M
$L \dot{+} M$	direktna suma potprostora L i M
$M_{mn}(\mathbb{F})$	skup (vektorski prostor) svih matrica tipa (m, n) s elementima iz polja $\mathbb{F}$
$A = [a_{ij}]$	matrica zadana općim elementom a_{ij}
A^t	transponirana matrica matrice A
A^{-1}	inverz matrice A
$A \sim B$	matrica A je ekvivalentna matrici B
$M_n(\mathbb{F})$	skup (algebra) svih kvadratnih matrica (reda n) s elementima iz polja $\mathbb{F}$

I_n	jedinična matrica reda n
$\operatorname{diag}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$	dijagonalna matrica reda n s elementima $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ na dijagonali
$r(A)$	rang matrice A
D_r	kanonska matrica određenog tipa ranga r
$\det A$	determinanta matrice A
$\operatorname{sign} p$	predznak permutacije p
$I(p)$	broj inverzija permutacije p
Δ_{ij}	minora (određena elementom matrice na poziciji (i, j))
A_{ij}	algebarski komplement (kofaktor)
$\widetilde{A}$	adjunkta matrice A
$\langle a \vert b \rangle$	skalarni umnožak (produkt) vektora a i b
0_V	nulvektor
$G(x_1, x_2, \ldots, x_k)$	Gramova matrica skupa vektora $\{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$
$\Gamma(x_1, x_2, \ldots, x_k)$	Gramova determinanta skupa vektora $\{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$
$S^\perp$	skup svih vektora ortogonalnih na skup S
$L^\perp$	ortogonalni komplement potprostora L
$M \dotplus L$	direktna suma potprostora M i L
$M \oplus L$	ortogonalna suma potprostora M i L
$a \perp b$	međusobna ortogonalnost vektora a i b
$S \perp T$	međusobna ortogonalnost skupova S i T
$\Vert a \Vert$	norma vektora a
$\Vert a \Vert_\infty$	maks-norma vektora a
$\Vert a \Vert_1$	1-norma vektora a
$\Vert a \Vert_2$	2-norma (euklidska norma) vektora a
$\Vert a \Vert_p$	p-norma vektora a
$\angle(a, b)$	kut između vektora a i b
$d(a, b)$	udaljenost vektora a i b
$d(A, S)$	udaljenost točke A od skupa S
$d(a, L)$	udaljenost vektora a od potrostora L
δ_{ij}	Kroneckerov simbol
$\mathcal{L}(V, W)$	skup svih linearnih operatora s V u W
$\mathcal{L}(V)$	skup svih linearnih operatora s V u V
$[A]_{(f,e)}$	matrica linearnog operatora A u paru baza (e) i (f)
$[x]_{(e)}$	stupčana matrica vektora x u bazi (e)
$S(A)$, $\operatorname{Im} A$	slika linearnog operatora A
$J(A)$, $\operatorname{Ker} A$	jezgra linearnog operatora A
$r(A)$	rang linearnog operatora A
$d(A)$	defekt linearnog operatora A
$\simeq$	relacija biti izomorfan
V^*	dualni prostor prostora V
$\sigma(A)$	spektar linearnog operatora (matrice) A
k_A	karakteristični polinom linearnog operatora (matrice) A
$\det A$	determinanta operatora (matrice) A
$\operatorname{tr} A$	trag operatora (matrice) A
A^t	transponirana matrica matrice A
A^*	hermitski adjungirana matrica matrice A