Numerička Analiza 1

Zadaća br. 2; Zadana 17.1.2016. Rok: Dan prije kolokvija.

1 Uvod

Cilj ove zadaće je dobiti prva praktična iskustva u računanju svojstvenih vrijednosti i vektora, posebno usvojiti tehniku primjene niza transformacija sličnosti koji u limesu daje tražene vrijednosti. Porebno je napisati programe u Matlabu i praktičnim računanjem dobiti osjećaj kako se ponašaju algoritmi koje analiziramo teorijski.

Programe iz ove zadaće predajete tako da ih do kraja dana prije kolokvija pošaljete elektroničkom poštom na adresu

```
To:    drmac@math.hr
Subject:NA1-2016-Z2-Ime-Prezime
```

2 Učenje

Ovdje naveden materijal je dio gradiva koji je uključen u drugi kolokvij.

1. **Ovo je bilo u prvom dijelu, sada valja ponoviti jer se bavimo problemom svojstvenih vrijednosti:** Lociranje matričnog spektra, posebno (Geršgorinovi krugovi). Pročitati i shvatiti teorem o neprekidnosti svojstvenih vrijednosti Nije nužno (ali se preporuča onima koji žele znati više) obraditi dio koji govori o broju svojstvenih vrijednosti u pojedinoj komponenti povezanosti Geršgorinovih krugova.

2. Schurova forma – to je jedan od osnovnih elemenata spektralne teorije matrica. Svi dokazi su lagani za shvatiti i to se može bez problema svladati.

3. Hessenbergova i tridijagonalna redukcija – to su transformacije koje su prvi korak u važnim metodama za računanje svojstvenih vrijednosti. Posebno svladati algoritam za računanje Hessenbergove forme i teorem koji govori o esencijalnoj jedinstvenosti Hessenbergove forme.

4. Rayleighev kvocijent, Bauer–Fikeov teorem.

5. Numeričke metode za računanje svojstvenih vrijednosti. Sve opisane metode se lako shvate i implementiraju u Matlabu. Možete bez poteškoća svladati i teoriju, osim dokaza konvergencije QR metode koji zahtijeva malo veći napor. Posebno detaljno proučiti tehniku *bulge chasing*.

6. Poglavlje: Problem svojstvenih vrijednosti za simetrične matrice. Cijelo poglavlje se može čitati bez problema.

3 Zadaci

1. Napišite Matlab funkciju `[H,U] = TridiagForm(A)` koja za zadanu realnu simetričnu $n \times n$ matricu A računa ortogonalnu matricu U i simetričnu tridijagonalnu matricu H, pri čemu je $H = U^T AU$.

2. Implementirajte metodu inverznih iteracija u kojoj za pomak (shiftove) uzmite Rayleighev kvocijent sa vektorom iz prethodne iteracije. Napišite Matlab program i eksperimentirajte. Opišite zapažanja.

3. Napišite Matlab funkciju `[H,U] = HessenbergForm(A)` koja za zadanu realnu $n \times n$ matricu A računa ortogonalnu matricu U i Hessenbergovu matricu H, pri čemu je $H = U^T AU$.

   Zatim implementirajte bulge chasing (tj. QR algoritam) na matrici H. Rezultate usporedite sa onima iz funkcije `eig()`.

4. Opisati i implementirati metodu iteracija potprostora.

5. Napišite Matlab funkciju `[S,U]=EigJacobi(A)` koja za realnu simetričnu $n \times n$ matricu A računa svojstvene vrijednosti $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, numerirane tako da je $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_n$, i pripadne svojstvene vektore $u_1, \ldots, u_n$. Svojstvene vrijednosti trebaju biti spremljene u vektoru `S` (`S`(i)=λ_i) a pripadni svojstveni vektori u matrici U (u_i je i–ti stupac matrice U).

   Koristite Jacobijevu metodu u kojoj se pivotne elemente bira ciklički po retcima (vidi skripte). Iteracije treba zaustaviti kada je $\Omega(A^{(k)}) \leq \varepsilon \|A\|_F$, gdje je $\varepsilon = n \times 1.0E - 16$, ili kada su svi izvandijagonalni elementi po modulu manji od zadanog praga tolerancije (vidi skriptu). Koristite simetriju matrica $A^{(k)}$ tako da kod primjene sličnosti Jacobijevom rotacijom računate samo elemente u gronjem trokutu i na dijagonali. Na primjerima se uvjerite da u protivnom (dakle transformirati bez korištenja simetrije) izračunate matrice $A^{(k)}$ mogu izgubiti simetriju. Objasnite zašto.

Točnost svojstvenih vrijednosti i vektora kontrolirajte usporedbom s rezultatima funkcije `eig()`.

6. Neka su $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ svojstvene vrijednosti matrice A. Neka je u_1 svojstveni vektor od A (uz svojstvenu vrijednost λ_1) i neka je v proizvoljan vektor za kojeg je $v^* u_1 = 1$. Sa proizvoljnim skalarom σ definiramo matricu $\tilde{A} = A - \sigma u_1 v^*$. Dokažite da su svojstvene vrijednosti od $\tilde{A}$, redom, $\lambda_1 - \sigma, \lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_n$. Da li tu činjenicu možemo iskoristiti u metodi potencija za računanje i drugih svojstvenih vrijednosti osim dominantne?

7. Detaljno opišite rješavanje problema najmanjih kvadrata

$$\|Ax - b\|_2 \longrightarrow \min, \quad A \in \mathbb{R}^{m \times n}$$

i to

- Pomoću QR faktorizacije sa pivotiranjem stupaca (funkcija `qr()` u Matlabu).
- Pomoću SVD dekompozicije, za bilo koji odnos m i n ($m \geq n$, $m < n$), i za proizvoljan rang od A.
- Analitički u slučaju $\text{rang}(A) = n$: minimizirajte funkciju $f(x) = \|Ax - b\|_2^2$ i izvedite normalne jednadžbe $A^T A x = A^T b$.
- Napišite Matlab funkciju `x=LSSVD(A,b)` koja rješava problem najmanjih kvadrata koristeći SVD. Za računanje SVD–a koristite Matlabovu funkciju `svd()`.

8. Detaljno opišite metodu za rješavanje Prokrastovog problema

$$\min_{Q^T Q = I_n} \|A - BQ\|_F. \; (A, B \in \mathbb{R}^{m \times n}.)$$

Napišite Matlab funkciju `Q=PROKR(A,B)` koja rješava Prokrastov problem.