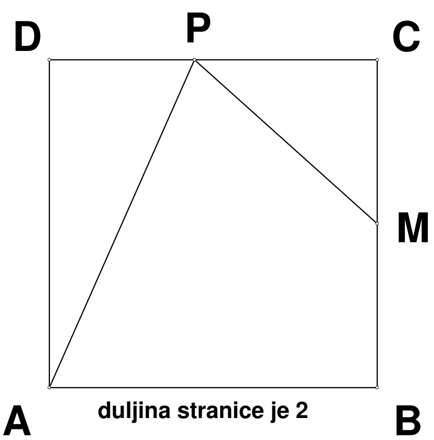
RJEŠAVANJE ZADATAKA RAČUNALOM

ZVONKO ČERIN I SILVIJA VLAH

Sažetak. Pokazuje se kako pomoću programskih paketa MAPLE V, MATHEMATICA, i GEOMETER'S SKETCHPAD riješiti dva Matkina zadatka koristeći računalo.

Cilj ovog članka je objasniti kako se uz pomoć računala mogu riješiti slijedeća dva geometrijska zadatka na stranici 49 Matke iz rujna 2001.

Problem 1. Dan je kvadrat $ABCD$ sa stranicom duljine 2. Točka M je polovište stranice BC, a P je neka točka stranice CD. Odredi najmanju vrijednost za $|AP| + |PM|$.

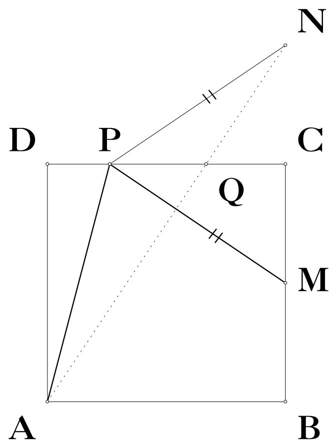


Slika 1. U Problemu 1 se traži najmanja vrijednost zbroja duljina segmenata AP i PM.

Ovaj zadatak ćemo najlakše riješiti tako da promotrimo točku N koja je refleksija točke M s obzirom na pravac CD. Onda je očigledno $|PM| = |PN|$ pa je (vidi Sliku 2)

$$|AP| + |PM| = |AP| + |PN|.$$

Ali u trokutu ANP zbroj $|AP| + |PN|$ duljina stranica AP i PN je sigurno uvijek veći ili najmanje jednak duljini treće stranice AN. Dakle, taj zbroj je najmanji upravo onda kada se točka P poklopi sa presjekom Q pravaca AN i CD. Jer je $|NC| = 1$, $|NB| = 3$, i $|AB| = 2$ iz sličnih trokuta NCQ i NBA slijedi da je omjer odgovarajućih njihovih stranica



Slika 2. Zbroj $|AP| + |PN|$ je najmanji kada se točka P poklopi sa točkom Q.

jednak pa je

$$\frac{|CQ|}{|NC|} = \frac{|BA|}{|NB|}$$

ili

$$|CQ| = \frac{2}{3}.$$

Zaključujemo da će najmanja vrijednost zbroja $|AP| + |PM|$ biti jednaka duljini $|AN|$. Jer je ABN pravokutni trokut sa katetama $|AB| = 2$ i $|BN| = |BC| + |CN| = 2 + 1 = 3$ vidimo da je prema Pitagorinom poučku $|AN| = \sqrt{|AB|^2 + |BN|^2} = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{4 + 9} = \sqrt{13}$.

Premda je ovo rješenje jednostavno, prosječni učenik osnovne škole rijetko će doći na ideju da gleda točku N. Da ipak i takav učenik riješi zadatak može si danas pomoći sa računalom.

Sigurno će najveću pomoć imati ako upotrijebi znalački jedan od dva najpoznatija složena paketa za simboličko računanje: MAPLE V ili MATHEMATICA.

MAPLE V danas već ima verziju 7 i može se nabaviti posjetom na Internet adresu **www.maplesoft.com** gdje se može dobiti jednomjesečna ogledna verzija. Učenici mogu naručiti takozvanu studentsku verziju za oko 100 američkih dolara.

Da bi smo koristili MAPLE moramo naš problem prikazati kao problem određivanja minimalne vrijednosti slijedeće funkcije koja opisuje $|AP| + |PM|$ u ovisnosti od $x = |PC|$. Jer je $|PD| = 2 - x$ iz pravokutnih trokuta ADP i CMP slijedi

$$|AP| = \sqrt{|AD|^2 + |DP|^2} = \sqrt{2^2 + (2 - x)^2} = \sqrt{x^2 - 4\,x + 8}$$

i

$$|PM| = \sqrt{|CP|^2 + |CM|^2} = \sqrt{x^2 + 1}.$$

Kada se pokrene MAPLE i kao unos (eng. input) se utipka

su := sqrt(x^2 - 4*x + 8) + sqrt(x^2 + 1);

i pritisne ENTER definirali smo traženu funkciju. Ako još utipkamo

minimize(su, x);

onda smo zatražili od programa MAPLE da nam izračuna najmanju vrijednost funckije **su** i on će nam hitro ispisati da je ta vrijednost $\sqrt{13}$. Ako nas zanima za koji x se postiže ta najmanja vrijednost moramo utipkati

solve(su = sqrt(13), x);

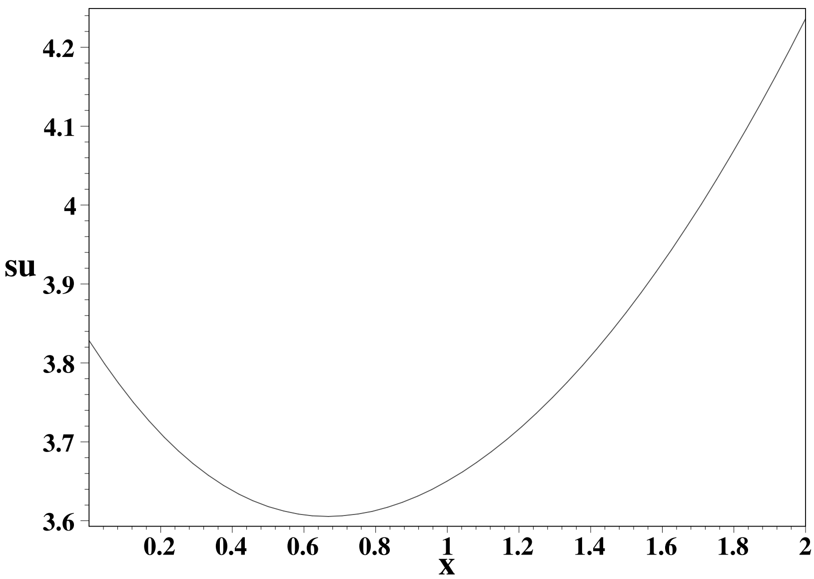
i dobit ćemo $x = \frac{2}{3}$.

Premda smo dobili rješenje brzo i jednostavno, malo je vjerojatno da će ga profesor ili profesorica prihvatiti jer on ili ona obično traže da se napiše postupak kojim smo do rješenja došli.

Drugi način kako pomoću programa MAPLE otkriti traženu minimalnu vrijednost je da nacrtamo graf funkcije **su(x)**. Naredba za crtanje grafa je:

plot(su, x=0..2);

gdje smo zatražili iscrtavanje grafa funkcije **su** u odnosu na varijablu **x** koju promatramo od nule (0) do dva (2). Na ekranu monitora će se pojaviti slijedeća Slika 3:

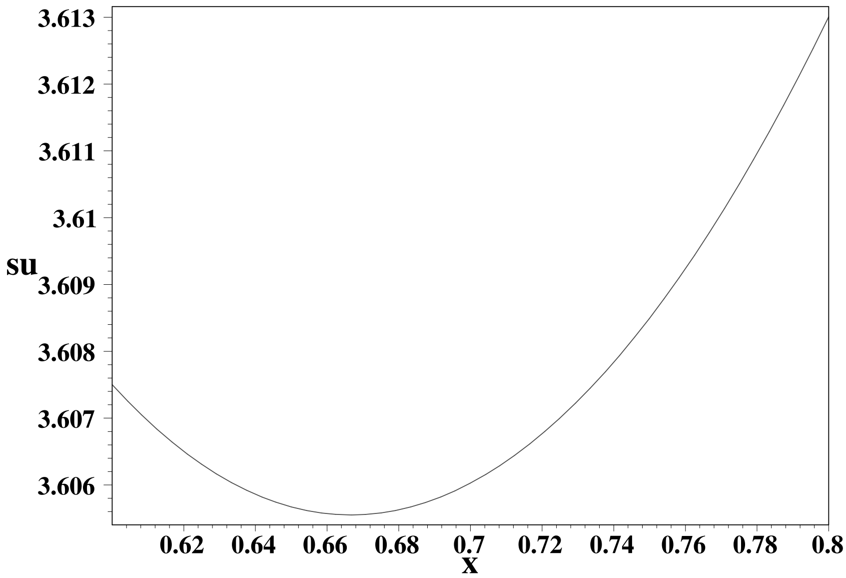


SLIKA 3. Graf funkcije **su** na intervalu [0, 2]. Najmanja vrijednost je za neki **x** između 0.6 i 0.8.

Ponovimo sada taj postupak ali ovaj puta se ograničimo na segment [0.6, 0.8] gdje se negdje nalazi tražena vrijednost **x** takva da je **su(x)** najmanje. Dakle, ako utipkamo

plot(su,x=0.6..0.8);

na ekranu dobijemo ovu Sliku 4:

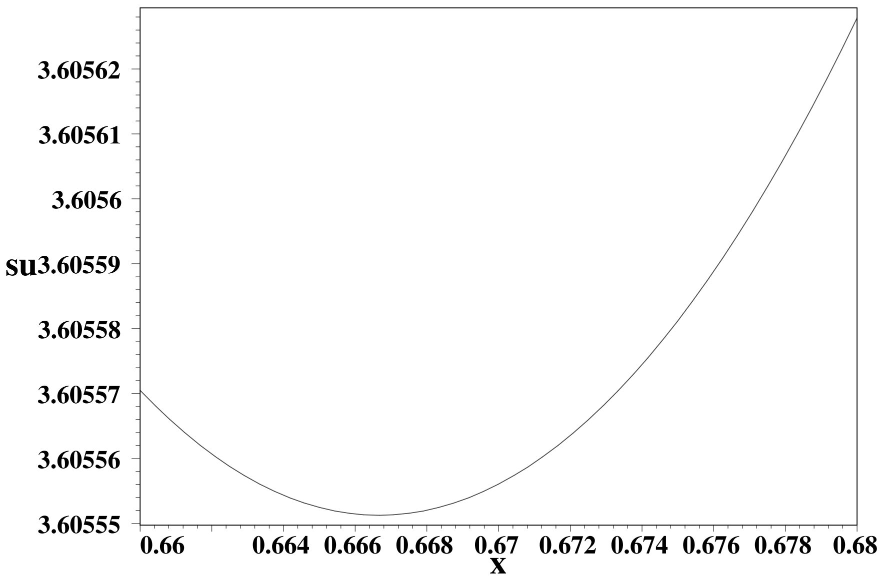


Slika 4. Graf funkcije **su** na intervalu [0.6, 0.8]. Najmanja vrijednost je za neki **x** između 0.66 i 0.68.

Naravno, to sada ponovimo još dva puta sužavajući sve više i više interval na kojem promatramo funkciju **su**. Dakle, ako utipkamo

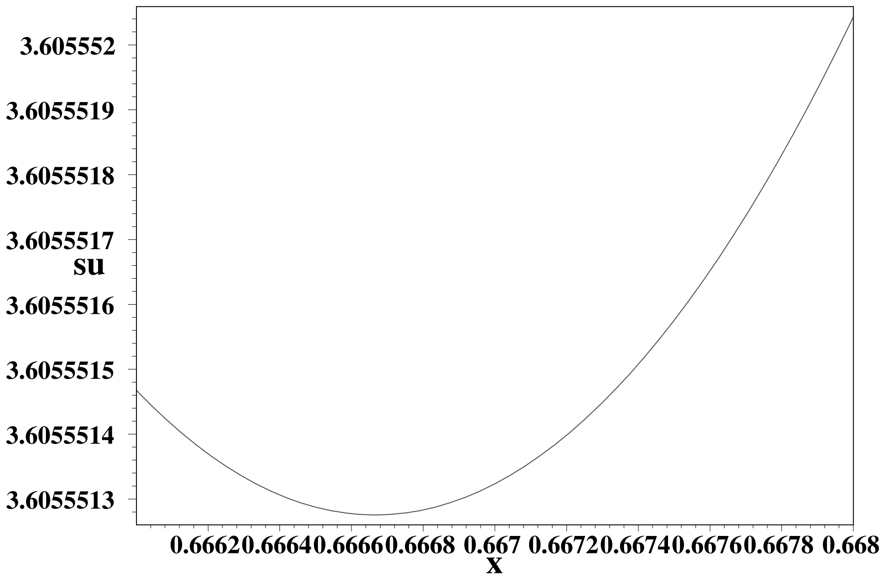
plot(su,x=0.66..0.68); plot(su,x=0.666..0.668);

na ekranu ćemo dobiti još dvije slike (Sliku 5 i Sliku 6):



Slika 5. Graf funkcije **su** na intervalu [0.66, 0.68]. Najmanja vrijednost je za neki **x** između 0.666 i 0.668.

Iz posljednje slike zaključujemo da je najmanja vrijednost funkcije **su** na promatranom intervalu [0, 2] jednaka oko 3.60555 (što je vrlo



Slika 6. Graf funkcije **su** na intervalu [0.666, 0.668]. Najmanja vrijednost je za neki **x** između 0.6666 i 0.6668.

blizu vrijednosti $\sqrt{13} = 3.605551275$) i da se ta najmanja vrijednost postiže upravo onda kada je $x = |PC|$ jednak 0.6667 (što je također izuzetno blizu vrijednosti $\frac{2}{3} = 0.6666666667$).

Sve to možemo također načiniti i u paketu MATHEMATICA samo što se moraju koristiti drugačiji zapisi nekih naredbi (tj. gramatike u MAPLE V i u MATHEMATICI se ponešto razlikuju).

Najbolje mjesto na Internetu za informacije i narudžbe programa MATHEMATICA je adresa **www.wolfram.com** gdje se može naručiti studentska verzija za 75 britanskih funti.

Dobra vijest za učenike naših škola je da je Ministarstvo znanosti i tehnologije RH krajem 1994. godine opremilo s MATHEMATICOM hrvatska sveučilišta, a 1996. godine većinu istraživačkih instituta (uključujući i Institut "Ruđer Bošković"), te osnovalo zajedno s hrvatskom akademskom i istraživačkom mrežom CARNet i Matematičkim odjelom Prirodoslovno matematičkog fakulteta: Referalni centar za programski sustav MATHEMATICA (MRC). Na taj način osigurana je posebna podrška korisnicima MATHEMATICE na hrvatskim sveučilištima i institutima na adresi: mathelp@math.hr.

Kao i za MAPLE moramo prvo definirati funkciju **su** što postižemo unosom slijedećeg:

su := Sqrt[x^2 - 4 x + 8] + Sqrt[x^2 + 1]

Minimalnu (najmanju) vrijednost tražimo naredbom:

FindMinimum[su, {x, 2}]

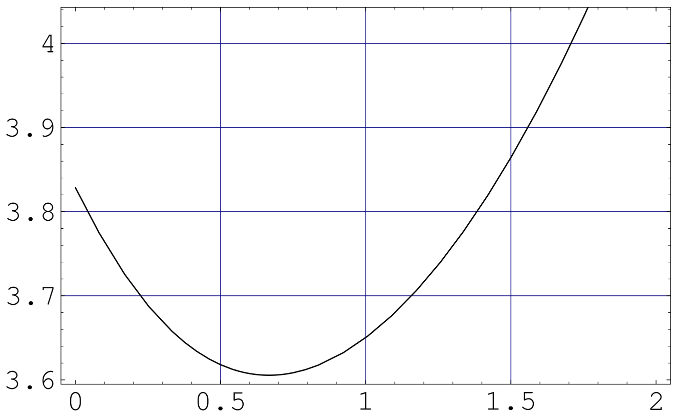
Kao rezultat dobijemo

{3.60555, {x -> 0.666667}}

što znači da je najmanja vrijednost 3.60555 i ona se postiže kada je **x** jednak 0.666667. Primjetimo da MATHEMATICA minimalnu vrijednost traži samo približno, a ne točno kao MAPLE.

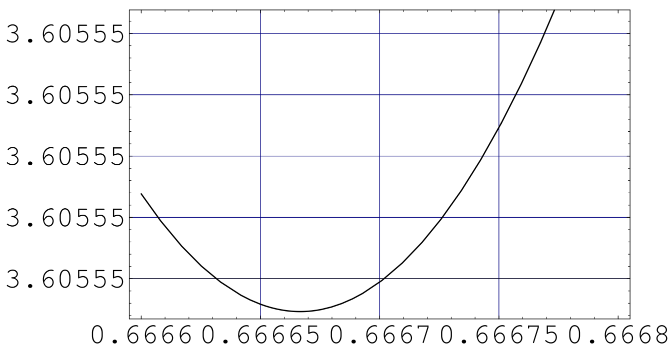
U MATHEMATICI se iscrtavanje grafa funkcije postiže naredbom:

Plot[su, {x, 0, 2}, Frame -> True, GridLines -> Automatic]
Na ekranu ćemo dobiti Sliku 7.



Slika 7. Graf funkcije **su** na segmentu [0, 2] u MATHEMATICI.

Kao i u MAPLE-u sada to treba ponoviti sužavajući segment na kojem promatramo funkciju sa istim zaključkom. Navedimo od njih samo posljednju Sliku 8 kada je interval [0.6666, 0.6668] i kada opet možemo iščitati da je najmanja vrijednost oko 3.60555 i to za $x = 0.66667$.



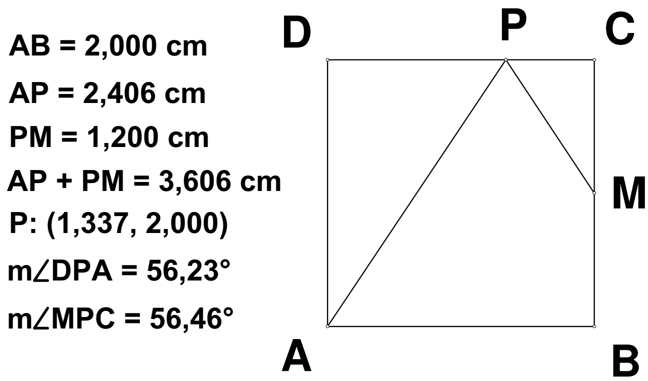
Slika 8. Posljednji graf funkcije **su** u MATHEMATICI.

Veliku pomoć za rješavanje Problema 1 možemo dobiti od programa GEOMETER'S SKETCHPAD (skraćeno GSP) koji je već par puta spominjan u Matki i danas se susreće u sve većem broju naših osnovnih škola. On se može nabaviti za manje od 50 dolara na Internet adresi **www.keypress.com**, no mnoge škole kod nas su ga kupile pa se učenici prvo moraju raspitati kod svojih nastavnika jer je možda već u njihovoj školi dostupan.

Prije svega u programu GSP lagano možemo nacrtati naš kvadrat i promatrane točke i dužine što smo mi već učinili na Slici 1.

Krenuli smo od točaka A i B koje dobijemo odabirom Point tool-a u Toolbox-u sa lijeve strane ekrana i dva pritiska mišom unutar crteža. Zatim izvedemo rotaciju točke B oko točke A za 90 stupnjeva da dobijemo D, a nakon toga rotiramo točku A oko točke B za -90 stupnjeva da dobijemo C. Onda nacrtamo segmente između susjednih točaka u nizu A, B, C, D, A da dobijemo stranice kvadrata. Na kraju, na segmentu CD upotrijebimo konstrukciju PointOnObject da bismo odabrali točku P, dok na segmentu BC koristimo PointAtMidpoint da konstruiramo točku M.

Tako dobiveni kvadrat najvjerovatnije neće imati stranicu duljine točno 2 pa je zato možda bolje upotrijebiti u Graph razdjeljku oruđe PlotPoints i nacrtati kvadrat u pravokutnom koordinatnom sustavu tako da točke A, B, C, D, M imaju koordinate (0, 0), (2, 0), (2, 2), (0, 2), i (2, 1) redom. Kada smo još odabrali i točku P na stranici CD kao gore možemo izračunati duljine segmenata AP i PM s alatom Distance pod Measure (s time da smo prethodno odabrali krajeve tih dužina) a zatim koristeći Calculate (također pod Measure) nađemo njihov zbroj $|AP| + |PM|$.



Slika 9. Položaj točke P kada je $|AP| + |PM|$ najmanje.

Mičemo li sada mišem točku P po segmentu DC od D prema C vidimo da se zajedno sa točkom mijenjaju i svi brojevi i da se naša suma $|AP| + |PM|$ mijenja od 4.236 (uz odabrane tisućice za Precision pod Preferences u Display razdjeljku) u točki C i polako pada do vrijednosti 3.606 pa se ponovo povečava do vrijednosti 3.828 u točki D. Pratimo li i kako se mijenja apcisa (x-koordinata) točke P zaključujemo da se najmanja vrijednost 3.606 (što je vrlo blizu $\sqrt{13}$) postiže kada je apcisa od P jednaka broju 1.337 (što je dosta blizu vrijednosti $\frac{4}{3}$ tako da je $|PC| = \frac{2}{3}$ za taj položaj točke P). Naša Slika 9 upravo prikazuje situaciju kada je točka P u tom za nas značajnom položaju.

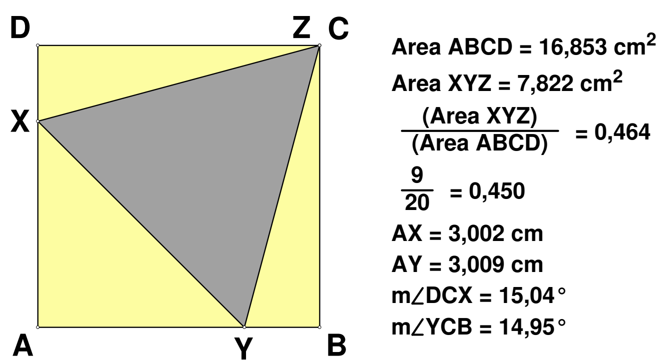
Mjerimo li još i kuteve $\angle DPA$ i $\angle MPC$ vidimo da su oni u tom položaju (gotovo) isti što vodi na zaključak da su trokuti MCP i NCP sukladni kao na Slici 2, gdje je N presjek pravaca AP i BC a to je upravo bila ključna ideja u prvom rješenju.

Dakle, možda upotrebom računala nismo uvijek u mogućnosti dobiti pravo rješenje ali sigurno možemo bolje upoznati veze koje vrijede između objekata koje promatramo pa nam to može pomoći da na kraju pronađemo matematički ispravno rješenje ili odgovor na problem.

Još jedan primjer toga će biti dan u pokušaju rješavanja sljedećeg problema.

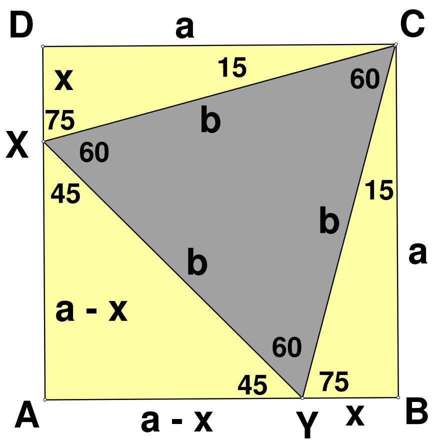
Problem 2. Je li moguće u kvadrat upisati jednakostranični trokut čija je površina veća od $\frac{9}{20}$ površine kvadrata.

U rješavanju koristimo opet program GSP. Prvo nacrtamo kvadrat $ABCD$ i na stranicama AD i AB odaberemo točke X i Y oruđem PointOnObject. Zatim nađimo sliku Z točke Y pri rotaciji za 60 stupnjeva oko točke X. Tako smo dobili jednakostranični trokut XYZ kome su dva vrha na stranicama zadanoga kvadrata. Oruđem Interior (pod Construct) odredimo unutrašnjosti kvadrata i trokuta i izmjerimo im površine koristeći Area (pod Measure) i nađemo njihov omjer alatom Calculate (opet pod Measure).



SLIKA 10. Kvadrat i u njega upisani jednakostranični trokut sa dva vrha na stranicama kvadrata i omjer njihovih površina.

Mičemo li točke X i Y u namjeri da postignemo da točka Z padne na neku stranicu kvadrata i pratimo li pritom na omjer njihovih površina vidimo da sigurno postoje položaji tih točaka kada je taj omjer veći od $\frac{9}{20}$. Čini se da je on najveći kada se točka Z poklopi sa točkom C. Na crtežu vidimo da su tada kutevi $\angle DCX$ i $\angle YCB$ jednaki 15 stupnjeva i da je AX jednako AY.



SLIKA 11. Kvadrat i u njega upisani jednakostranični trokut sa dva vrha na stranicama kvadrata i trećim vrhom u točki C.

Pokušajmo sada naći točno položaj točaka X i Y tako da trokut XYC bude jednakostraničan pri čemu ćemo pretpostaviti da su kutevi $\angle DCX$ i $\angle YCB$ jednaki 15 stupnjeva i da je duljina stranice kvadrata pozitivan realan broj a. Označimo YB sa x. Jer su trokuti XDC i YBC sukladni vrijedi da je $|XD| = x$. Slijedi da je

$$|AX| = |AY| = a - x.$$

Dakle, stranicu jednakostraničnog trokuta možemo na dva načina naći Pitagorinim poučkom i to iz trokuta YBC i AXY. Zato vrijedi

$$x^2 + a^2 = (a - x)^2 + (a - x)^2.$$

Prebacivanjem članova s lijeve strane na desnu dobivamo

$$x^2 - 4ax + a^2 = 0.$$

Nadopunimo li prva dva člana do punog kvadrata dodavanjem $4a^2$ imamo

$$x^2 - 4\,a\,x + 4\,a^2 - 3\,a^2 = (x - 2\,a)^2 - (\sqrt{3}\,a)^2 = 0.$$

Zato su rješenja $x_1 = (2 + \sqrt{3})\,a$ i $x_2 = (2 - \sqrt{3})\,a$. Očigledno je da nama samo treba drugo rješenje. Znači $x = (2 - \sqrt{3})\,a$. Vidimo da je stranica jednakostraničnog trokuta b jednaka

$$(a - x)\,\sqrt{2} = \sqrt{2}\,(\sqrt{3} - 1)\,a = (\sqrt{6} - \sqrt{2})\,a.$$

Omjer površina trokuta i kvadrata je

$$\frac{\frac{1}{4}\,b^2\,\sqrt{3}}{a^2} = \frac{\frac{1}{4}\,(\sqrt{6} - \sqrt{2})^2\,a^2\,\sqrt{3}}{a^2} = 2\,\sqrt{3} - 3 = 0.464 > \frac{9}{20} = 0.450.$$

Dakle, odgovor na Problem 2 je potvrdan. Moguće je u kvadrat upisati jednakostraničan trokut tako da je njegova površina veća od $\frac{9}{20}$ površine kvadrata.

Uz pomoć programa GSP smo došli na ideju da promatramo upravo jednakostranični trokut XYC. Jer je razlika između brojeva $2\sqrt{3}-3$ i $\frac{9}{20}$ vrlo mala (samo 0.014) teško je vjerovati da bismo bez te pomoći uopće mogli povjerovati da je takav trokut moguće naći.

Kopernikova 7, 10020 Zagreb, Hrvatska, Europa
E-mail address: `CERIN@MATH.HR`

Rudeška 148, 10000 Zagreb, Hrvatska, Europa
E-mail address: `vlahs@student.math.hr`