

# Esej o decimalama\*

Lavoslav Čaklović

Revidirano<sup>†</sup> 3. ožujka 2022.

Ovdje želim objasniti postupak dijeljenja brojeva kojeg učimo u osnovnoj školi. Ne tvrdim da je to jedini mogući postupak, želim da ga djeca razumiju i uvježbaju. Ovaj tekst prvenstveno je namijenjen roditeljima kako bi mogli djeci objasniti gdje griješe i pomoći im da lakše savladaju gradivo. Kao roditelj, učitelj i matematičar razumijem da su djeca razočarana ako nešto ne razumiju jer time gube povjerenje u vlastite mogućnosti. Algebarske operacije s brojevima su danas nezaobilazne i s njima se susrećemo svakodnevno i u svim situacijama.

Razumijevanje postupka dijeljenja čini se da nadilazi kognitivne sposobnosti djece u 5. razredu osnovne škole. Od njih se zahtijeva da usvoje postupak dijeljenja pa makar i bez razumijevanja. Jedini način usvajanja postupka je vježbanje jednostavnih zadataka, a njih u udžbeniku ima zaista dovoljno. Neću pretjerati ako kažem da je 500 zadataka dovoljno za sticanje rutine.

Koristan link s nadopunama, zadacima, primjerima i video zapisima je: *Digitalni obrazovni sadržaji - e-Škole*: <https://edutorij.e-skole.hr/share/page/home-page>. U polje za pretraživanje upišite "MATEMATIKA 5 - Modul 6" (s navodnicima).

U udžbenicima i dodatnim sadržajima ne objašnjava se zašto dijelimo tako kako dijelimo, objašnjava se tehnika, ali se ne potiče razumijevanje. Ovaj tekst namijenjen je nastavnicima, roditeljima i učenicima svih uzrasta koji žele razumijeti pozadinu računskih operacija. Ono što učenik 5. r. osnovne škole treba usvojiti je dio teksta označen kao **Skraćeni postupak**. Sve ostalo je objašnjavanje zašto se to tako radi.

Dijeljenje decimalnih brojeva u osnovi koristi (1) dijeljenje prirodnih brojeva s

---

\*Dokument je dostupan na web adresi <https://web.math.pmf.unizg.hr/~caklovic/eseji/> s aktivnim poveznicama.

<sup>†</sup>Zahvaljujem se Željku Hanjšu na komentarima i reviziji teksta.

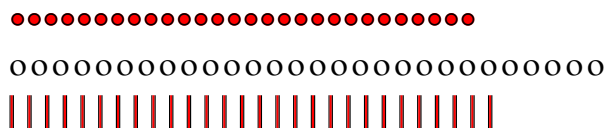
ostatkom i (2) decimalni zapis broja. To je dijeljenje u dekatskom sustavu prilagođeno našim svakodnevnim civilizacijskim rutinama. Objasniti ćemo jedno i drugo i upoznati se s nazivljem (terminologijom).

## Koncept broja

Koncept, ideja ili zamisao broja nije dio naše svakodnevne preokupacije. U školi su nas naučili kako zbrajamo  $28 + 204$  i to koristimo na blagajni supermarketa. Međutim, 28 nije broj. Da, dobro ste pročitali, to nije broj, to je niz znamenaka koji predstavlja dekatski zapis

$$2 \cdot 10 + 8 \cdot 1.$$

A što bi bio broj? To je apstraktan pojam, kojeg doživljavamo putem naših osjetila, neću puno pogriješiti ako kažem da je to nakupina istovrsnih objekata. Tako na primjer donji nizovi kuglica, slova, štapića ili zrnca graha



predstavljaju (reprezentiraju) isti broj. Do brojeva imamo pristup samo preko njihovih reprezentanata, a to su u gornjem primjeru kuglice, štapići, slova. . . Znamenka 8 predstavlja niz kuglica ●●●●●●●●, a znamenka 1 kuglicu ●.

U dekatskom zapisu broja koristimo samo znamenke  $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ . U zapisu s bazom 5 koristimo samo znamenke  $\{0, 1, 2, 3, 4\}$  i zapis 103 u bazi 5

$$1 \cdot 5^2 + 0 \cdot 5^1 + 3 \cdot 1.$$

reprezentira isti broj kao i dekatski zapis 28. Isti broj u binarnom zapisu (sa znamenkama  $\{0, 1\}$ ) pišemo, uz pomoć potencija broja 2, kao niz znamenaka 11100 što predstavlja

$$1 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 0 \cdot 1.$$

Znamenku 0 koristimo kao naznaku da određena potencija baze nedostaje u razvoju po toj bazi.

**Napomena.** U daljnjem tekstu koristiti ćemo dekatski razvoj ili dekatski zapis broja. Drugim riječima, 2801 je samo niz znamenki i ako nije rečeno koju bazu koristimo onda ćemo podrazumijevati da se radi o dekatskom zapisu, tj. bazi 10.

Računanje i baratanje s brojevima je računanje i baratanje s dekatskim zapisima i namjera ovog teksta je objasniti kako se to reflektira na baratanje sa znamenkama.

Na prikaz broja u nekoj bazi pokušajte gledati kao na sučelje s kojim rukovodte određenim procesom. Slično tome, ikone na zaslonu vašeg kompjutera imaju višestruku namjenu ovisno kliknemo li na njih lijevim ili desnim gumbom miša. Te ikone su pokretačka konzola za neke koje ne razumijete ali ih ipak koristite. Na kraju krajeva, ako radite u 'oblaku' (internet) vi čak ni ne znate je li vam odgovore vraća običan ili kvantni kompjutor ili neki svemirac.

## Dekatski zapis i decimalni broj (detaljnije)

Dekatska jedinica je svaka potencija broja 10, tj. brojevi oblika  $1 = 10^0, 10^2, 10^3, \dots$  kao i  $10^{-1}, 10^{-2}, 10^{-3}, \dots$ . Dekatskih jedinica ima beskonačno mnogo. Oznaka  $10^5$  je skraćeni zapis za 100000 (sto tisuća), a  $10^{-3}$  je skraćeni zapis za 1/1000 (tisućinka). Potencija broja 10 u dekatskoj jedinici, ako je pozitivna, označava koliko puta broj 10 množimo sa samim sobom, a ako je negativna onda je to reciprična vrijednost od dekatske jedinice s pozitivnom potencijom. Rezimirajmo:

$$\begin{aligned} 1 &= 10^0 \\ 10 &= 10^1 \\ 100 &= 10^2 \\ 1000 &= 10^3 \\ &\dots\dots \\ 10^{-1} &= \frac{1}{10} \\ 10^{-2} &= \frac{1}{100} \\ 10^{-3} &= \frac{1}{1000} \\ &\dots\dots \end{aligned}$$

*Dekatski zapis* ili *dekatski razvoj* koristi osnovne znamenke 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9 u kombinaciji s potencijama broja  $10^1$ . Primjer dekatskog zapisa je

$$20.16 = 2 \cdot 10 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot \frac{1}{10} + 6 \cdot \frac{1}{100} \quad (1)$$

---

<sup>1</sup>U nekom drugom sustavu, napr. s bazom 5 koristimo znamenke 0,1,2,3,4 u kombinacijama s potencijama broja 5.

i skraćeno ga zapisujemo nizom znamenki 20.16 što smo i naznačili s lijeve strane znaka jednakosti. Taj niz znamenki sačinjen je od koeficijenata decimalnog zapisa uz odgovarajuće dekatske jedinice. Broj nula (0) koristimo kao naznaku da neka dekatska jedinica nije prisutna u dekatskom zapisu, napr. u zapisu 201.602 nisu prisutne dekatske jedinice 10 i  $\frac{1}{100}$ .

*Decimalna točka* označava mjesto koje odjeljuje *cjelobrojni dio* dekatskog zapisa od *decimalnog dijela*. Decimalni dio zapisa koristi samo negativne potencije, a cjelobrojni dio samo pozitivne potencije uključujući i nulu. Krećući se udesno od decimalne točke potencije padaju, a krećući se ulijevo od decimalne točke potencije rastu. Brojeve 2,0,1,6 u gornjem zapisu nazivamo znamenka desetica (D), jedinica (J), desetinka (d) i stotinka (s). Umjesto dekatskih jedinica u zapisu možemo koristiti i spomenute oznake, tako da zapis (1) možemo pisati i na način

$$20.16 = 2D+0J+1d+6s,$$

uvažavajući odnos  $D=10J$ ,  $J=10d$ ,  $d=10s$ . Slovočane oznake u decimalnom zapisu prilagođene su djeci nižih razreda osnovne škole. One su neprikladne za prikaz velikih/malih brojeva i računanje s njima.

Broj nulu (0) kao znamenku za decimalno mjesto poznavali su već i Babilonci, Maye, Indijci. Rimljani nisu imali oznaku za 0. Od svih drevnih naroda Indijci su jedini koristili 0 kao broj u računskim operacijama.

**Definicija** (decimalnog broja). *Decimalni broj* je svaki niz znamenki koje pripadaju nekom dekatskom zapisu s konačnim cjelobrojnim dijelom.

**Napomena.** Decimalni dio dekatskog zapisa može biti i beskonačan kao što je to 0.33333... gdje se broj 3 pojavljuje beskonačno mnogo puta u decimalnom dijelu.

## Jednakost decimalnih brojeva

Dva decimalna broja su jednaka ako su im svi koeficijenti u dekatskom zapisu uz odgovarajuće dekatske jedinice međusobno jednaki. Na primjer 201.6 i 20.16 nisu jednaki, tj.  $201.6 \neq 20.16$ . Ti brojevi koriste iste znamenke ali uz različite dekatske jedinice.

## Uspoređivanje decimalnih brojeva

Decimalne brojeve moguće je uspoređivati bez eksplicitnog razvijanja u dekatski zapis. Prvo se usporede koeficijenti uz vodeće potencije, ako su jednaki uspoređuju se koeficijenti uz sljedeće potencije itd. Na primjer

$$480.30 > 479.9999.$$

Isto tako je

$$48.03 > 9.99$$

jer je vodeća znamenka prvog broja koeficijent uz dekatsku jedinicu 10, a vodeća znamenka drugog broja je koeficijent uz dekatsku jedinicu 1.

### Zbrajanje/oduzimanje decimalnih brojeva

Možda je to najbolje objasniti na primjeru. Treba zbrojiti brojeve 49.16 i 7.38. U tu svrhu brojevima pridružimo njihov dekatski razvoj i zbrojimo odgovarajuće koeficijente:

$$\begin{aligned}49.16 &= 4 \cdot 10 + 9 \cdot 1 + 1 \cdot \frac{1}{10} + 6 \cdot \frac{1}{100} \\7.38 &= 7 \cdot 1 + 3 \cdot \frac{1}{10} + 8 \cdot \frac{1}{100} \\49.16 + 7.38 &= 4 \cdot 10 + 16 \cdot 1 + (3 + 1) \cdot \frac{1}{10} + (6 + 8) \cdot \frac{1}{100} \\&= 4 \cdot 10 + 16 \cdot 1 + 4 \cdot \frac{1}{10} + 14 \cdot \frac{1}{100}.\end{aligned}$$

Međutim, gornji razvoj nije dekatski razvoj nekog decimalnog broja. On koristi dekatske jedinice ali svi koeficijenti u tom razvoju nisu osnovne znamenke iz skupa  $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ . Brojeve 16 i 14 treba zapisati u dekatskom razvoju i ponovno srediti izraz po dekatskim jedinicama.

$$\begin{aligned}&= 4 \cdot 10 + (10 + 6) \cdot 1 + 4 \cdot \frac{1}{10} + (10 + 4) \cdot \frac{1}{100} \\&= 5 \cdot 10 + 6 \cdot 1 + 5 \cdot \frac{1}{10} + 4 \cdot \frac{1}{100} \\&= 56.54\end{aligned}$$

**Skraćeni postupak:**

$$\begin{array}{r}49.16 \\+ \underline{7.38} \\14 \\4 \\16 \\+ \underline{4} \\= 56.54\end{array}$$

ili, ako pamtimo međukorake

$$\begin{array}{r} 49.16 \\ + \underline{7.38} \\ = 56.54 \end{array}$$

**Napomena.** Zbrajanje, bez obzira koliko bilo jednostavno, ukazuje na osnovnu proceduru u radu s dekatskim razvojem, a to je da koeficijent uz dekatsku jedinicu mora biti znamenka u skupu  $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ . Ako to nije onda taj koeficijent rastavljamo u dekatski razvoj i dobiveni izraz ponovno sređujemo po potencijama od 10.

Za uvježbavanje te procedure *abak* ili *abakus* je izvanredno mentalno pomagalo. Ono omogućava i vizualizaciju i doživljaj operacija s decimalnim brojevima kojeg nije moguće postići olovkom i papirom. Pogodnosti računanja uz pomoć abakusa su koordinacija prstiju i mentalne aritmetike što dodatno razvija neuralnu komunikaciju među neuronima u mozgu. Šteta što je tako dragocjeno pomagalo izbačeno iz školskih klupa.

Pogledajte video <https://www.youtube.com/watch?v=kxxZeLg3-sM> ili video <https://www.youtube.com/watch?v=rI2fx-kDYbY>, ali s jednom napomenom. Abakus se dira prstima, a ovaj video služi kao uputa za korištenje. Ako kupujete abakus, za prvi susret s njim, preporučam ovakav prikazan na gornjem videu.

### **Množenje decimalnog broja prirodnim brojem**

Ovaj postupak prethodi dijeljenju u smislu da fokusira pažnju na množenje dekadskog zapisa brojem. Treba imati na umu da je niz znamenki koje nazivamo brojem samo simbol za dekatski zapis. Zbrajanje, množenje i dijeljenje su operacije koje činimo sa dekadskim zapisima i razumijevanje tih operacija odnosi se na razumijevanje operacija s dekadskim zapisima.

## Množenje decimalnog broja dekatskom jedinicom

**Primjer.**  $1.23 \cdot 10 = 12.3$ . Zaista,

$$\begin{aligned}1.23 &= 1 + \frac{2}{10} + \frac{3}{100} / \cdot 10 \\1.23 \cdot 10 &= 1 \cdot 10 + \frac{2}{10} \cdot 10 + \frac{3}{100} \cdot 10 \\&= 10 + 2 + \frac{3}{10} \\&= 12.3.\end{aligned}$$

**Za vježbu:**

$$\begin{aligned}23.0045 \cdot 100 &= 2300.45 \\23.0045 \cdot \frac{1}{100} &= 0.230045\end{aligned}$$

Množenjem broja s 10,100,1000 dobivamo uvećani rezultat. Decimalna točka u umnošku je pomaknuta **udesno** za onoliko mjesta koliko nula ima dekatska jedinica s kojom množimo.

Dijeljenjem broja s 10,100,1000 dobivamo umanjeni rezultat. Decimalna točka u rezultatu je pomaknuta **ulijevo** za onoliko mjesta koliko nula ima dekatska jedinica s kojom množimo.

**Napomena.** Dodavanje nule (ili više njih) decimalnom dijelu ne mijenja vrijednost decimalnog broja. Na primjer  $1.2300 = 1.23$ .

## Množenje decimalnog broja bilo kojim brojem

Za početak ćemo objasniti kako se decimalni broj množi cijelim brojem.

**Primjer.** Broj 58.16 množimo s 2 tako da njegov prikaz u dekatskom sustavu množimo s 2:

$$\begin{aligned}2 \cdot 58.16 &= 2 \cdot \left( 5 \cdot 10 + 8 + 1 \cdot \frac{1}{10} + 6 \cdot \frac{1}{100} \right) \\&= 10 \cdot 10 + 16 + 2 \cdot \frac{1}{10} + 12 \cdot \frac{1}{100}\end{aligned}$$

Međutim, desna strana nije prikaz nekog broja u dekatskom sustavu jer 10, 16 i 12 nisu osnovne znamenke iz skupa  $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ . Izraz treba dodatno popraviti na način da iskoristimo njihove dekatske zapise:

$$\begin{aligned} 2 \cdot 58.16 &= 100 + (10 + 6) + 2 \cdot \frac{1}{10} + (10 + 2) \cdot \frac{1}{100} \\ &= 1 \cdot 100 + 1 \cdot 10 + 6 \cdot 1 + 3 \cdot \frac{1}{10} + 2 \cdot \frac{1}{100} \\ &= 116.32. \end{aligned}$$

Prethodni račun možemo sažeto zapisati množeći svaku znamenku broja s 2 i pravilno potpisivati uvažavajući njeno mjesto u dekatskom zapisu, a nakon toga zbrajati.

**Skraćeni postupak:**

$$\begin{array}{r} \underline{58.16 \cdot 2} \\ 10 \\ 16 \\ 2 \\ + \underline{12} \\ 116.32 \end{array}$$

Umnožak  $8 \cdot 2 = 16$  potpisuje se ispod broja 8 ali tako da broj 6 bude na istom decimalnom mjestu kao i 8. Tako se učini sa svim znamenkama i nakon toga se rezultati zbroje.

Još sažetiji zapis množenja postizemo ako se pamte međukoraci, rezultati množenja znamenki. Množimo ih brojem 2 počevši od desnog kraja:

$$\begin{aligned} 2 \cdot 6 &= 12 \quad \text{— pišem 2 pamtim 1} \\ 2 \cdot 1 &= 2 \quad \text{(pribrajam upamćeni 1) — pišem 3} \\ 2 \cdot 8 &= 16 \quad \text{— pišem 6, pamtim 1} \\ 2 \cdot 5 &= 10 \quad \text{(pribrajam upamćeni 1) — pišem 11,} \end{aligned}$$

odnosno

$$\begin{array}{r} \underline{58.16 \cdot 2} \\ 116.32 \end{array}$$



Množenje višeznamenkastim brojevima provodi se na isti način množeći broj sa svakom znamenkom pazeći pri tome na potpisivanje. Navodimo primjer bez komentara.

**Skraćeni postupak:**

$$\begin{array}{r} \underline{58.16 \cdot 28} \\ 1163.2 \\ + \underline{465.28} \\ 1628.48 \quad \leftarrow \text{rezultat množenja} \end{array}$$

Primijetite da u prvom redu ispod gornje crte stoji rezultat množenja s brojem 20, kojem pribrajamo rezultat množenja s brojem 8.

### Množenje dva decimalna broja

Jedan od dva decimalna broja, onaj s manje decimala, pomnožimo s dekatskom jedinicom tako da dobijemo cijeli broj i zatim umnožak tih brojeva podijelim s istom dekatskom jedinicom.

**Primjer.**

$$\begin{aligned} 12.567 \cdot 3.82 &= 12.567 \cdot 3.82 \cdot \frac{100}{100} \\ &= \frac{12.567 \cdot 382}{100} \\ &= 48.00594 \end{aligned}$$

### Zaokruživanje decimalnog broja

Kod zaokruživanja decimalnog broja prvo se odredi decimalno mjesto na koje zaokružujemo. Ako je broj koji zaokružujemo jednak 4.8516, a decimalno mjesto na koje zaokružujemo stotinka (1/100) onda u dekatskom zapisu tog broja odbacujemo dio koji sadrži dekatske jedinice manje od one na koju zaokružujemo, a to su tisućinke, desettisućinke itd. Pri tome pazimo je li znamenka tisućinka manja od 5 ili jednaka ili veća od 5. Ako je ona veća ili jednaka 5, znamenku stotinku povećamo za 1. Dakle, zaokružena vrijednost navedenog broja je 4.85. U tablici

niže dani su neki primjeri zaokruživanja.

broj koji zaokružujemo	decimalno mjesto na koje zokružujemo	zaokruženi broj
4.8516	$10^{-2}$	4.85
4.8516	$10^{-1}$	4.9
12.999531	$10^{-3}$	13.000
273.82	$10^0$	274
273.82	$10^1$	270
273.82	$10^2$	300
273.82	$10^3$	0

*Zaokruživanje na vodeću znamenku* je zaokruživanje na najveću dekatsku jedinicu u dekatskom rastavu broja. Zaokruživanje na dvije vodeće znamenke je zaokruživanje na drugu po veličini dekatsku jedinicu itd. U tablici su dani neki primjeri zaokruživanja na vodeće znamenke.

broj koji zaokružujemo	broj vodećih znamenaka	zaokruženi broj
273.82	1	$3 \cdot 10^2$
273.82	2	$2.7 \cdot 10^2$
4.8516	3	4.85

## Dijeljenje prirodnih brojeva (s ostatkom)

Postupak dijeljenja baziran je na dijeljenju prirodnih brojeva s ostatkom i prikazu broja u dekatskom sustavu.

Pretpostavimo da želimo podijeliti dva prirodna broja, na primjer,  $22 : 7$ . Rezultat tog dijeljenja je 3, s ostatkom 1. Drugačije zapisano

$$22 = 3 \cdot 7 + 1$$

odnosno

$$\frac{22}{7} = 3 + \frac{1}{7}.$$

Ostatak (ovdje je to 1) je manji od djelitelja (ovdje je to 7), a može biti i jednak 0 (na primjer  $21 = 3 \cdot 7 + 0$ ).

**Nešto kompliciraniji primjer.** Treba podijeliti broj 825 brojem 6 i odrediti ostatak. Drugim riječima, treba zapisati broj 825 u obliku

$$825 = r \cdot 6 + o$$

gdje je  $0 \leq o < 6$ . Broj  $r$  je rezultat dijeljenja, a  $o$  je ostatak. Jedan od načina da to učinimo je taj da oduzimamo broj 6 uzastopce sve dok ne dobijemo broj  $o$  koji je manji od 6 i pamtimo broj  $k$  koliko smo puta oduzimali. To bi moglo biti zamorno, pa se postavlja pitanje postoji li kraći postupak? Odgovor je da. Evo tog postupka:

Rastavimo 825 pomoću dekatskih jedinica i vodeću znamenku 8 podijelimo sa 6 s ostatkom 2, tj.  $8 = 1 \cdot 6 + 2$

$$\begin{aligned} 825 &= 8 \cdot 100 + 25 \\ &= (6 + 2) \cdot 100 + 25 \\ &= 6 \cdot 100 + 225 \\ &= 6 \cdot 100 + 22 \cdot 10 + 5 \end{aligned}$$

međutim,  $22 = 6 \cdot 3 + 4$ ,

$$\begin{aligned} &= 6 \cdot 100 + (6 \cdot 3 + 4) \cdot 10 + 5 \\ &= 6 \cdot 100 + 6 \cdot 3 \cdot 10 + 45 \end{aligned}$$

međutim,  $45 = 6 \cdot 7 + 3$ ,

$$\begin{aligned} &= 6 \cdot 100 + 6 \cdot 3 \cdot 10 + 6 \cdot 7 + 3 \\ &= 6 \cdot (1 \cdot 100 + 3 \cdot 10 + 7) + 3 \\ &= 137 \cdot 6 + 3. \end{aligned}$$

Dakle,  $825 : 6$  jednako je 137 s ostatkom 3.

**Skraćeni postupak:**

$$\begin{array}{r} 825 : 6 = 137 \quad \leftarrow \text{rezultat dijeljenja} \\ 22 \\ 45 \\ 3 \quad \leftarrow \text{ostatak} \end{array}$$

## Dijeljenje decimalnih brojeva

U ovom dijelu ćemo objasniti kako se razlomak koji nije dekatski zapisuje u obliku decimalnog broja. Dijeljenje decimalnih brojeva je nakon toga jednostavno jer je

kvocijent dva decimalna broja razlomak. Na primjer

$$\frac{2.2}{1.51} = \frac{2.2}{1.51} \cdot \frac{100}{100} = \frac{220}{151}.$$

**Napomena.** Uputno je razlomak prije dijeljenja proširiti tako da nazivnik postane cijeli broj.

### Približna vrijednost izraza

Prije samog dijeljenja, pogotovo dijeljenja s višeznamenkastim brojem, korisno je uvježbati zaokruživanje brojeva. Obično se brojevi zaokružuju na jednu ili dvije vodeće znamenke radi približnog računanja vrijednosti složenijeg izraza. Na primjer

$$\frac{295.586}{141.389} \cdot (6.78 - 1.247) \cdot 12.472$$

možemo približno izračunati na način da svaki broj zaokružimo na vodeću znamenku i zatim provedemo navedene algebarske operacije. Dakle, približna vrijednost gornjeg izraza je

$$\frac{3 \cdot 10^2}{1 \cdot 10^2} \cdot (7 - 1) \cdot 10 = 3 \cdot 6 \cdot 10 = 360,$$

dok je točna vrijednost 146.6161.

Zaokruživanje na dvije vodeće znamenke daje bolji rezultat

$$\frac{3.0 \cdot 10^2}{1.4 \cdot 10^2} \cdot (6.8 - 1.2) \cdot 12 = 146.5714 \approx 147.$$

Računanje približnih vrijednosti je mala umjetnost koja se uvježba s vremenom. Korisno je naglasiti da najveće greške kod zaokruživanja dolaze kod zaokruživanja nazivnika.

**Primjena zaokruživanja kod dijeljenja.** Recimo da treba podijeliti  $764 : 83$  i odrediti ostatak. Grubi račun proveden zaokruživanjem na vodeću znamenku daje rezultat dijeljenja  $800 : 8 = 10$ . Čini se da nismo puno pametniji ovom izvedbom, možda je pametnije brojnik i nazivnik podijeliti s 10 i zatim ih zaokružiti na cijeli

broj. Dakle,  $764 : 83 \approx 76 : 8 \approx 9$ . Odavde je

$$\begin{array}{r} 764 : 83 = 9.20481 \dots \\ 170 \\ 400 \\ 680 \\ 160 \\ 77 \end{array}$$

Upućujem čitatelje na video od Antonije Horvatek, *Dijeljenje dvoznamenkastim brojem* <https://www.youtube.com/watch?v=ZAcS-vvCqq8> koji dodatno može pojasniti ono što je ovdje rečeno.

### Razlomak kao decimalni broj

Postupak pretvaranja razlomka u decimalni broj provest ćemo na primjeru. Recimo da želimo podijeliti 23 s 8, tj. razlomak  $23/8$  želimo zapisati kao decimalni broj.

Ostatak pri dijeljenju broja 23 s 8 je 7 jer je

$$23 = 2 \cdot 8 + 7 \quad (\text{odnosno})$$

$$\frac{23}{8} = 2 + \frac{7}{8} \quad (\text{pamtim 2!}).$$

Ovim prvim korakom odredili smo cijeli dio decimalnog broja (ovdje je to 2) od decimalnog dijela kojeg još ne znamo. Sljedeći korak je razlomak  $7/8$  zapisati kao decimalni broj.

$$\begin{aligned} \frac{7}{8} &= \frac{7}{8} \cdot \frac{10}{10} \quad (\text{proširivanje razlomka}) \\ &= \frac{70}{8} \cdot \frac{1}{10} \quad (\text{dijelimo s ostatkom}) \\ &= \left(8 + \frac{6}{8}\right) \cdot \frac{1}{10} \\ &= 8 \cdot \frac{1}{10} + \frac{6}{8} \cdot \frac{1}{10} \quad (\text{pamtim 8!}). \end{aligned}$$

Time smo izračunali znamenku desetinku decimalnog broja koja iznosi 8. Isti

postupak nastavljamo s razlomkom 6/8.

$$\begin{aligned}\frac{6}{8} &= \frac{6}{8} \cdot \frac{10}{10} \quad (\text{proširivanje razlomka}) \\ &= \frac{60}{8} \cdot \frac{1}{10} \quad (\text{dijelimo s ostatkom}) \\ &= \left(7 + \frac{4}{8}\right) \cdot \frac{1}{10} \\ &= 7 \cdot \frac{1}{10} + \frac{4}{8} \cdot \frac{1}{10} \quad (\text{pamtim 7!}).\end{aligned}$$

Isti postupak nastavljamo s razlomkom 4/8.

$$\begin{aligned}\frac{4}{8} &= \frac{4}{8} \cdot \frac{10}{10} \quad (\text{proširivanje razlomka}) \\ &= \frac{40}{8} \cdot \frac{1}{10} \quad (\text{dijelimo bez ostatka}) \\ &= 5 \cdot \frac{1}{10} \quad (\text{pamtim 5! STOP}).\end{aligned}$$

Rezultat dijeljenja je

$$\frac{23}{8} = 2 + \frac{8}{10} + \frac{7}{100} + \frac{5}{1000} = 2.875.$$

### Skraćeni zapis postupka dijeljenja

Ponovit ćemo opisani postupak u skraćenom zapisu. Takav zapis ubrzava račun, a dovoljno je pregledan da se usvaja bez napora. Naravno, treba razumjeti gore opisani postupak.

**Skraćeni postupak:**

$$\begin{array}{l}23 : 8 = \mathbf{2.875} \quad (23 : 8 = \mathbf{2} - \text{ostatak } 7) \\ 70 \quad (70 : 8 = \mathbf{8} - \text{ostatak } 6) \\ 60 \quad (60 : 8 = \mathbf{7} - \text{ostatak } 4) \\ 40 \quad (40 : 8 = \mathbf{5} - \text{ostatak } 0) \\ 0 \quad (\text{STOP})\end{array}$$

Komentare u zagradama korisno je pisati tijekom uvježbavanja, a kasnije ih možemo izostaviti.

U sljedećem primjeru je situacija nešto kompliciranija jer je djeljenik decimalni broj.

**Skraćeni postupak:**

$$\begin{array}{r} 23.58 : 8 = \mathbf{2.9475} \quad (23 : 8 = 2 - \text{ostatak } 7) \\ 75 \quad (75 : 8 = 9 - \text{ostatak } 3) \\ 38 \quad (38 : 8 = 4 - \text{ostatak } 6) \\ 60 \quad (60 : 8 = 7 - \text{ostatak } 4) \\ 40 \quad (40 : 8 = 5 - \text{ostatak } 0) \\ 0 \quad (\text{STOP}) \end{array}$$

### Beskonačni decimalni brojevi

U postupku računanja vrijednosti razlomka kao decimalnog broja može se desiti da postupak ne stane, tj. ostatak je uvijek različit od 0. Evo primjera.

$$\begin{array}{r} 7 : 3 = 2.33 \dots \\ 10 \\ 10 \\ \text{itd.} \end{array}$$

U ovom slučaju znamenka 3 se ponavlja beskonačno puta što se označava kao  $2.\dot{3}$  s točkom iznad znamenke koja se ponavlja. Ako se ponavlja grupa znamenaka to se označava točkom iznad prve i posljednje znamenke u toj grupi, na primjer  $2.\dot{234}$  što je skraćena oznaka za  $2.234234234\dots$ . Osim takvog, postoji i zapis u kojem stoji crta iznad grupe znamenaka koje se ponavljaju kao npr.  $2.\overline{234}$ .