5. LINEARNI OPERATORI

5.1. Osnovna svojstva linearnih operatora

Linearni operatori su preslikavanja vektorskih prostora koja čuvaju operacije, tj. linearnu strukturu. Primjere linearnih operatora na $V^2(O)$ i $V^3(O)$ smo vidjeli u uvodnim razmatranjima. Sad bismo željeli proučiti svojstva linearnih operatora na općim konačnodimenzionalnim vektorskim prostorima.

Definicija 1.1. *Neka su V i W vektorski prostori nad poljem F. Preslikavanje $A : V \to W$ se zove linearan operator ako vrijedi $A(\alpha x + \beta y) = \alpha Ax + \beta Ay$, $\forall x, y \in V$, $\forall \alpha, \beta \in F$.*

Napomena 1.2. (a) Naravno, moguće je i $V = W$. Ako je $V \neq W$ polje mora biti isto jer α i β u gornjoj definiciji moraju množiti i vektore x, y u V i njihove slike Ax, Ay u W.

(b) Često govorimo samo operator, a linearnost podrazumijevamo. Obično ćemo operatore označavati velikim latinskim slovima, a umjesto $A(x)$ standardno pišemo Ax.

(c) Ako je $A : V \to W$ linearan operator onda direktno iz Definicije 1.1 slijedi $A(x + y) = Ax + Ay$, $\forall x, y \in V$ (ako se u definicionom uvjetu uzme $\alpha = \beta = 1$), te $A(\alpha x) = \alpha Ax$, $\forall x \in V$, $\forall \alpha \in F$ (ako se uzme $\beta = 0$). Ova se svojstva zovu aditivnost i homogenost. Dakle je svaki linearan operator aditivno i homogeno preslikavanje. Trivijalno se vidi da vrijedi i obrat: aditivno i homogeno preslikavanje vektorskih prostora je linearan operator.

(d) Uvijek je (za svaki operator) $A0 = 0$.

(e) Kad je $A : V \to W$ linearan operator onda vrijedi $A(\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i) = \sum_{i=1}^n \alpha_i Ax_i$, $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x_1, \ldots, x_n \in V$, $\forall \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in F$. Tvrdnja se dokazuje jednostavnom indukcijom (na vježbama).

Primjeri:
1. Rotacija radijvektora za kut φ: $R_\varphi : V^2(O) \to V^2(O)$.
2. Ortogonalna projekcija $V^3(O)$ na $V^2(O)$.
3. $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $A(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2, 0)$.
4. $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $A(x_1, x_2) = (6x_1 - x_2, -2x_1 + x_2, x_1 - 7x_2)$.
5. $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $A(x_1, x_2) = (x_1^2, x_2 + 5)$ nije linearan operator.
6. Transponiranje matrica: $T : M_{mn} \to M_{nm}$, $T(A) = A^\tau$.
7. $\mathrm{tr} : M_n(F) \to F$.
8. $\det : M_n(F) \to F$ nije linearan operator.
9. $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1 - x_2 + 4x_3$.
10. $D : P_n \to P_n$, $Dp = p'$.
11. Nul-operator: $0 : V \to W$.
12. Identitet: $I : V \to V$.
13. $D : P \to P$, $Dp = p'$.
14. $A : \mathbb{R}^\mathbb{N} \to \mathbb{R}^\mathbb{N}$, $S(x_1, x_2, x_3, \ldots) = (0, x_1, x_2, x_3, \ldots)$.
15. $A : \mathbb{R}^\mathbb{N} \to \mathbb{R}^\mathbb{N}$, $T(x_1, x_2, x_3, \ldots) = (x_2, x_3, x_4, \ldots)$.

Primijetimo dva prešutno uvedena dogovora. Kad operator djeluje na prostoru matrica, kao u primjeru 6 ipak je preglednije pisati $A(T)$ umjesto AT. Drugo, kad operator prima vrijednosti u polju (koje je tada shvaćeno kao prostor nad samim sobom) obično se operator bilježi malim slovima kao u primjeru 9..

U zadnja tri primjera operatori koje smo naveli djeluju na beskonačno dimenzionalnim prostorima. Takvima se ovdje nećemo baviti, već ćemo isključivo proučavati operatore na prostorima konačne dimenzije. Navedeni primjeri će nam biti korisni kad budemo željeli istaknuti, odnosno ilustrirati važnost prepostavke o konačnodimenzionalnosti prostora.

Ako je $A : V \to W$ linearan operator i $\dim V < \infty$ onda je A potpuno određen svojim djelovanjem na (bilo kojoj) bazi od V. Zaista, ako je $\{b_1, \ldots, b_n\}$ baza za V i ako poznajemo $Ab_1, \ldots, Ab_n \in W$ onda za proizvoljan $x \in V$ imamo $x = \sum_{i=1}^n \lambda_i b_i$ i odavde $Ax = \sum_{i=1}^n \lambda_i Ab_i$. To pokazuje: ukoliko su nam dani koeficijenti vektora x u bazi $\{b_1, \ldots, b_n\}$ onda, poznavajući vektore $Ab_1, \ldots, Ab_n$, znamo i Ax.

"Obratan" proces je važan postupak zadavanja linearnih operatora.

Propozicija 1.3. *(Zadavanje na bazi i proširenje po linearnosti)*
Neka su V i W vektorski prostori nad istim poljem, neka je $dim\, V = n < \infty$, neka je $\{b_1, \ldots, b_n\}$ bilo koja baza za V i $(w_1, \ldots, w_n)$ bilo koja uređena n-torka vektora iz W. Postoji jedinstven linearan operator $A : V \to W$ takav da je $Ab_i = w_i$, $\forall i = 1, \ldots, n$.

Dokaz: Uočimo da je $(w_1, \ldots, w_n)$ uređena n-torka, a ne skup; zato je moguće (a to smo i željeli dozvoliti) da se neki od vektora w_i ponavljaju.

Za $x = \sum_{i=1}^n \lambda_i b_i$ definiramo $Ax = \sum_{i=1}^n \lambda_i w_i$. Definicija je korektna jer prikaz svakog vektora u danoj bazi je jedinstven. Dokažimo da je A linearan: Za $x = \sum_{i=1}^n \lambda_i b_i$ i $y = \sum_{i=1}^n \mu_i b_i$ iz V i α i β iz F uočimo najprije da je $\alpha x + \beta y = \sum_{i=1}^n (\alpha\lambda_i + \beta\mu_i) b_i$. Sad je dalje jasno.

Očito smo postigli $Ab_i = w_i$, $\forall i = 1, \ldots, n$.

Konačno, ako bi i $B : V \to W$ bio operator sa svojstvom $Bb_i = w_i$, $\forall i = 1, \ldots, n$ onda za proizvoljan $x = \sum_{i=1}^n \lambda_i b_i \in V$ iz linearnosti operatora B slijedi $Bx = \sum_{i=1}^n \lambda_i w_i$, dakle $B = A$. $\square$

Propozicija 1.4. *Neka je $A : V \to W$ linearan operator.*
(i) Ako je $L \leq V$ onda je $A(L) \leq W$.
(ii) Ako je $M \leq W$ onda je $A^{-1}(M) \leq V$.

Dokaz: (i): $Ax, Ay \in A(L)$, $\alpha, \beta \in F \Rightarrow \alpha Ax + \beta Ay = A(\alpha x + \beta y) \in A(L)$ jer je L potprostor.

(ii): $x, y \in A^{-1}(M), \alpha, \beta \in F \Rightarrow Ax, Ay \in M \Rightarrow \alpha Ax + \beta Ay \in M \Rightarrow A(\alpha x + \beta y) \in M \Rightarrow \alpha x + \beta y \in A^{-1}(M)$. $\square$

Posebno su nam zanimljiva dva specijalna slučaja: kad je $L = V \leq V$ i $M = \{0\} \leq W$.

Definicija 1.5. *Neka je $A : V \to W$ linearan operator. Potprostori*
$Im\, A = A(V) = \{Av : v \in V\} \leq W$ i
$Ker\, A = A^{-1}(\{0\}) = \{x \in V : Ax = 0\} \leq V$
se zovu slika, odnosno jezgra operatora A. Kad su V i W konačnodimenzionalni i $Im\, A$ i $Ker\, A$ su konačnodimenzionalni i tada se rang i defekt operatora A definiraju kao brojevi $r(A) = dim(Im\, A)$, odnosno $d(A) = dim(Ker\, A)$.

Napomena 1.6. Neka je $A : V \to W$ linearan operator, $\dim V = n < \infty$. Uzmimo bilo koju bazu $\{b_1, \ldots, b_n\}$ za V i primijetimo: $x \in V$, $x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i b_i \Rightarrow Ax = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i A b_i$. Ovo pokazuje da je skup $\{Ab_1, \ldots, Ab_n\}$ sistem izvodnica za $\operatorname{Im} A$, tj. $\operatorname{Im} A = [\{Ab_1, \ldots, Ab_n\}]$. Posebno, slijedi $\mathrm{r}(A) = \dim(\operatorname{Im} A) \leq n$.

Međutim, nema govora o tome da bi linearni operatori čuvali linearnu nezavisnost; tj. nezavisne skupove prevodili u linearno nezavisne. Nul-operator je drastičan primjer.

Propozicija 1.7. *Neka je $A : V \to W$ linearan operator. A je injekcija ako i samo ako je $\operatorname{Ker} A = \{0\}$ (tj. ako i samo ako je $d(A) = 0$).*

Dokaz: Neka je A injekcija. Zbog $A0 = 0$ više nitko drugi ne može biti u jezgri. Obratno, neka je $\operatorname{Ker} A = \{0\}$ i $Ax = Ay$. Tada je $Ax - Ay = 0 \Rightarrow A(x - y) = 0 \Rightarrow x - y \in \operatorname{Ker} A = \{0\} \Rightarrow x - y = 0$. $\square$

Propozicija 1.8. *Neka je $A : V \to W$ linearan operator. A je injekcija ako i samo ako je za svaki linearno nezavisan skup S u V skup $A(S) = \{Ax : x \in S\}$ linearno nezavisan u W.*

Dokaz: Neka je A injekcija i neka je skup $\{x_1, \ldots, x_k\}$ linearno nezavisan u V. Tada imamo: $\sum_{i=1}^{k} \alpha_i A x_i = 0 \Rightarrow A(\sum_{i=1}^{k} \alpha_i x_i) = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{k} \alpha_i x_i \in \operatorname{Ker} A = \{0\} \Rightarrow \sum_{i=1}^{k} \alpha_i x_i = 0 \Rightarrow \alpha_i = 0, \forall i = 1, \ldots, k$.

Obratno, neka A nije injekcija. Tada prema prethodnoj propoziciji postoji $x \in \operatorname{Ker} A$, $x \neq 0$. Tada je skup $\{x\}$ linearno nezavisan, no $\{Ax\} = \{0\}$ je (trivijalno) zavisan. $\square$

Teorem 1.9. *(O rangu i defektu)*
Neka je $A : V \to W$ linearan operator i $\dim V < \infty$. Tada je $r(A) + d(A) = \dim V$.

Dokaz: Ako je A injekcija, teorem je već dokazan. Naime, za bazu $\{b_1, \ldots, b_n\}$ od V skup $\{Ab_1, \ldots, Ab_n\}$ je, zbog Napomene 1.6 i Propozicije 1.8, baza za $\operatorname{Im} A$. Dakle je $\mathrm{r}(A) = \dim V$. S druge strane, $\mathrm{d}(A) = 0$ prema Propoziciji 1.7.

Ako pak A nije injekcija stavimo $\mathrm{d}(A) = d > 0$ i odaberimo neku bazu $\{e_1, \ldots, e_d\}$ za $\operatorname{Ker} A$. Ovaj linearno nezavisan skup nadopunimo do baze $\{e_1, \ldots, e_d, e_{d+1}, \ldots, e_n\}$ za V. Sada je prema Napomeni 1.6 i skup slika $\{Ae_1, \ldots, Ae_d, Ae_{d+1}, \ldots, Ae_n\}$ sistem izvodnica za $\operatorname{Im} A$, specijalno je i $\{Ae_{d+1}, \ldots, Ae_n\}$ sistem izvodnica za $\operatorname{Im} A$. No taj skup je i baza za $\operatorname{Im} A$!

Zaista, $\sum_{d+1}^{n} \alpha_i A e_i = 0 \Rightarrow A(\sum_{d+1}^{n} \alpha_i e_i) = 0 \Rightarrow \sum_{d+1}^{n} \alpha_i e_i \in \operatorname{Ker} A$. Međutim, jer je $\sum_{d+1}^{n} \alpha_i e_i \in [\{e_{d+1}, \ldots, e_n\}]$ i jer je taj potprostor očito direktan komplement za $\operatorname{Ker} A$, mora biti $\sum_{d+1}^{n} \alpha_i e_i = 0$, a odavde je $\alpha_i = 0$, $\forall i = d+1, \ldots, n$.

Dakle je $\mathrm{r}(A) = n - d = n - \mathrm{d}(A)$. □

Definicija 1.10. *Linearan operator $A : V \to W$ se naziva:*
- monomorfizam ako je A injekcija,
- epimorfizam ako je A surjekcija,
- izomorfizam ako je A bijekcija.

Propozicija 1.11. *Neka su $A : V \to W$ i $B : W \to X$ linearni operatori. Tada je i $BA : V \to X$ linearan operator. Posebno, kompozicija dva monomorfizma (epimorfizma, izomorfizma) je opet monomorfizam (epimorfizam, izomorfizam).*

Dokaz: $BA(\alpha x + \beta y) = B(\alpha Ax + \beta Ay) = \alpha BAx + \beta BAy$. □

Propozicija 1.12. *Neka je $A : V \to W$ linearan operator i neka je $\dim V = \dim W < \infty$. Sljedeći uvjeti su međusobno ekvivalentni:*
(1) A je monomorfizam.
(2) A je epimorfizam.
(3) A je izomorfizam.

Dokaz: (1) $\Rightarrow$ (2): $\mathrm{d}(A) = 0$ i $\mathrm{r}(A) + \mathrm{d}(A) = \dim V = \dim W$ povlači $\mathrm{r}(A) = \dim W$, dakle je $\operatorname{Im} A = W$ i A je i surjekcija.

(2) $\Rightarrow$ (3): $\operatorname{Im} A = W$, tj. $\mathrm{r}(A) = \dim W = \dim V$ povlači $\mathrm{d}(A) = \dim V - \mathrm{r}(A) = 0$ pa je prema Propoziciji 1.7 A injekcija. □

Uočimo analogiju tvrdnje gornje propozicije sa svojstvom funkcija koje su definirane na konačnim skupovima. Tipično, gornja propozicija se primjenjuje na operatore $A : V \to V$. U toj situaciji je pretpostavka $\dim V = \dim W$ automatski ispunjena pa je suvišna. No tada se možemo pitati da li ista tvrdnja vrijedi i ako prostor V ne bi bio konačnodimenzionalan. Međutim, ne! Protuprimjeri su lijevi i desni šift na prostoru $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ (to su operatori navedeni kao posljednja dva među našim primjerima).

Propozicija 1.12 nam omogućuje da sada karakteriziramo izomorfizme.

Propozicija 1.13. *Neka je $A : V \to W$ linearan operator i neka je $\dim V = n < \infty$. Sljedeće tvrdnje su međusobno ekvivalentne:*

(1) A je izomorfizam.
(2) Za svaku bazu $\{b_1, \dots b_n\}$ od V skup $\{Ab_1, \dots Ab_n\}$ je baza za W.
(3) Postoji baza $\{e_1, \dots e_n\}$ od V takva da je $\{Ae_1, \dots Ae_n\}$ baza za W.

Dokaz: (1) $\Rightarrow$ (2): Uzmimo bilo koju bazu $\{b_1, \dots b_n\}$ od V. Prema Napomeni 1.6 skup $\{Ab_1, \dots Ab_n\}$ je sistem izvodnica za $\operatorname{Im} A = W$, a prema Propoziciji 1.8 taj je skup i linearno nezavisan.

(3) $\Rightarrow$ (1): Ako vrijedi (3) onda je posebno $\dim V = \dim W$. S druge strane, (3) povlači i da je A surjekcija. Sad djeluje Propozicija 1.12. $\square$

Definicija 1.14. *Neka su V i W vektorski prostori nad istim poljem. Kažemo da je V izomorfan s W (i pišemo $V \simeq W$) ako postoji izomorfizam $A : V \to W$.*

Propozicija 1.15. *Neka su V i W konačnodimenzionalni prostori nad istim poljem. Tada je $V \simeq W$ ako i samo ako vrijedi $\dim V = \dim W$. Posebno, izomorfnost prostora je relacija ekvivalencije.*

Dokaz: $V \simeq W$ odmah po Propoziciji 1.13 povlači $\dim V = \dim W$.

Obratno, ako je $\dim V = \dim W = n$ onda možemo odabrati bazu $\{e_1, \dots, e_n\}$ za V i $\{f_1, \dots, f_n\}$ za W; bitno je da obje imaju točno n elemenata. Prema Propoziciji 1.3 možemo naći operator $A : V \to W$ takav da je $Ae_i = f_i$, $\forall i = 1, \dots, n$. Propozicija 1.13 jamv ci da je A izomorfizam. $\square$

Napomena 1.16. Striktno govoreći, dokazali smo da je izomorfnost relacija ekvivalencije samo kad se govori o konačnodimenzionalnim prostorima jer smo u gornjem dokazu bitno koristili Teorem o rangu i defektu, odnosno njegove neposredne posljedice.

Tvrdnja, međutim vrijedi i općenito. To je zato što se i bez pozivanja na jednakost dimenzija može direktno dokazati da je $\simeq$ simetrična relacija. Vrijedi, naime ova i sama po sebi korisna činjenica:

Ako je $A : V \to W$ izomorfizam onda je i inverzno preslikavanje $A^{-1} : W \to V$ linearno preslikavanje, dakle izomorfizam. (Vježbe.)

Napomena 1.17. Ako je $A : V \to V$ linearan i bijektivan češće se kaže da je A regularan ili invertibilan operator. Termin izomorfizam je rezerviran za operatore između različitih prostora. Operator $A \in L(V)$ koji nije regularan zvat ćemo singularnim.

Zamislimo sada da za operatore $A, B : V \to V$, $\dim V < \infty$ vrijedi $AB = I$. Tada su oba operatora regularna i vrijedi $A = B^{-1}$ i onda i $A^{-1} = B$.

Zaista, iz $AB = I$ slijedi da je B injekcija. Prema Propoziciji 1.12 zato je regularan i ako na relaciju $AB = I$ djelujemo s desne strane s B^{-1} dobivamo $A = B^{-1}$.

Uočimo da je u ovom računu zaista opet bilo presudno da je $\dim V < \infty$. Naime, ako je $\dim V = \infty$ tvrdnja ne vrijedi; protuprimjer opet predstavljaju operatori lijevog i desnog pomaka na $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Vratimo se izomorfizmima, tj. bijektivnim linearnim operatorima $A : V \to W$ između različitih prostora. Svaki izomorfizam na izvjestan način identificira ove prostore i omogućuje da informacije iz jednog "vjerno" prenesemo u drugi. Naime, izomorfizmi čuvaju nezavisnost, dimenzije i sve linearne informacije. Na primjer, za svaki konačan skup vektora $\{v_1, \ldots, v_m\}$ u V vrijedi $\dim[\{Av_1, \ldots, Av_m\}] = \dim[\{v_1, \ldots, v_m\}]$ - ova informacija će se pokazati korisnom kod proučavanja matričnih prikaza linearnih operatora.

Imamo li dakle vektorske prostore nad istim poljem jednakih dimenzija, ti se prostori u apstraktnom smislu mogu smatrati jednakima i shvaćati kao dvije konkretne realizacije (dva modela) jedne te iste stvari. Pritom bismo za standardne modele, tj. reprezentante odgovarajućih klasa ekvivalencije međusobno izomorfnih prostora mogli uzeti prostore $\mathbb{R}^n$ i $\mathbb{C}^n$.

Razmišljajući na taj način mogli bismo doći na pomisao da napustimo razmatranje općih vektorskih prostora i usredotočimo se samo na $\mathbb{R}^n$ i $\mathbb{C}^n$ za $n \in \mathbb{N}$. No to bi bila jako loša ideja zbog barem dva razloga.

Prvo, kad imamo neki prostor V, $\dim V = n$, mi nemamo (a priori) izomorfizam $A : V \to \mathbb{R}^n(\mathbb{C}^n)$; dakle morali bismo ga konstruirati. Kad se malo razmisli i uzmu u obzir Propozicije 1.3 i 1.13 to zapravo znači da bismo morali fiksirati jednu bazu u V i od sada na dalje o njoj bismo bili ovisni. Svi rezultati koji bi bili dobiveni u $\mathbb{R}^n(\mathbb{C}^n)$ i "povučeni natrag" u V bili bi izraženi u toj, fiksiranoj bazi. Ovo se pokazuje jako nepraktičnim; kasnije ćemo vidjeti da je upravo mogućnost promjene baze važna okolnost, odnosno ideja u rješavanju mnogih problema.

Drugo, razni vektorski prostori imaju i neka druga korisna svojstva, ili svoju intuiciju koju $\mathbb{R}^n$ ili $\mathbb{C}^n$ možda ne posjeduju. "Pretvaranjem" prostora V u $\mathbb{R}^n(\mathbb{C}^n)$ svaka bi se intuicija mogla izgubiti, a pojmovi i koncepti prisutni u V, a nevezani za linearnu strukturu, mogli bi postati neprirodni i nepraktični. Na primjer: kako bismo zamišljali produkt ili inverz ili rang matrica kad bismo ih pisali kao uređene n^2-torke?

5.2. Prostor linearnih operatora

Kad su V i W vektorski prostori nad istim poljem možemo promatrati skup $L(V, W)$ svih linearnih operatora sa V u W. Taj je skup uvijek neprazan jer je naravno nul-operator jedan njegov element. Ali, zapravo je $L(V, W)$ vrlo bogat; to nam naime jamči Propozicija 1.3.

Plan nam je i $L(V, W)$ opskrbiti strukturom vektorskog prostora.

Definicija 2.1. *Neka su V i W vektorski prostori nad istim poljem F.*

Za $A, B \in L(V, W)$ definira se $A + B : V \to W$ s $(A + B)x = Ax + Bx$.

Za $A \in L(V, W)$ i $\alpha \in F$ definira se $\alpha A : V \to W$ s $(\alpha A)x = \alpha Ax$.

Ove operacije se nazivaju zbrajanje po točkama i množenje skalarima po točkama. Uz njih uređena trojka $(L(V, W), +, \cdot)$ postaje kandidat za vektorski prostor nad poljem F.

Teorem 2.2. *Neka su V i W vektorski prostori nad poljem F. Tada je i $L(V, W)$ vektorski prostor nad F.*

Dokaz: Prvi posao je dokazati da je $+$ iz Definicije 2.1 zaista binarna operacija na $L(V, W)$, tj. da je preslikavanje $A + B$ linearno:

$(A+B)(\alpha x+\beta y) = A(\alpha x+\beta y)+B(\alpha x+\beta y) = \alpha Ax+\beta Ay+\alpha Bx+\beta By = \alpha(Ax + Bx) + \beta(Ay + By) = \alpha(A + B)x + \beta(A + B)y \Rightarrow A + B \in L(V, W)$.

Sasvim analogno se vidi da je $\alpha A \in L(V, W)$.

Sad se direktnom provjerom pokaže da ove operacije imaju sva potrebna svojstva iz definicije vektorskog prostora. "Nul-vektor" je ovdje nul-operator, a operator suprotan operatoru A je $-A$ koji djeluje po pravilu $(-A)x = -(Ax)$. $\square$

Teorem 2.3. *Neka su V i W konačnodimenzionalni vektorski prostori nad istim poljem. Tada je $\dim L(V, W) = \dim V \cdot \dim W$.*

Dokaz: Označimo $\dim V = n$ i $\dim W = m$ i fiksirajmo u njima baze; neka je $\{e_1, \ldots, e_n\}$ baza za V, a $\{f_1, \ldots, f_m\}$ baza za W.

Definirat ćemo nm operatora iz $L(V, W)$ i pokazati da će oni činiti bazu. Za $1 \leq j \leq n$ i $1 \leq i \leq m$ definirajmo operatore $E_{ij} \in L(V, W)$ pomoću

Propozicije 1.3: $E_{ij}e_k = \begin{cases} 0, & k \neq j \\ f_i, & k = j \end{cases}$, dakle $E_{ij}e_k = \delta_{jk}f_i$, $k = 1, \ldots, n$. Dokažimo da je skup $\{E_{ij} : 1 \leq j \leq n,\ 1 \leq i \leq m\}$ baza za $L(V, W)$.

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} \lambda_{ij}E_{ij} = 0 \Rightarrow (\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} \lambda_{ij}E_{ij})(e_k) = 0,\ \forall k \Rightarrow$$

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} \lambda_{ij}E_{ij}e_k = 0,\ \forall k \Rightarrow \sum_{i=1}^{m} \lambda_{ik}f_i = 0,\ \forall k \Rightarrow \lambda_{ik} = 0,\ \forall i, k.$$

Dalje, neka je $T \in L(V, W)$ bilo koji operator. Želimo T prikazati u obliku $T = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} \lambda_{ij}E_{ij}$, dakle odrediti, ako se može prikladne λ_{ij}. Zbog Propozicije 1.3 za ovu jednakost je nužno i dovoljno da ta dva operatora jednako djeluju na (nekoj) bazi od V. Pritom za $1 \leq k \leq n$ istim računom kao gore nalazimo $(\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} \lambda_{ij}E_{ij})e_k = \sum_{i=1}^{m} \lambda_{ik}f_i$.

S druge strane, Te_k su nam poznati vektori ako je T zadan; pišimo $Te_k = \sum_{i=1}^{m} \alpha_{ik}f_i$, $\forall k = 1, \ldots, n$. Treba dakle uzeti $\lambda_{ik} = \alpha_{ik}$, $\forall i, k$. □

Razmotrimo još specijalan slučaj $V = W$. Ovdje ćemo pisati $L(V, V) = L(V)$. Naravno, $\dim L(V) = n^2$.

Međutim, sam prostor $L(V)$ ima i dodatnu strukturu. U Propoziciji 1.11 smo vidjeli da je kompozicija dva linearna operatora opet linearan operator (kad god je ta kompozicija definirana). U ovom slučaju dobili smo još jednu binarnu operaciju na $L(V)$. Često umjesto $A \circ B$ pišemo jednostavno AB, a onda često i kažemo da se radi o množenju operatora.

Propozicija 2.4. *Neka je V vektorski prostor. Za skup $L(V)$ vrijedi:*
(1) $L(V)$ je vektorski prostor.
(2) $\forall A, B \in L(V)$ $AB \in L(V)$.
(3) $A(BC) = (AB)C$, $\forall A, B, C \in L(V)$.
(4) $A(B + C) = AB + AC$, $(A + B)C = AC + BC$, $\forall A, B, C \in L(V)$.
(5) $(\alpha A)B = \alpha(AB) = A(\alpha B)$, $\forall \alpha \in F$, $\forall A, B \in L(V)$.
(6) $\exists I \in L(V)$ takav da je $AI = IA = A$, $\forall A \in L(V)$.

Dokaz: (1) je dokazano u Teoremu 2.2, (2) u Propoziciji 1.11, (3) je opća činjenica, (6) je trivijalno, a (4) i (5) je lagano. □

Primijetimo da je isti sadržaj Korolara 3.1.7 za $M_n(F)$. Vidimo dakle da $L(V)$ i M_n imaju identične strukture - to su vektorski prostori s dodatnim operacijama i dodatnim svojstvima (2)-(6) kao gore. Već tada, nakon

Korolara 3.1.7, smo rekli da se takva struktura zove asocijativna algebra s jedinicom (ili samo algebra). Kad je $\dim V = n$ onda su $L(V)$ i M_n jednakih dimenzija, pa su zato prema Propoziciji 1.15 izomorfni kao vektorski prostori. No u ovom slučaju htjet ćemo i više: izomorfizam koji bi čuvao i množenje. Takav izomorfizam algebri ćemo uspostaviti u Korolaru 4.6.

5.3. Dualni prostor

Prostor operatora $L(V)$ opisan u prethodnoj točki bio je specijalan slučaj prostora $L(V, W)$. Ovdje nas zanima jedan drugi specijalan slučaj: $W = F$ pri čemu je V vektorski prostor upravo nad F.

Promatrat ćemo dakle linearne operatore $f : V \to F$; takvi operatori su također važni i prirodno se pojavljuju (primjer: $\mathrm{tr} : M_n(F) \to F$).

Definicija 3.1. *Neka je V vektorski prostor nad poljem F. Vektorski prostor $L(V, F)$ se zove dualni prostor prostora V, označava se s V^*, a njegovi elementi - linearni operatori s V u F - se zovu linearni funkcionali.*

Često se kratko kaže samo funkcional. Sve što je općenito rečeno o linearnim operatorima vrijedi i ovdje. Radi budućeg pozivanja zabilježit ćemo dvije takve direktne posljedice prethodnih razmatranja.

Propozicija 3.2. *Neka je V vektorski prostor nad poljem F, $\dim V = n < \infty$ i $f \in V^*$, $f \neq 0$. Tada je $r(f) = 1$ i $d(f) = n - 1$.*

Propozicija 3.3. *Neka je V vektorski prostor nad poljem F, $\dim V = n < \infty$. Tada je $\dim V^* = n$.*

Ovdje je korisno ponoviti dokaz Teorema 2.3 no ne zbog dokaza; Propozicija 3.3 je, kao specijalni slučaj tog teorema, već dokazana.

Odaberimo bazu za V, npr. $\{e_1, \ldots, e_n\}$, odaberimo bazu za F - no ovdje ne proizvoljnu, nego najjednostavniju: $\{1\}$. Sad nam trebaju operatori (ovdje ih zovemo funkcionalima) E_{ij}. Primijetimo da je u dokazu Teorema 2.3 bilo $i = 1, 2, \ldots, m = \dim W$. Ovdje jedina vrijednost indeksa i iznosi $i = 1$, a to onda znači da nam taj indeks niti ne treba. Dobivene funkcionale sada možemo označiti s e_j^*, $j = 1, \ldots, n$. Vrijedi $e_j^*(e_k) = \begin{cases} 0, & k \neq j \\ 1, & k = j \end{cases}$, dakle $e_j^*(e_k) = \delta_{jk}\ \forall j, k = 1, \ldots, n$.

Sad znamo da je skup $\{e_1^*, \ldots, e_n^*\}$ baza dualnog prostora V^* (sve je već dokazano u Teoremu 2.3). Ta se baza zove dualna baza bazi $\{e_1, \ldots, e_n\}$.

Vratimo se prošloj propoziciji. Kako je $\dim V = \dim V^* = n$, to su prema Propoziciji 1.15 ovi prostori izomorfni. Izomorfizam je sad lako konstruirati:

uzme se neka baza $\{e_1, \ldots, e_n\}$ za V, njoj dualna baza $\{e_1^*, \ldots, e_n^*\}$ za V^*, definira se operator $A : V \to V^*$ s $Ae_j = e_j^*$, $j = 1, \ldots, n$ i sad Propozicija 1.13 jamči da je to izomorfizam.

Problem je međutim u tome što za definiranje ovog izomorfizma moramo unaprijed odabrati neku bazu u V. Već smo rekli da to nerado činimo. Htjeli bismo naći neki izomorfizam $V \to V^*$ koji bi bio zadan nekako prirodno, možda nekom formulom; svakako bismo željeli da bude neovisan o nekom prethodnom izboru baze u V. Međutim, to se ne može.

Ali: primijetimo da možemo gledati i dualni prostor dualnog prostora, $(V^*)^* = V^{**}$. To je već malo teže zamišljati jer elementi su mu linearni funkcionali koji linearne funkcionale definirane na V preslikavaju u polje.

Olakotnu okolnost predstavljaju dvije činjenice. Prvo, $\dim V^{**} = \dim V^* = \dim V = n$ pa su svi ovi prostori međusobno izomorfni. Drugo, elemente iz $\dim V^{**}$ znamo proizvoditi. Standardno to činimo ovako: uzmimo i fiksirajmo $x \in V$ i definirajmo funkciju $\hat{x} : V^* \to F$ s $\hat{x}(f) = f(x)$. Tvrdimo da je $\hat{x}$ linearno, tj. $\hat{x} \in V^{**}$. Zaista, $\hat{x}(\alpha f + \beta g) = (\alpha f + \beta g)(x) =$ (po definiciji operacija u $L(V, W)$, specijalno u V^*) $= \alpha f(x) + \beta g(x) = \alpha \hat{x}(f) + \beta \hat{x}(g)$.

Dakle, za proizvoljan $x \in V$ preslikavanje $\hat{x}$ pripada prostoru V^{**}.

Teorem 3.4. *Neka je V konačnodimenzionalan vektorski prostor nad F. Preslikavanje $\phi : V \to V^{**}$ definirano s $\phi(x) = \hat{x}$ je izomorfizam vektorskih prostora.*

Dokaz: Upravo smo vidjeli da je ϕ dobro definirano. Dokažimo da je i linearno: u stvari treba vidjeti da su $\phi(\alpha x + \beta y) = (\alpha x + \beta y)\hat{}$ i $\alpha\phi(x) + \beta\phi(y) = \alpha\hat{x} + \beta\hat{y}$ jednake funkcije. To je međutim trivijalno: ove dvije funkcije djeluju jednako na svakom funkcionalu $f \in V^*$ upravo zato što je f linearan.

Sad ćemo dokazati da je ϕ monomorfizam, tj. injektivan. Prije toga uočimo da će time dokaz biti završen zbog $\dim V = \dim V^* < \infty$ i Propozicije 1.12.

Treba dakle vidjeti da je $\operatorname{Ker} \phi = \{0\}$. Uzmimo $x \in \operatorname{Ker} \phi$. Tada je $\phi(x) = \hat{x} = 0 \in V^{**}$. To znači da je $\hat{x}(f) = f(x) = 0$, $\forall f \in V^*$. Možemo li sada zaključiti da je $x = 0$? Da! $\square$

Propozicija 3.5. *Neka je V vektorski prostor, $\dim V = n < \infty$ i neka je $x \in V$ takav da vrijedi $f(x) = 0$, $\forall f \in V^*$. Tada je $x = 0$.*

Dokaz: Uzmimo suprotno: $x \neq 0$. Sad linearno nezavisan skup $\{x\}$ nadopunimo do baze $\{x, e_2, \ldots, e_n\}$ za V, uzmemo dualnu bazu $\{x^*, e_2^*, \ldots, e_n^*\}$ i uočimo da $x^*(x) = 1$ daje kontradikciju. $\square$

Napomena 3.6. Kad je riječ o dualnoj bazi onda je logično imati oznake $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ i $\{e_1^*, e_2^*, \ldots, e_n^*\}$ i logično je ovu drugu bazu zvati dualnom prvoj. Međutim, ne bi bilo dobro govoriti da je (u nekom apsolutnom smislu) vektor e_1^* dualan vektoru e_1, vektor e_2^* dualan drugom, itd. Naime, ako bismo tako pridruživali vektor vektoru (funkcionalu), onda bismo izgubili informaciju o kontekstu, a taj je ovdje važan kako pokazuje sljedeći primjer.

Primjer. U $\mathbb{R}^2$ gledamo $\{e_1, e_2\}$, $e_1 = (1, 0), e_2 = (0, 1)$ i dualnu bazu $\{e_1^*, e_2^*\}$. Znamo da je $e_1^*(e_1) = 1$ i $e_1^*(e_2) = 0$; dakle je $e_1^*(x_1, x_2) = x_1$.

Uzmimo sad bazu $\{e_1, a\}$, $e_1 = (1, 0), a = (1, -1)$ i dualnu bazu $\{e_1^*, a^*\}$. Ovdje je $e_1^*(e_1) = 1$ i $e_1^*(a) = 0$ i odavde $e_1^*(x_1, x_2) = e_1^*((x_1 + x_2)e_1 - x_2 a) = x_1 + x_2$.

Napomena 3.7. Kako izgledaju linearni funkcionali na $\mathbb{R}^n$?

Jasno je: ako odaberemo $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ onda je s $f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i$ definiran jedan linearan funkcional na $\mathbb{R}^n$. No, zapravo je ovo opći oblik linearnih funkcionala na $\mathbb{R}^n$.

Da to pokažemo fiksirajmo kanonsku bazu $\{e_1, \ldots, e_n\}$ u $\mathbb{R}^n$. Ako je zadan $f \in (\mathbb{R}^n)^*$, a time i brojevi $f(e_1) = \alpha_1, \ldots, f(e_n) = \alpha_n$ onda odmah slijedi $f(x_1, \ldots, x_n) = f(\sum_{i=1}^n x_i e_i) = \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i$.

Također se može zaključiti da ovdje zapravo vrijedi $f = \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i^*$.

Odavde se može izvesti i opći oblik linearnih operatora $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$.

Napomena 3.8. *Neka je $A \in L(V, W)$. Možemo gledati tzv. dualni operator $A^* \in L(W^*, V^*)$ definiran formulom $A^* f = fA$. Prvo se uoči da je $A^* f = fA \in V^*$ (očito), a onda i da je A^* linearan operator. Zovemo ga dualnim operatorom operatoru A. Tako smo dobili preslikavanje $L(V, W) \to L(W^*, V^*)$ definirano s $A \mapsto A^*$ i sad se lako vidi da je to izomorfizam vektorskih prostora. Također vrijedi $(AB)^* = B^* A^*$ kad god se A i B mogu komponirati; npr. kad je $A, B \in L(V)$.*

Dalje, ako je $\dim V, \dim W < \infty$ tvrdimo da je $r(A) = r(A^*)$. Zaista; neka je $\{e_1, \ldots, e_r, e_{r+1}, \ldots e_n\}$ baza za V takva da je $\{Ae_1, \ldots, Ae_r\}$ baza za $\operatorname{Im} A$ i da je $Ae_{r+1} = 0, \ldots, Ae_n = 0$ (to se može učiniti točno kao u dokazu Teorema o rangu i defektu). Implicitno smo dakle stavili $r(A) = r$.

Sad za $i = 1, \ldots, r$ označimo $Ae_i = f_i$, uzmemo nezavisan skup $\{f_1, \ldots, f_r\}$ i nadopunimo ga do baze $\{f_1, \ldots, f_r, f_{r+1}, \ldots f_m\}$ za W. Uzmimo još dualnu bazu $\{f_1^*, \ldots, f_r^*, f_{r+1}^*, \ldots f_m^*\}$ za W^*. Napomena 1.6 pokazuje da je skup

$\{A^*f_1^*, \ldots, A^*f_r^*, A^*f_{r+1}^*, \ldots A^*f_m^*\}$ *sistem izvodnica za* $\operatorname{Im} A^*$. *Međutim, trivijalno za* $j > r$ *uočavamo* $A^*f_j^* = f_j^*A = 0$ *i preostaje samo pokazati da je skup* $\{A^*f_1^*, \ldots, A^*f_r^*\}$ *linearno nezavisan.*

Zaista, $\sum_{i=1}^r \alpha_i A^*f_i^* = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^r \alpha_i f_i^* A = 0 \Rightarrow (\sum_{i=1}^r \alpha_i f_i^*)A = 0$. *Ovim funkcionalom sad djelujemo na vektor* e_j *za proizvoljan* $j = 1, \ldots, r$ *pa dobivamo:* $(\sum_{i=1}^r \alpha_i f_i^*)Ae_j = 0$ *s jedne, i* $(\sum_{i=1}^r \alpha_i f_i^*)f_j = \alpha_j$ *s druge strane.*

5.4. Koordinatizacija

Ovdje ćemo detaljno proučiti postupak pridruživanja matrica vektorima i operatorima. Svi prostori će biti konačnodimenzionalni, a baze ćemo tipično označavati kao $(e) = \{e_1, \ldots, e_n\}$ i podrazumijevat ćemo da su baze uređene.

Neka je V vektorski prostor nad F i neka je $(e) = \{e_1, \ldots, e_n\}$ neka baza za V. Svaki vektor $v \in V$ ima jedinstven prikaz oblika $v = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i$. Sad možemo formirati jednostupčanu matricu $v(e) = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} \in F^n$ koja se zove matrični prikaz (zapis) vektora v u bazi (e).

Propozicija 4.1. *Neka je V vektorski prostor nad F i neka je $(e) = \{e_1, \ldots, e_n\}$ neka baza za V. Preslikavanje $\varphi : V \to F^n$, $\varphi(v) = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}$ (pri čemu je $v = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i$) je izomorfizam.*

Dokaz: φ je očito linearan operator i $\operatorname{Ker} \varphi = \{0\}$. $\square$

Zamislimo sada da je dan $A \in L(V, W)$, te da su zadane baze $(e) = \{e_1, \ldots, e_n\}$ i $(f) = \{f_1, \ldots, f_m\}$ za V, odnosno W. Sjetimo se da A potpuno određen svojim djelovanjem na bazi: ako znamo $Ae_1, \ldots, Ae_n$, onda znamo kompletno djelovanje operatora A. S druge strane, vektore $Ae_1, \ldots, Ae_n \in W$ možemo pisati u obliku $Ae_j = \sum_{i=1}^{m} \alpha_{ij} f_i,\ j = 1, \ldots, n$.

Dobivene koeficijente možemo složiti u matricu kako nalažu njihovi indeksi: $A(f, e) = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \ldots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \ldots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \ldots & \alpha_{mn} \end{bmatrix} \in M_{mn}(F)$. Dobivena matrica se zove matrični prikaz (zapis) operatora A u paru baza (e) i (f). Primijetimo da je j-ti stupac matrice $A(f, e)$ zapravo $Ae_j(f)$, $\forall j = 1, \ldots, n$.

Propozicija 4.2. *Neka su V i W vektorski prostori nad istim poljem F, neka su $(e) = \{e_1, \ldots, e_n\}$ i $(f) = \{f_1, \ldots, f_m\}$ baze za V, odnosno W. Preslikavanje $\psi : L(V, W) \to M_{mn}(F)$, $\psi(A) = A(f, e)$ (pri čemu je $Ae_j = \sum_{i=1}^{m} \alpha_{ij} f_i,\ \forall j = 1, \ldots, n$) je izomorfizam.*

Dokaz: ψ je očito linearan operator i $\operatorname{Ker}\psi = \{0\}$. $\square$

Primijetimo inverziju u označavanju: u $A(f,e)$ prvo navodimo bazu kodomene (f), a tek onda bazu domene (e).

Također, možemo uočiti da su koeficijenti u matrici $A(f,e)$ upravo oni koeficijenti koji operatoru A pripadaju u bazi $\{E_{ij} : 1 \leq i \leq m,\ 1 \leq j \leq n\}$ iz dokaza Teorema 2.3. Korisno je i primijetiti kako izgledaju matrice $E_{ij}(f,e)$.

Preslikavanje ψ ima još tri korisna svojstva.

Propozicija 4.3. *Neka su $(e) = \{e_1, \ldots, e_n\}$ i $(f) = \{f_1, \ldots, f_m\}$ baze vektorskih prostora V i W, neka je $x \in V$ i neka je $A \in L(V,W)$. Tada je $Ax(f) = A(f,e)x(e)$.*

Dokaz: Stavimo $A(f,e) = (\alpha_{ij}) \in M_{mn}$ i $x(e) = (\lambda_i) \in M_n$. Sada je $Ax = A(\sum_{j=1}^n \lambda_j e_j) = \sum_{j=1}^n \lambda_j A e_j = \sum_{j=1}^n \lambda_j \sum_{i=1}^m \alpha_{ij} f_i = \sum_{i=1}^m (\sum_{j=1}^n \alpha_{ij}\lambda_j) f_i$. Unutrašnja suma je i-ta komponenta u $Ax(f)$, a to je upravo i umnožak i-tog retka u $A(f,e)$ i stupca $x(e)$. $\square$

Propozicija 4.4. *Neka su $(e) = \{e_1, \ldots, e_n\}$ i $(f) = \{f_1, \ldots, f_m\}$ baze vektorskih prostora V i W i neka je $A \in L(V,W)$. Tada je $r(A) = r(A(f,e))$.*

Dokaz: Kako je prema Napomeni 1.6 skup $\{Ae_1, \ldots, Ae_n\}$ sistem izvodnica za $\operatorname{Im} A$, to je $\operatorname{Im} A = [\{Ae_1, \ldots, Ae_n\}]$ pa je po definiciji $\mathrm{r}(A) = \dim(\operatorname{Im} A) = \dim[\{Ae_1, \ldots, Ae_n\}]$.

U drugu ruku, sjetimo se da su stupci od $A(f,e)$ upravo $Ae_1(f), \ldots, Ae_n(f)$. Zato je, po definiciji $\mathrm{r}(A(f,e)) = \dim[\{Ae_1(f), \ldots, Ae_n(f)\}]$.

Spomenute dvije linearne ljuske zapravo su korespondentni potprostori pri izomorfizmu $\varphi : W \to F^m$, $\varphi(y) = y(f)$. Kako svaki izomorfizam čuva linearnu nezavisnost, a time i dimenzije korespondentnih potprostora i navedeni rangovi su jednaki. $\square$

Sljedeća propozicija sadrži još jedan ključni rezultat: komponiranje operatora je kompatibilno s matričnim množenjem. Za razliku od prethodnih svojstava, ovo je najmanje intuitivno i zato valjda najneočekivanije. Ali zapravo: sljedeća propozicija zajedno s Propozicijom 4.3 u stvari je motivirala definiciju množenja matrica. Ta je definicija zapravo "naštimana" na način da se dobiju ove tvrdnje.

Propozicija 4.5. *Neka su $(e) = \{e_1, \ldots, e_n\}$, $(f) = \{f_1, \ldots, f_m\}$ i $(g) = \{g_1, \ldots, g_l\}$ baze vektorskih prostora V, W i X, neka je $A \in L(V,W)$ i $B \in L(W,X)$. Tada je $BA \in L(V,X)$ i $BA(g,e) = B(g,f)A(f,e)$.*

Već znamo da je BA linearan operator (Propozicija 1.11). Isto tako, sve navedene matrice imaju potrebne formate pa tvrdnja ima smisla.

Neka je $A(f,e) = (\alpha_{ij}) \in M_{mn}$ i $B(g,f) = (\beta_{ij}) \in M_{lm}$. Tada je $BA(e_k) = B(Ae_k) = B(\sum_{i=1}^m \alpha_{ik} f_i) = \sum_{i=1}^m \alpha_{ik} B f_i = \sum_{i=1}^m \alpha_{ik} \sum_{j=1}^l \beta_{ji} g_j = \sum_{j=1}^l (\sum_{i=1}^m \beta_{ji}\alpha_{ik}) g_j$.

Skalar u zagradi po definiciji stoji u j-tom retku i k-tom stupcu matrice $BA(g,e)$, a očito je to upravo i umnožak j-tog retka od $B(g,f)$ i k-tog stupca od $A(f,e)$. $\square$

Sve do sada rečeno vrijedi i za operatore iz $L(V)$. Uočimo: kad imamo operator $A \in L(V)$ tad nam za formiranje njegove matrice nisu potrebne dvije baze - po jedna za domenu i kodomenu. Ovdje je dovoljna jedna baza $\{e_1, \ldots, e_n\}$ prostora V i tada gledamo $A(e,e)$ što kraće zapisujemo kao $A(e)$.

Rekapitulirajmo: $\psi : L(V) \to M_n$, $\psi(A) = A(e)$, $A(e) = (\alpha_{ij})$ pri čemu je $Ae_j = \sum_{i=1}^n \alpha_{ij} e_i$ je izomorfizam iz Propozicije 4.2. Još primijetimo da je $\psi(I) = I$, te da u ovom slučaju formula iz Propozicije 4.5 glasi $BA(e) = B(e)A(e)$; drugim riječima, vrijedi $\psi(BA) = \psi(B)\psi(A)$.

Korolar 4.6. *Neka je V vektorski prostor nad F i neka je $(e) = \{e_1, \ldots, e_n\}$ baza za V. Tada je $\psi : L(V) \to M_n(F)$, $\psi(A) = A(e)$ izomorfizam vektorskih prostora za koji još vrijedi $\psi(BA) = \psi(B)\psi(A)$, $\forall A, B \in L(V)$ i $\psi(I) = I$. Drugim riječima, ψ je izomorfizam algebri.*

Korolar 4.7. *Neka je V vektorski prostor nad F i neka je $(e) = \{e_1, \ldots, e_n\}$ baza za V. Operator $A \in L(V)$ je regularan ako i samo ako je $A(e)$ regularna matrica.*

Dokaz: A je regularan ako i samo ako je (Propozicija 1.12) surjektivan, dakle ako i samo ako je $\mathrm{r}(A) = n$, a to je, prema Propoziciji 4.4 ako i samo ako je $\mathrm{r}(A(e)) = n$ što je prema Teoremu 3.3.14 ekvivalentno regularnosti matrice $A(e)$. $\square$

Ovime je zaokružen niz najvažnijih činjenica o matričnom prikazu vektora i operatora. Preostaje razmotriti što se događa ako mijenjamo baze. Precizno: u kojoj su vezi $x(e)$ i $x(e')$, te $A(f,e)$ i $A(f',e')$?

Teorem 4.8. *Neka je $A \in L(V,W)$ i neka su $(e) = \{e_1, \ldots, e_n\}$, $(e') = \{e'_1, \ldots, e'_n\}$ te $(f) = \{f_1, \ldots, f_m\}$, $(f') = \{f'_1, \ldots, f'_m\}$ po dvije baze prostora V, odnosno W. Neka su operatori $T \in L(W)$ i $S \in L(V)$ definirani na bazama (f), odnosno (e) s $Tf_i = f'_i$, $i = 1, \ldots, m$ i $Se_j = e'_j$, $j = 1, \ldots, n$. Tada je $A(f',e') = T(f)^{-1} A(f,e) S(e)$.*

Prvo uočimo da se ovdje pojavljuju dva pomoćna operatora T i S , odnosno njihove matrice $T(f)$ i $S(e)$. U njihovom definiranju smo koristili Propoziciju 1.3. Dalje, oba operatora prevode bazu u bazu - svaki u svom prostoru - pa su prema Propoziciji 1.13 oba izomorfizmi, tj. regularni operatori. Sad su prema Korolaru 4.7 matrice $T(f)$ i $S(e)$ regularne pa tvrdnja (jer spominje se $T(f)^{-1}$) ima smisla. Isto tako, i formati svih matrica u formuli su smisleni.

Sad primijetimo: kad imamo posla s operatorima iz $L(V)$ onda nam za formiranje matrice nisu potrebne dvije baze, no mi smijemo, ako baš želimo, uzeti jednu bazu u domeni, a neku drugu bazu u kodomeni. Naravno, u normalnim okolnostima to nikad ne činimo. Pogotovo to ne činimo za operator I jer je $I(e)$ jedinična matrica za svaku bazu (e); za razliku od toga, matrica $I(e, e')$ je nešto znatno kompliciranije. Međutim, upravo to se ovdje pokazuje korisnim.

Dokaz: Označimo s I_V i I_W jedinične operatore na prostorima V i W.

Pogledajmo matricu $I_V(e, e')$: u njezinom j-tom stupcu su koeficijenti koji pripadaju razvoju vektora $I_V e'_j = e'_j$ po bazi (e). Drugim rječima, u j-tom stupcu matrice $I_V(e, e')$ su koeficijenti koji pripadaju razvoju vektora $Se_j = e'_j$ po bazi (e).

Zato je $I_V(e, e') = S(e)$. Sasvim analogno se zaključi $I_W(f, f') = T(f)$.

Sam dokaz je sada direktna posljedica Propozicije 4.5: $T(f)A(f', e') = I_W(f, f')A(f', e') = (I_W A)(f, e') = A(f, e') = (AI_V)(f, e') = A(f, e)I_V(e, e')$ $= A(f, e)S(e)$. Preostaje pomnožiti s $T(f)^{-1}$. $\square$

Matrice $S(e)$ i $T(f)$ iz prethodnog dokaza su uvedene kao matrični zapisi nekih regularnih operatora. To naravno nije bilo nužno. Mogli smo ih uvesti i direktno.

Konkretno: u j-tom stupcu od $S(e)$ je upravo stupac koeficijenata koji pripadaju vektoru e'_j u bazi (e); dakle,

$$e'_j = \sum_{i=1}^{n} \lambda_{ij} e_i, \ \forall j = 1, \ldots, n, \ S(e) = \begin{bmatrix} \lambda_{11} & \ldots & \lambda_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda_{11} & \ldots & \lambda_{1n} \end{bmatrix}.$$

Matrica $S(e)$ je, znamo, regularna. Sve rečeno vrijedi i za $T(f)$.

Definicija 4.9. *Matrica $S(e)$ se naziva matrica prijelaza iz baze (e) u bazu (e').*

Prva u nizu posljedica prethodnog teorema je odgovarajuća formula za operatore iz $L(V)$. Ovdje je $W = V$ pa u Teoremu 4.8 treba uzeti $(f) = (e)$ te $(f') = (e')$ i tako dobivamo:

Korolar 4.10. *Neka je $A \in L(V)$ i neka su $(e) = \{e_1, \ldots, e_n\}$ i $(e') = \{e'_1, \ldots, e'_n\}$ dvije baze za V, neka je $S(e)$ matrica prijelaza iz baze (e) u bazu (e'). Tada je $A(e') = S(e)^{-1}A(e)S(e)$.*

Također možemo izračunati inverznu matricu matrice prijelaza.

Korolar 4.11. *Neka su $(e) = \{e_1, \ldots, e_n\}$ i $(e') = \{e'_1, \ldots, e'_n\}$ dvije baze za V, neka je $S(e)$ matrica prijelaza iz baze (e) u bazu (e'). Tada je $S(e)^{-1}$ matrica prijelaza iz baze (e') u bazu (e).*

Dokaz: Sjetimo se formule iz dokaza Teorema 4.8: $S(e) = I(e, e')$. Zato je matrica prijelaza u obratnom smjeru $S(e') = I(e', e)$. Treba dokazati da je upravo to inverz za $S(e)$. No to sad jednostavno slijedi direktnom primjenom Propozicije 4.5: $S(e)S(e') = I(e, e')I(e', e) = I(e, e) = I(e) = I$, i isto tako $S(e')S(e) = I(e', e)I(e, e') = I(e', e') = I(e') = I$. $\square$

Posljednji u nizu je korolar koji daje relaciju između matričnih prikaza vektora u dvjema raznim bazama.

Korolar 4.12. *Neka su $(e) = \{e_1, \ldots, e_n\}$ i $(e') = \{e'_1, \ldots, e'_n\}$ dvije baze za V, neka je $S(e)$ matrica prijelaza iz baze (e) u bazu (e'). Tada za svaki vektor x iz V vrijedi $x(e') = S(e)^{-1}x(e)$.*

Dokaz: Tvrdnju Propozicije 4.3 $Ax(f) = A(f, e)x(e)$ primijenit ćemo u specijalnom slučaju: $A = I_V$, $(f) = (e')$. Dobivamo $x(e') = I_V(e', e)x(e)$; još uvažimo tvrdnju prethodnog korolara i konačno imamo $x(e') = S(e')x(e)$, odnosno $x(e') = S(e)^{-1}x(e)$. $\square$

Primjer. Uzmimo $V = \mathbb{R}^2$, neka je (e) kanonska baza i $(e') = \{e'_1, e'_2\}$, $e'_1 = (2, -1), e'_2 = (-1, 1)$. Neka je operator $A \in L(\mathbb{R}^2)$ zadan s $A(x_1, x_2) = (x_1 + x_2, x_1 - x_2)$, te neka je $x = (1, 1)$.

Ovdje imamo $A(e) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ i $x(e) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ pa dobivamo $Ax(e) = A(e)x(e) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Dalje, $S(e) = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ i $S(e)^{-1} = S(e') = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ povlači $x(e') = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$.

Konačno, $A(e') = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 7 & -4 \end{bmatrix}$, pa je $(Ax)(e') = A(e')x(e') = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 7 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$.

Definicija 4.13. *Neka su $A, B \in M_n(F)$. Kažemo da je matrica B slična matrici A ako postoji regularna matrica $S \in Gl(n, F)$ takva da je $B = S^{-1}AS$.*

Primijetimo da je sličnost relacija ekvivalencije na skupu $M_n(F)$. Dalje, sličnost je specijalan slučaj ekvivalentnosti pa zato slične matrice imaju isti rang (a to je pak jasno i iz sljedećeg korolara uz pomoć Propozicije 4.4). Još uočimo da slične matrice imaju iste determinante i tragove.

Propozicija 4.14. *Neka je V konačnodimenzionalan vektorski prostor i $A \in L(V)$. Matrični prikazi operatora A u raznim bazama su slične matrice.*

Na kraju navedimo nekoliko jednostavnih napomena. Prva od njih je najvažnija.

Napomena 4.15. Često se nameće potreba za obratnim postupkom: za danu matricu naći linearan operator čiji će to biti matrični zapis u nekom paru baza (ili u nekoj bazi, ako je matrica kvadratna).

Neka je zadana matrica $A = (\alpha_{ij}) \in M_{mn}(F)$.

Uzmu se dva vektorska prostora V i W nad F tako da je $\dim V = n$ i $\dim W = m$, zatim neke baze $(e) = \{e_1, \ldots, e_n\}$ i $(f) = \{f_1, \ldots, f_m\}$ u V i W i uz pomoć Propozicije 1.3 definira se $\tilde{A} \in L(V, W)$ formulom $Ae_j = \sum_{i=1}^{m} \alpha_{ij} f_i$, $\forall j = 1, \ldots, n$.

Jasno je da vrijedi $\tilde{A}(f, e) = A$.

Uočimo još: ako je polazna matrica A kvadratna onda se može uzeti $W = V$ i $(f) = (e)$.

U cijelom postupku je malo toga jednoznačno određeno: tek dimenzije prostora W i V.

Jedan mogući (standardni) izbor bio bi uzeti operator $\tilde{A}$ kao operator množenja sa zadanom matricom A, tj. $\tilde{A} : M_{n1}(F) \to M_{m1}(F)$ zadan formulom $\tilde{A}(\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}) = A \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$.

Napomena 4.16. Neka su $A, B \in M_n(F)$ kvadratne matrice za koje vrijedi $AB = I$. Tada su obje regularne i vrijedi $A^{-1} = B$ i onda i $B^{-1} = A$. Ovo je sada sasvim direktna posljedica Napomene 1.17, prethodne napomene i Korolara 4.6.

Napomena 4.17. Neka je $AX = B$ proizvoljan sustav linearnih jednadžbi i $AX = 0$ pridružen homogeni sustav.

Uvedemo li kao u Napomeni 4.15 operator $\tilde{A}$ i analognim postupkom vektor $b \in W$ takav da je $b(f) = B$, onda se primjenom Propozicija 4.1, 4.2 i 4.3 rješavanje polaznog sustava svodi na vektorsku jednadžbu $\tilde{A}x = b$. Ovo omogućuje alternativni (i brži i elegantniji) tretman sustava. Npr. informacija o dimenziji prostora rješenja homogenog sustava dobije se sada kao direktna posljedica teorema o rangu i defektu.

Napomena 4.18. (Jednako opcionalno kao Napomena 3.8)
Neka je $A \in L(V, W)$, neka su $(e) = \{e_1, \ldots, e_n\}$ i $(f) = \{f_1, \ldots, f_m\}$ baze za V, odnosno W, neka je $A(f, e) = (\alpha_{ij}) \in M_{mn}$.

Uzmimo sada dualne prostore V^* i W^*, dualni operator $A^* \in L(W^*, V^*)$ i dualne baze $(e^*) = \{e_1^*, \ldots, e_n^*\}$ i $(f^*) = \{f_1^*, \ldots, f_m^*\}$. Neka je $A^*(e^*, f^*) = (\beta_{ij}) \in M_{nm}$. Sad se lako pokaže da u stvari vrijedi $A^*(e^*, f^*) = A(f, e)^\tau$, dakle su ove dvije matrice međusobno transponirane.

Neka je sada $A \in M_{mn}$ proizvoljna matrica. Uz pomoć Napomene 4.15 možemo naći pridruženi operator $\tilde{A}$. Kad na taj operator primijenimo tvrdnju prethodnog paragrafa, Napomenu 3.8 i Propoziciju 4.4 zaključujemo: matrica A i transponirana matrica A^τ imaju isti rang. Drugim riječima, svaka matrica ima isti broj linearno nezavisnih redaka i supaca.

5.5. Spektar

Pogledajmo matrice $A = \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ 6 & -4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 6 & -9 \\ 4 & -6 \end{bmatrix}$. Na prvi pogled se ne razlikuju mnogo. I kad im izračunamo rang ili determinantu ili trag... dvije po dvije pokazuju isto ponašanje: $\mathrm{r}(A) = \mathrm{r}(B) = 2$, $\mathrm{tr}(B) = \mathrm{tr}(C) = 0$, itd.

No ove se matrice bitno razlikuju po ponašanju svojih potencija. Npr, za šestu potenciju nalazimo: $A^6 = \begin{bmatrix} 127 & -63 \\ 126 & -62 \end{bmatrix}$, $B^6 = I$, $A^6 = 0$! U stvari, može se vidjeti da je već $B^2 = I$, $A^2 = 0$. Htjeli bismo razumjeti što se zaista događa. Po čemu se gornje matrice razlikuju iznutra?

Ovo nije samo akademsko pitanje. Postoje mnogi praktični problemi u kojima se prirodno pojavljuje izvjesna "sistemska" matrica čije potencije svojim ponašanjem određuju ponašanje promatranog procesa, odnosno strukturu rješenja problema.

Primjer: Zamislimo neki grad kojeg, zajedno s prigradskim naseljima naseljuje 1 milijun stanovnika (npr. Zagreb s okolicom). Pretpostavimo dalje da je ukupan broj stanovnika, promatraju li se grad i okolica zajedno, konstantan. Neka x_n označava broj stanovnika prigradskih naselja, a y_n neka je broj stanovnika grada nakon n godina od početka promatranja. Imamo dakle populacijski vektor $p_n = \begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix}$ koji označava distribuciju stanovništva nakon n godina. Pritom pretpostavljamo da nam je poznato početno stanje $p_0 = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}$.

Sad pretpostavimo da svake godine 15% stanovnika prigradskih naselja preseli u grad, dok 10% stanovnika grada preseli u okolicu (ovdje pretpostavljamo da nema "vanjskih" migracija). Dakle je

$$x_{n+1} = \frac{85}{100}x_n + \frac{10}{100}y_n, \quad y_{n+1} = \frac{15}{100}x_n + \frac{90}{100}y_n, \ \forall n \geq 0,$$

drugim rječima: $p_{n+1} = \begin{bmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.85 & 0.10 \\ 0.15 & 0.90 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix}$, $\forall n \geq 0$.

Matrica $T = \begin{bmatrix} 0.85 & 0.10 \\ 0.15 & 0.90 \end{bmatrix}$ se zove matrica tranzicije. Uočimo da vrijedi $p_1 = Tp_0$, $p_2 = Tp_1 = T^2p_0$ i općenito, $p_n = T^np_0$. Ovo jasno pokazuje da ponašanje potencija matrice određuje buduću distribuciju stanovništva.

Kad bismo računali zaokružujući na tri decimale dobili bismo

$$T^{10} = \begin{bmatrix} 0.434 & 0.377 \\ 0.566 & 0.623 \end{bmatrix}, T^{20} = \begin{bmatrix} 0.402 & 0.399 \\ 0.598 & 0.601 \end{bmatrix}, T^{30} = \begin{bmatrix} 0.4 & 0.4 \\ 0.6 & 0.6 \end{bmatrix}.$$

Bizarno je to što su sve ostale potencije jednake! Zaista,

$$\begin{bmatrix} 0.85 & 0.10 \\ 0.15 & 0.90 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.4 & 0.4 \\ 0.6 & 0.6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.34 + 0.06 & 0.34 + 0.06 \\ 0.06 + 0.54 & 0.06 + 0.54 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.4 & 0.4 \\ 0.6 & 0.6 \end{bmatrix}.$$

Dakle je $A \cdot A^{30} = A^{30}$ i sad se indukcijom odmah vidi $A^k \cdot A^{30} = A^{30}$, $\forall k \in \mathbb{N}$.

Ovo daje zanimljiv zaključak našem promatranju gradske i subgradske populacije. Naime, račun pokazuje da je za sve $n \geq 30$

$$p_n = T^np_0 = \begin{bmatrix} 0.4 & 0.4 \\ 0.6 & 0.6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.4(x_0 + y_0) \\ 0.6(x_0 + y_0) \end{bmatrix}$$

Kako je $x_0 + y_0 = 1$ milijun, to vidimo da će nakon 30 godina razdioba stanovništva postati stabilna: 40% stanovništva će živjeti u prigradskim naseljima, a preostalih 60% u gradu (to sve naravno pod uvjetom da u navedenom razdoblju neće doći do vanjskih poremećaja, odnosno do novih okolnosti u kojima naše pretpostavke više ne bi bile ispunjene). Što je međutim čudno je to da navedeni zaključak uopće ne ovisi o početnoj distribuciji stanovništva: brojevi x_0 i y_0 su bili proizvoljni pozitivni brojevi koji zadovoljavaju početni uvjet $x_0 + y_0 = 1$.

Ovo je dovoljno o primjeru, međutim, htjeli bismo razumjeti kako je moguće da su se potencije matrice T u nekom trenutku stabilizirale. Primjećujemo da je ovo ponašanje opet nekako različito u odnosu na primjere A, B, C s početka razmatranja.

Ovdje će pomoći promjena rakursa u razmišljanju. Zamislimo da je zapravo riječ o operatoru $\tilde{T} \in L(\mathbb{R}^2)$ kojemu u kanonskoj bazi (e) prostora $\mathbb{R}^2$ pripada upravo matrica T; dakle $\tilde{T}(e) = T$.

Ovo znači $\tilde{T}(1, 0) = (0.85, 0.15)$, $\tilde{T}(0, 1) = (0.10, 0.90)$, odnosno $\tilde{T}(x_1, x_2) = (\frac{85}{100}x_1 + \frac{10}{100}x_2, \frac{15}{100}x_1 + \frac{90}{100}x_2)$. Sad je plan da nađemo bolju, ili ako se može

optimalnu bazu za $\tilde{T}$ u kojoj bi matrični prikaz od $\tilde{T}$ bio jednostavan i račun lagan.

Zaista, to se ovdje može: za bazu (e'), $e'_1 = (2,3)$, $e'_2 = (-1,1)$ dobit ćemo $\tilde{T}(e') = T' = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3/4 \end{bmatrix}$.

Matrica prijelaza je ovdje $S(e) = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ i vrijedi $S(e)^{-1} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$.

Sad se sjetimo da je $\tilde{T}(e') = S(e)^{-1}\tilde{T}(e)S(e) \Rightarrow T = S(e)T'S(e)^{-1}$ i primijetimo sretnu okolnost da je odavde $T^n = S(e)(T')^n S(e)^{-1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Preostaje naučiti potencirati matricu T'. No to je trivijalno. Općenito vrijedi (čak i za matrice n-tog reda)

$$D = \begin{bmatrix} d_1 & 0 \\ 0 & d_2 \end{bmatrix} \Rightarrow D^n = \begin{bmatrix} d_1^n & 0 \\ 0 & d_2^n \end{bmatrix}, \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Iz svega rečenog slijedi

$$T^n = \begin{bmatrix} 0.85 & 0.10 \\ 0.15 & 0.90 \end{bmatrix}^n = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (3/4)^n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}, \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Kako je $(3/4)^{30} \approx 0.00001$ (a pogotovo se dobije manje za više potencije), ovaj broj možemo zanemariti kad god je eksponent 30 ili više jer ne može utjecati na treću decimalu u rezultatu. Tako konačno dobivamo:

$$T^n = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}, \ \forall n \geq 30.$$

Slično možemo postupiti i s matricama A, B, C s kojima smo započeli ovo razmatranje. Lagano se može provjeriti da vrijedi

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 & -7 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Vidimo dakle u sva tri slučaja da je dana matrica slična nekoj jednostavnoj matrici. Kao i malo prije, potenciranje zadane matrice sada se svodi na jednostavan račun s dijagonalnom ili trokutastom matricom.

Navedeni primjeri jasno pokazuju koliko je korisno, ako je moguće, zadanu matricu "svesti" na dijagonalni oblik. S jedne strane, to znatno olakšava računanje, a s druge strane izgled te dijagonalne matrice, odnosno narav njezinih dijagonalnih elemenata zapravo u potpunosti određuje ponašanje i svojstva zadane matrice.

Sve rečeno može se i operatorski interpretirati. Startamo li od linearnog operatora $A \in L(V)$ na nekom konačnodimenzionalnom prostoru V, cilj nam je naći takvu bazu $(a) = \{a_1, \ldots, a_n\}$ za V u kojoj bi matrica operatora A bila dijagonalna, ili možda na koji drugi način čim jednostavnija.

Razmotrimo dijagonalnu situaciju: neka je $A(a) = \begin{bmatrix} \alpha_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \alpha_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \alpha_n \end{bmatrix}$.

Po definiciji matričnog prikaza linearnog operatora ovo znači: $Aa_1 = \alpha_1 a_1, Aa_2 = \alpha_2 a_2, \ldots, Aa_n = \alpha_n a_n$. Vidimo dakle da vektori baze a_i, $i = 1, \ldots, n$ moraju imati osobito svojstvo: operator A ih preslikava u njima kolinearne vektore. Zato je nužno općenito razmotriti egzistenciju, ponašanje i metode nalaženja takvih vektora za dani linearni operator.

To izravno motivira sljedeću definiciju.

Definicija 5.1. *Neka je V vektorski prostor nad poljem F i $A \in L(V)$. Kaže se da je skalar $\lambda_0 \in F$ svojstvena vrijednost operatora A ako postoji vektor $x \in V$, $x \neq 0$, takav da je $Ax = \lambda_0 x$.*

Skup svih svojstvenih vrijednosti operatora A naziva se spektar (operatora A) i označava sa $\sigma(A)$.

Napomena 5.2. (a) Logično je ograničenje $x \neq 0$. Kad bismo bili zadovoljni s nul-vektorom u ovom kontekstu onda bi svaki skalar bio svojstvena vrijednost jer je gornja definiciona jednakost zadovoljena uz $x = 0$ i $\lambda_0 \in F$.

(b) Često se kaže i karakteristična vrijednost ili vlastita vrijednost. Nekad i *eigenvalue*.

(c) Vektor x iz gornje definicije se naziva svojstveni vektor pridružen svojstvenoj vrijednosti λ_0. Treba primijetiti da svojstveni vektor nikako nije jedinstven: ako je x svojstveni vektor onda je i αx svojstveni vektor pridružen istoj svojstvenoj vrijednosti, i to za svaki skalar α iz F. Štoviše, neka

svojstvena vrijednost λ_0 operatora A može posjedovati i više linearno nezavisnih svojstvenih vektora. Primjer je jedinični operator I: za njega su svi vektori prostora svojstveni za svojstvenu vrijednost 1.

(d) Neka je $V_A(\lambda_0) = \{x \in V : Ax = \lambda_0 x\}$. Ovaj skup se naziva svojstveni potprostor pridružen svojstvenoj vrijednosti λ_0. Kažemo potprostor jer on to zaista jest. Naime, očito je $V_A(\lambda_0) = \mathrm{Ker}\,(A - \lambda_0 I)$. Primijetimo da je skup $V_A(\lambda_0)$ uvijek potprostor od V; jedino je možda trivijalan. Posebno, 0 je svojstvena vrijednost operatora A ako i samo ako A nije regularan i u tom slučaju je svojstveni potprostor pridružen svojstvenoj vrijednosti 0 zapravo jezgra operatora A.

(e) Ako je $\lambda_0 \in \sigma(A)$ onda se dimenzija svojstvenog potprostora $\dim V_A(\lambda_0)$ definira kao geometrijska kratnost svojstvene vrijednosti λ_0 i označava s $d(\lambda_0)$. Primijetimo da je po definiciji $d(\lambda_0) \geq 1$.

Primjer: (1) Operator $A \in L(V^2(O))$ zrcaljenja preko x-osi na $V^2(O)$ ima svojstvene vrijednosti $\lambda_1 = 1$ i $\lambda_2 = -1$; naime $A\vec{i} = \vec{i}$ i $A\vec{j} = -\vec{j}$. Kasnije ćemo vidjeti da su to jedine dvije svojstvene vrijednosti u ovom slučaju.

(2) Operator $R_\varphi \in L(V^2(O))$ rotacije za kut $\varphi \in \langle 0, \pi \rangle$ nema svojstvenih vrijednosti.

Prvo što bismo htjeli je naći metodu kojom bismo svojstvene vrijednosti danog operatora mogli naći. Za to nam treba pojam svojstvenog polinoma kvadratne matrice.

Definicija 5.3. *Neka je $A \in M_n(F)$. Polinom $k_A(\lambda) = det(A - \lambda I)$ naziva se svojstveni polinom matrice A (u varijabli λ).*

I ovdje se ponekad koriste atributi karakteristični i vlastiti.

Primijetimo da je $k_A(\lambda)$ zaista polinom s koeficijentima iz polja F i to n-tog stupnja - to slijedi izravno iz definicije determinante. Također iz definicije determinante odmah uočavamo da je vodeći koeficijent ovog polinoma $(-1)^n$.

Propozicija 5.4. *Slične matrice imaju iste svojstvene polinome.*

Dokaz: Uzmimo $A, B \in M_n$ i regularnu matricu $S \in M_n$ takve da vrijedi $B = S^{-1}AS$. Tada, jer matrica λI komutira sa svakom kvadratnom matricom iz M_n, uz pomoć Binet-Cauchyjevog teorema dobivamo $k_B(\lambda) = \det(B - \lambda I) = \det(S^{-1}AS - \lambda I) = \det(S^{-1}(A - \lambda I)S) = \det(S^{-1})\det(A - \lambda I)\det(S) = \det(A - \lambda I) = k_A(\lambda)$. $\square$

Ova propozicija nam omogućuje da definiramo i pojam svojstvenog polinoma za linearne operatore $A : V \to V$ kad god je V konačnodimenzionalan vektorski prostor. Naime, odaberemo li neku bazu (e) za V, možemo formirati matrični zapis operatora A u bazi (e) i onda izračunati svojstveni polinom tako dobivene matrice. Kako je u svakoj drugoj bazi matrični zapis tog istog operatora neka matrica slična prvotno dobivenoj, vidimo da svaki matrični zapis A dovodi do istog svojstvenog polinoma.

Definicija 5.5. *Neka je V konačnodimenzionalan prostor, neka je (e) neka baza za V, neka je $A \in L(V)$, i neka je $A(e)$ matrični zapis operatora A u bazi (e). Karakteristični polinom operatora A (oznaka: $k_A(\lambda)$) definira se s $k_A(\lambda) = k_{A(e)}(\lambda)$.*

Primjer. Uzmimo operator rotacije $R_\varphi \in L(V^2(O))$ za kut φ. Neka je $(e) = \{\vec{i}, \vec{j}\}$ standardna baza za $L(V^2(O))$. Znamo otprije da je tada $R_\varphi(e) = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}$. Odavde se odmah vidi da je $k_{R_\varphi}(\lambda) = (\cos\varphi - \lambda)^2 + \sin^2\varphi$.

Teorem 5.6. *Neka je V konačnodimenzionalan vektorski prostor nad poljem F, neka je $A \in L(V)$. Skalar $\lambda_0 \in F$ je svojstvena vrijednost operatora A ako i samo ako vrijedi $k_A(\lambda_0) = 0$.*

Dokaz: Odaberimo unaprijed neku bazu (e) za V. Imamo sljedeći niz međusobno ekvivalentnih tvrdnji: λ_0 je svojstvena vrijednost za $A \Leftrightarrow \exists x \in V$, $x \neq 0$, $Ax = \lambda_0 x \Leftrightarrow \mathrm{Ker}(A - \lambda_0 I) \neq \{0\} \Leftrightarrow$ (prema Propoziciji 1.7) $A - \lambda_0 I$ nije monomorfizam $\Leftrightarrow$ (prema Propoziciji 1.12) $A - \lambda_0 I$ nije regularan operator $\Leftrightarrow$ (prema Korolaru 4.7) $(A - \lambda_0 I)(e)$ nije regularna matrica $\Leftrightarrow$ (prema Propoziciji 4.2) $A(e) - \lambda_0 I$ nije regularna matrica $\Leftrightarrow \det(A(e) - \lambda_0 I) = 0 \Leftrightarrow k_A(\lambda_0) = 0$. $\square$

Napomena 5.7. (a) Neposredna posljedica: $\dim V = n$, $A \in L(V) \Rightarrow A$ ima najviše n svojstvenih vrijednosti!

(b) Primijetimo da je jedna od pretpostavki teorema $\lambda_0 \in F$. To konkretno znači da se, npr. u realnim prostorima teorem odnosi samo na realne nul-točke svojstvenog polinoma. To je i u redu kako pokazuje primjer rotacije na R_φ na $V^2(O)$: znamo da taj operator nema svojstvenih vrijednosti i, kako vidimo iz prethodnog primjera, to je u skladu s tim da njegov svojstveni polinom $k_{R_\varphi}(\lambda) = (\cos\varphi - \lambda)^2 + \sin^2\varphi$ nema realnih nul-točaka (naravno, uz pretpostavku $\varphi \in \langle 0, \pi \rangle$).

(c) Teorem očito predstavlja mjesto gdje se teorija dijeli na realnu i komleksnu. Ako proučavamo kompleksne prostore tada znamo da će svaki operator imati svojstvenih vrijednosti (koliko, to je drugo pitanje). To je posljedica činjenice da svaki polinom s koeficijentima iz $\mathbb{C}$ ima nul-točaka u $\mathbb{C}$. U tom smislu se kaže da je polje $\mathbb{C}$ algebarski zatvoreno. Ako je pak A operator na realnom prostoru, može nam se dogoditi, i događa se, da A nema niti jednu svojstvenu vrijednost. To znači da su sve nul-točke njegovog svojstvenog polinoma kompleksne. Takav je operator rotacije. Kasnije ćemo vidjeti da je operator rotacije zapravo u tom smislu tipičan. Ovdje je zanimljivo spomenuti da svaki operator na realnom prostoru neparne dimenzije ima bar jednu svojstvenu vrijednost. (Zašto?)

Primjer. Uzmimo operator $A \in L(\mathbb{R}^3)$ dan svojim matričnim prikazom u kanonskoj bazi (e) prostora $\mathbb{R}^3$: $A(e) = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$. Nađimo mu spektar!

Očito je $A(e) - \lambda I = \begin{bmatrix} 2-\lambda & -1 & 0 \\ 1 & -\lambda & 0 \\ -1 & 0 & 2-\lambda \end{bmatrix}$ i Laplaceovim razvojem po zadnjem stupcu odmah dobivamo $k_A(\lambda) = (1-\lambda)^2(2-\lambda)$. Dakle je $\sigma(A) = \{1, 2\}$.

Napomena 5.8. Kako za danu svojstvenu vrijednost λ_0 računamo svojstvene vektore operatora $A \in L(V)$?

Postupak koji nam daje zapravo cijeli svojstveni potprostor svodi se, putem koordinatizacije, na rješavanje jednog homogenog sustava linearnih jednadžbi. Opišimo ga:

Neka je $(e) = \{e_1, \ldots, e_n\}$ neka baza za V. Sad redom imamo: $Ax = \lambda_0 x \Leftrightarrow (A - \lambda_0 I)x = 0 \Leftrightarrow$ (prema Propoziciji 4.1) $((A - \lambda_0 I)x)(e) = 0 \Leftrightarrow$ (prema Propoziciji 4.3) $(A - \lambda_0 I)(e) \cdot x(e) = 0 \Leftrightarrow$ (prema Propoziciji 4.2) $(A(e) - \lambda_0 I) \cdot x(e)$.

Ovo pokazuje da smo dobili homogen n x n sistem linearnih jednadžbi, zapisan u matričnom obliku, čiji prostor rješenja je u bijekciji (φ iz Propozicije 4.1) sa svojstvenim potprostorom $V_A(\lambda_0)$. Primijetimo da je matrica sustava singularna; naime $\det(A(e) - \lambda_0 I) = 0$ upravo zato što je λ_0 svojstvena vrijednost operatora. Zato je prostor rješenja netrivijalan, tj. dimenzija mu je barem 1. Otprije znamo da tako i mora biti.

Primjer. Neka je $A \in L(\mathbb{R}^3)$ operator iz prethodnog primjera. Odredimo svojstveni potprostor za svojstvenu vrijednost 1. Prema prethodnoj napomeni trebamo riješiti pripadajući sustav jednadžbi.

$$A(e) - I = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Dakle je $x_1 = x_2 = x_3$, prostor rješenja je jednodimenzionalan i (jedna) baza mu je vektor $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Uočavamo da je geometrijska kratnost (tj. dimenzija svojstvenog potprostora) svojstvene vrijednosti 1 jednaka 1, dok je $\lambda_0 = 1$ dvostruka nul-točka svojstvenog polinoma. Ova dva podatka i inače je uvijek korisno usporediti. Uvedimo najprije pojam algebarske kratnosti svojstvene vrijednosti; definicija se temelji na činjenici da je svaka svojstvena vrijednost nul-točka svojstvenog polinoma.

Definicija 5.9. *Neka je V konačnodimenzionalan vektorski prostor nad F, neka je $A \in L(V)$ i $\lambda_0 \in \sigma(A)$. Neka je $k_A(\lambda) = (\lambda - \lambda_0)^l q(\lambda),\ l \in \mathbb{N},\ q(\lambda_0) \neq 0$. Broj $l = l(\lambda_0)$ zovemo algebarskom kratnošću svojstvene vrijednosti λ_0.*

Teorem 5.10. *Neka je V konačnodimenzionalan vektorski prostor nad F, neka je $A \in L(V)$ i $\lambda_0 \in \sigma(A)$. Tada je algebarska kratnost svojstvene vrijednosti λ_0 veća ili jednaka od njezine geometrijske kratnosti.*

Dokaz: Označimo kao i prije algebarsku i geometrijsku kratnost od λ_0 s l, odnosno d. Neka je $k_A(\lambda) = (\lambda - \lambda_0)^l q(\lambda)$, $q(\lambda_0) \neq 0$ i neka je $\{e_1, \dots e_d\}$ neka baza pripadnog svojstvenog potprostora. Ovaj nezavisan skup nadopunimo do baze $(e) = \{e_1, \dots e_d, e_{d+1}, \dots, e_n\}$. Matrični prikaz operatora A u bazi (e) simbolički možemo pisati kao blok matricu oblika $A(e) = \begin{bmatrix} \lambda_0 I & B \\ 0 & C \end{bmatrix}$ pri čemu je $\lambda_0 I \in M_d(F)$ i $C \in M_{n-d}(F)$. Sad svojstveni polinom operatora A možemo izračunati i iz ovog matričnog zapisa. Pritom smo u poziciji iskoristiti Lemu 3.2.21.

Dobivamo $k_A(\lambda) = (\lambda - \lambda_0)^l q(\lambda) = (\lambda_0 - \lambda)^d p(\lambda)$ pri čemu je $p(\lambda)$ neki polinom stupnja $n - d$ - u stvari se radi o svojstvenom polinomu matrice C.

Uzmimo sada da vrijedi $d > l$. Tada gornju jednakost možemo pisati u obliku $q(\lambda) = (-1)^d(\lambda - \lambda_0)^{d-l}p(\lambda)$ a odavde odmah slijedi $q(\lambda_0) = 0$ - kontradikcija. $\square$

Napomena 5.11. U prethodnom teoremu krije se jedna od mogućih smetnji za egzistenciju dijagonalnog matričnog zapisa danog operatora. Ukoliko je za neku svojstvenu vrijednost λ_0 njezina geometrijska kratnost d strogo manja od algebarske kratnosti d, onda je evidentno nemoguće naći bazu u kojoj bi taj operator imao dijagonalnu matricu. Naime, na dijagonali te matrice λ_0 bi se morao pojaviti točno l puta, a to pak zahtijeva točno l nezavisnih svojstvenih vektora, no imamo ih samo d.

S druge strane, dobra je okolnost da si svojstveni vektori različitih svojstvenih vrijednosti "ne smetaju".

Propozicija 5.12. *Neka je V konačnodimenzionalan vektorski prostor nad F, neka je $A \in L(V)$, neka su $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ međusobno različite svostvene vrijednosti operatora i neka su $x_1, \ldots, x_k$ njima pripadajući svojstveni vektori. Tada je skup $\{x_1, \ldots, x_k\}$ linearno nezavisan.*

Dokaz: Tvrdnju dokazujemo indukcijom po k. Ako je $k = 1$ onda je skup $\{x_1\}$ nezavisan jer $x_1 \neq 0$. Pretpostavimo da je tvrdnja točna za $k - 1$.

Neka je $\sum_{i=1}^{k} \alpha_i x_i = 0$. Kad na ovu jednakost djelujemo s A dobivamo $\sum_{i=1}^{k} \alpha_i \lambda_i x_i = 0$. Od ovoga sad oduzmimo početnu jednakost prethodno pomnoženu s λ_k. Dobivamo $\sum_{i=1}^{k-1} \alpha_i(\lambda_i - \lambda_k)x_i = 0$. Po pretpostavci indukcije slijedi $\alpha_i(\lambda_i - \lambda_k) = 0$, $\forall i = 1, \ldots, k-1$. Kako su međutim svi λ_j međusobno različiti slijedi $\alpha_i = 0$, $\forall i = 1, \ldots, k-1$. Tako je od početne relacije ostalo samo $\alpha_k x_k = 0$, a odavde je naravno i $\alpha_k = 0$. $\square$

U prethodnoj propoziciji smo za svaku svojstvenu vrijednost uzeli samo po jedan svojstveni vektor. Općenito, kako znamo, za neku svojstvenu vrijednost možemo imati i više nezavisnih svojstvenih vektora. No sada možemo dokazati i odgovarajući, jači rezultat.

Teorem 5.13. *Neka je V konačnodimenzionalan vektorski prostor nad F, neka je $A \in L(V)$, neka je $\sigma(A) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_k\}$ i neka je $(e^{(i)})$ baza za svojstveni potprostor $V_A(\lambda_i)$, $i = 1, \ldots, k$. Tada je unija svih skupova $(e^{(i)})$, $i = 1, \ldots, k$ linearno nezavisan skup u V.*

Dokaz: Uzmimo radi konkretnosti i jednostavnosti označavanja da je $k = 3$. Vidjet će se da je dokaz koji slijedi primjenjiv za bilo koji $k \in \mathbb{N}$ (uz pametniju notaciju).

Neka je dakle $\sigma(A) = \{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\}$ i neka su, redom, baze svojstvenih potprostora skupovi $\{v_1, \ldots, v_p\}$, zatim $\{x_1, \ldots, x_r\}$, te $\{y_1, \ldots, y_s\}$. Uzmimo da vrijedi $\sum_{i=1}^{p} \alpha_i v_i + \sum_{j=1}^{r} \beta_j x_j + \sum_{k=1}^{s} \gamma_k y_k = 0$. Ako ove tri podsume označimo redom s v, zatim x i y, možemo pisati $v + x + y = 0$.

No sad samo treba primijetiti da su i ovi vektori elementi odgovarajućih svojstvenih potprostora. Zbog prethodne propozicije sva tri moraju biti 0 - a onda su i svi koeficijenti jednaki 0 jer su ti vektori prikazani u bazama potprostora.

Ako je, naime netko od v, x, y netrivijalan onda je po definiciji svojstven vektor i odmah dolazimo u kontradikciju s prethodnom propozicijom. (Npr. $v \neq 0 \Rightarrow x + y \neq 0$. Ako je $y = 0$ onda odavde $x \neq 0$ pa sad imamo $v + x = 0$ - netrivijalnu kombinaciju svojstvenih vektora. Ako je $x = 0$, analogno. Ako $x, y \neq 0$ onda su sva tri svojstveni vektori pa opet prošla propozicija daje kontradikciju.) $\square$

Korolar 5.14. *Neka je V kompleksan konačnodimenzionalan vektorski prostor, neka je $A \in L(V)$, te neka je $\sigma(A) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_k\}$. Operator A se može dijagonalizirati (tj. postoji baza od V u kojoj je matrični prikaz operatora A dijagonalna matrica) ako i samo su geometrijska i algebarska kratnost svih svojstvenih vrijednosti od A jednake.*

Dokaz: Već smo vidjeli u Napomeni 5.11 da je jednakost algebarskih i geometrijskih multipliciteta nužan uvjet dijagonalizacije.

Obratno, jer je prostor kompleksan, svojstveni polinom operatora A je oblika $k_a(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{l_1} \cdot \ldots \cdot (\lambda - \lambda_k)^{l_k}$ pri čemu je $l_1 + \ldots + l_k = n = \dim V$. Preostaje primijeniti prethodni teorem: unija baza svojstvenih potprostora je linearno nezavisan skup koji ovdje, zbog pretpostavke o jednakosti algebarskih i geometrijskih kratnosti, ima točno n elemenata i zato čini bazu za V. Jasno je da je u toj bazi matrica operatora A dijagonalna. $\square$

Treba primijetiti da je korolar točan i za operatore na realnom prostoru koji ispunjavaju dodatni uvjet da im se svojstveni polinom može faktorizirati u linearne faktore nad poljem $\mathbb{R}$.

Za operatore na kompleksnim prostorima ovaj preduvjet je automatski ispunjen i jedina smetnja dijagonalizaciji je eventualni "manjak" svojstvenih vektora. Tipičan primjer operatora koji se ne može dijagonalizirati je

$A \in L(V)$ koji u nekoj bazi (e) prostora V ima matricu $A(e) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. Primijetimo da za ovu matricu vrijedi $A(e)^2 = 0$.

Općenito, za linearan operator (matricu) A kažemo da je nilpotentan (nilpotentna) ako je $A^k = 0$ za neki prirodni eksponent k. Nilpotentni operatori se prirodno pojavljuju. Najpoznatiji primjer je operator deriviranja na prostoru polinoma $D : P_n \to P_n$, $Dp = p'$. Pokazuje se da su nilpotentni operatori nezaobilazni u proučavanju strukture operatora. Štoviše, analizom nilpotentnih operatora (uz pomoć tzv. Fittingove dekompozicije) dolazi se do općeg teorema koji opisuje strukturu linearnih operatora na kompleknom prostoru $\to$ *Jordanova forma*.

Za kraj ovih razmatranja preostalo je rasvijetliti ulogu kompleksnih nultočaka osvojstvog polinoma operatora na realnom prostoru. Za to nam najprije treba još jedan pojam.

Definicija 5.15. *Neka je V vektorski prostor i $A \in L(V)$. Kaže se da je potprostor $M \leq V$ invarijantan za A ako vrijedi $A(M) \subseteq M$, tj. $Ax \in M$, $\forall x \in M$.*

Nekoliko elementarnih opaski. Prvo, svaki operator ima dva trivijalna invarijantna potprostora, to su $\{0\}$ i V. Naravno, zanimljivi su samo pravi, netrivijalni invarijantni potprostori. Takav je npr. $\operatorname{Im} A \leq V$ za svaki singularan operator na V (uočimo da je $\operatorname{Im} A \leq V$ tada svakako pravi potprostor jer singularan operator zbog Propozicije 1.12 ne može biti surjekcija).

Dalje, primijetimo da je svaki svojstven potprostor operatora A ujedno i invarijantan za A. Obrat ne vrijedi, protuprimjer je operator rotacije za neki kut oko z-osi u $V^3(O)$: za njega je $V^2(O)$ invarijantan, ali ne i svojstven potprostor.

Zašto nam je ugodno imati invarijantne potprostore? Zamislimo da je M invarijantan za A, neka je $\{e_1, \dots e_k\}$ neka baza za M i neka je $(e) = \{e_1, \dots e_k, e_{k+1}, \dots, e_n\}$ neko njezino nadopunjenje do baze cijelog prostora V. Očito je matrični prikaz $A(e)$ operatora A u bazi (e) gornje trokutasta blok-matrica. I to je već nešto što olakšava računanje!

Još primijetimo: ako je dana baza $\{e_1, \dots e_k\}$ nekog potprostora $M \leq V$ onda je M invarijantan za $A \in L(V)$ ako i samo ako je $Ae_i \in M$, $\forall i = 1, \dots, k$.

Uzmimo matricu $A \in M_n(\mathbb{R})$ i definirajmo operator $\tilde{A} : M_{n1}(\mathbb{R}) \to$

$M_{n1}(\mathbb{R})$, $\tilde{A}x = Ax$. Uočimo da je u kanonskoj bazi prostora $M_{n1}(\mathbb{R})$ matrica našeg operatora $\tilde{A}$ upravo polazna matrica A. Neka je $k_A(\lambda_0) = 0$, $\lambda_0 = \alpha + \mathrm{i}\beta$, $\beta \neq 0$.

Sad primijetimo da naša matrica zna množiti i kompleksne stupce; zato možemo uvesti operator $\tilde{A}^c : M_{n1}(\mathbb{C}) \to M_{n1}(\mathbb{C})$, $\tilde{A}^c z = Az$. Jasno je da je matrični prikaz operatora $\tilde{A}^c$ u kanonskoj bazi prostora $M_{n1}(\mathbb{C})$ točno isti kao matrični prikaz operatora $\tilde{A}$ u kanonskoj bazi prostora $M_{n1}(\mathbb{R})$; dakle upravo matrica A. Zato je i svojstveni polinom ostao isti, λ_0 mu je i dalje nul-točka, no sada je λ_0 svojstvena vrijednost operatora $\tilde{A}^c$. Zato postoji stupac $z \in M_{n1}(\mathbb{C})$, $z \neq 0$ takav da je $\tilde{A}^c z = \lambda_0 z$, tj. $Az = \lambda_0 z$. Pišimo z u obliku $z = x + \mathrm{i}y$, $x, y \in M_{n1}(\mathbb{R})$. Sad možemo izjednačiti realne i imaginarne dijelove u prethodnoj jednakosti. Iz $A(x + \mathrm{i}y) = (\alpha + \mathrm{i}\beta)(x + \mathrm{i}y)$ dobivamo

(1) $\quad Ax = \alpha x - \beta y,$

(2) $\quad Ay = \beta x + \alpha y.$

Uočimo da je skup x, y linearno nezavisan u $M_{n1}(\mathbb{R})$. Zaista, $x \neq 0$; u protivnom bismo iz (1) dobili $\beta y = 0$ i sad bi zbog $\beta \neq 0$ moralo biti $y = 0$, a time i $z = 0$ - kontradikcija. Sad kad znamo da x nije 0 pretpostavimo da postoji $\gamma \in \mathbb{R}$ takav da je $y = \gamma x$. Slijedilo bi $Ay \overset{(2)}{=} \beta x + \alpha y = \beta x + \alpha\gamma x$. S druge strane pak $Ay = \gamma Ax \overset{(1)}{=} \gamma(\alpha x - \beta y) = \alpha\gamma x - \beta\gamma^2 x$. Uspoređivanjem slijedi $\beta(1 + \gamma^2)x = 0$, no to je kontradikcija jer niti jedan faktor nije 0.

Zaključujemo: dobili smo 2-dimenzionalan potprostor od $M_{n1}(\mathbb{R})$ razapet s x i y. Sad jednakosti (1) i (2) pokazuju da je M očito invarijantan za operator $\tilde{A}$. Označimo s R restrikciju našeg operatora na potprostor M, dakle je $R \in L(M)$. Konačno, nađimo matricu operatora R u bazi $(e) = \{y, x\}$ od M. Iz jednakosti (1) i (2) vidimo da je $R(e) = \begin{bmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{bmatrix}$. Na kraju, izlučimo iz ove matrice $\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$ i uočimo da možemo pisati $\alpha/\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} = \cos\varphi$ i $\beta/\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} = \sin\varphi$ za neki $\varphi \in \mathbb{R}$. Nakon svega, možemo pisati $T(e) = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}$.

Iz svega slijedi: kompleksna nul-točka svojstvenog polinoma generira jedan 2-dimenzionalan potprostor, invarijantan za A na kojem A djeluje kao kompozicija jedne homotetije i jedne rotacije. Jasno je da je poanta u rotaciji: to je nekako prototip operatora na realnom prostoru kojem se dogodila kompleksna nul-točka svojstvenog polinoma.

Vratimo se ponovo svojstvenom polinomu matrice, odnosno operatora.

Najprije, ako je $A \in M_n(F)$ primijetimo da su zbog asocijativnosti množenja dobro definirane potencije A^k, $\forall k \geq 0$: stavljamo $A^0 = I, A^1 = A$ i induktivno $A^{k+1} = AA^k$. Na isti način je (dobro) definirano potenciranje operatora $A \in L(V)$ na vektorskom prostoru V (i sve je isto i dobro i u svakoj drugoj asocijativnoj algebri s jedinicom).

Sad, ako je $A \in M_n(F)$ (analogno je za $A \in L(V)$) i ako je dan polinom $p(\lambda) = \sum_{i=0}^{k} \alpha_i \lambda^i$ onda je dobro definirana matrica $p(A) = \sum_{i=0}^{k} \alpha_i A^i \in M_n(F)$.

Za danu matricu A mogli bismo poželjeti naći polinom $p(\lambda)$ takav da vrijedi $p(A) = 0$. Zanimljivo je da takav polinom uvijek postoji, argument je sasvim jednostavan: skup $\{I, A, A^2, \ldots A^{n^2}\}$ je očito linearno zavisan u $M_n(F)$ i "dobitna" linearna kombinacija upravo definira traženi polinom.

Sad kad znamo da polinomi koje A poništava postoje, možemo pokušati naći takav polinom čim manjeg stupnja. Sasvim senzacionalno, vrijedi:

Teorem 5.16. *(Hamilton - Cayley)*
Neka je $A \in M_n(F)$. Tada je $k_A(A) = 0$.

Dokaz: Dokaz se temelji na činjenici da svaka kvadratna matrica T zadovoljava $T\,\widetilde{T} = (\det T)I$; ovdje je $\widetilde{T}$ adjunkta matrice T.

Uzmimo sada $C = A - \lambda I$ i $\det C = k_A(\lambda) = \alpha_n \lambda^n + \alpha_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots \alpha_1 \lambda_1 + \alpha_0 \lambda^0$. Sada je $C\,\widetilde{C} = A\,\widetilde{C} - \lambda\,\widetilde{C}$ i s druge strane $C\,\widetilde{C} = (\det C)I$. Usporedit ćemo ova dva rezultata. Pritom uočimo: elementi matrice $\widetilde{C}$ su polinomi $(n-1)$. stupnja, zato matricu $\widetilde{C}$ možemo napisati i kao polinom $(n-1)$. stupnja s matričnim koeficijentima.

$\alpha_n \lambda^n I + \alpha_{n-1}\lambda^{n-1} I + \ldots \alpha_1 \lambda_1 I + \alpha_0 I =$
$= AC_{n-1}\lambda^{n-1} + AC_{n-2}\lambda^{n-2} + \ldots + AC_1\lambda + AC_0 -$
$- C_{n-1}\lambda^n - C_{n-2}\lambda^{n-1} - \ldots - C_1\lambda^2 - C_0\lambda.$

Usporedbom odgovarajućih koeficijenata dobivamo sistem jednakosti.

$\alpha_n I = -C_{n-1}$
$\alpha_{n-1} I = AC_{n-1} - C_{n-2}$
$\alpha_{n-2} I = AC_{n-2} - C_{n-3}$
$\ldots$
$\alpha_1 I = AC_1 - C_0$
$\alpha_0 I = AC_0$

Sad prvu jednakost pomnožimo s A^n, drugu pomnožimo s A^{n-1}, redom analogno dalje pa na kraju posljednju jednakost pomnožimo s I i nakon toga sve zbrojimo: slijedi $k_A(A) = 0$. $\square$

Korolar 5.17. *Neka je V konačnodimenzionalan vektorski prostor i $A \in L(V)$. Tada je $k_A(A) = 0$.*

Dokaz: Uzmimo neku bazu (e) za V i načinimo matricu $A(e)$. Preostaje primijeniti Korolar 4.6 i prethodni teorem. $\square$

U kontekstu Hamilton - Cayleyevog teorema, odnosno prethodnog korolara, sad možemo za dani operator pokušati naći polinom s najmanjim mogućim stupnjem kojeg će A poništiti. To nas dovodi do definicije minimalnog polinoma, ali i izvan okvira ovog kolegija. Činjenica je da za neke operatore na n-dimenzionalnom prostoru postoje i polinomi stupnja manjeg od n koje će taj operator poništiti.

Uz pomoć minimalnog polinoma moguće je precizno "mjeriti" razliku između algebarske i geometrijske kratnosti svojstvene vrijednosti. Zato je proučavanje minimalog polinoma sastavni dio analize strukture linearnih operatora.