Kamate i tokovi novca

Bojan Basrak

rujan 2005

1. Uvod

Prvu modernu tablicu smrtnosti konstruirao je Sir Edmund Halley još 1693, a u Engleskoj je još 1848. osnovan the Institute of Actuaries. Matematičari kao npr. C. Huygens, P.S. de Laplace i J. Bernoulli od najranijih dana prepoznaju aktuarske primjene kao izvor vrlo zanimljivih matematičkih problema i modela.

Osnovni zadatak aktuara je *ocjena rizika*, tradicionalno u osiguranju. No svim državnim i privatnim institucijama koje imaju pristup velikim iznosima novca ovaj problem je od iznimne važnosti.

Razvoj aktuarske profesije u zadnjih desetljeća ubrzava

- široka upotreba računala
- upotreba suvremenih matematičkih metoda, posebno iz područja vjerojatnosti
- te posebno zbližavanje aktuarske i moderne financijske profesije

Za ilustraciju:
- ukupni kapital osiguravatelja života u 2003. u Njemačkoj iznosio je 613 mlrd eura.

- na ime premija u 2003. uplaćeno im je 67 mlrd eura.

Postavlja se pitanje kako ulaganjem 67 mlrd eura osigurati što je moguće veće isplate osiguranicima. Pritom je očito nužan oprez, naime nedavno je njemački *protector* prvi put u povijesti intervirao kako bi spriječio bankrot jednog od osiguravatelja života.

Kolegij ima četiri osnovna dijela

(i) Kamate i tokovi novca
(ii) Modeli doživljenja
(iii) Osiguranje života
(iv) Dodatak (varijabilnog sadržaja, u ovisnosti o preostalom vremenu)

U dijelu (i) postavit ćemo fundamentalne principe vrednovanja tokova novca. Na tim izuzetno jednostavnim principima počivaju sve tržišno utemeljene financijske odluke. Od obiteljske odluke o kupnji ili iznajmljivanju stana, do odabira gospodarske strategije neke zemlje ili korporacije.

U drugom dijelu uvest ćemo osnovne modele i pojmove vezane uz razdiobu duljine života u nekoj populaciji. Posebno ćemo se baviti životnim tablicama i analizom preostale duljine života zasnivajući našu analizu na računu vjerojatnosti.

Dio (iii) posvećen je glavnim aktuarskim temama kao što su npr. izračun visine premija ili rezervi za najosnovnije tipove životnog osiguranja ili renti. Uvest ćemo spektar uobičajenih aktuarskih oznaka, ali i principa izračuna premija.

Konačno u četvrtom dijelu, bavit ćemo se temama vezanim uz primjenu statistike i vjerojatnosti na modele, tablice i izračune iz prethodnih poglavlja.

Svaki skup financijskih transakcija, ugovora ili planova, možemo zapisati kao tzv. tok novca. Tako su tokovi novca osnovni objekt u financijama i njihovo vrednovanje ili usporedba jedan je od naših glavnih problema.

(Jednostavni) tok novca [cash flow] niz je uredjenih parova realnih brojeva $((t_j, c_j) : j = 1, \ldots, m)$. Pritom se $t_j \geq 0$ zovu vremena, a $c_j \in \mathbb{R}$ iznosi.

Za ovakav tok novca kažemo i da je *deterministički*. Ovisno o predznaku iznosa c_j zovemo ih uplate odn. isplate. Ponekad ćemo sretati i beskonačne nizove, pa dopuštamo i $m = \infty$.

Primjer (zero-coupon bond)

j	t_j	c_j	Opis
1	0	-1000.00	uplata
2	1	1100.00	isplata

Primjeri: Kratkoročna oročena štednja. Državne obveznice. Financijske rente.

Slučajni (ili poopćeni) tok novca je niz dvodimenzionalnih slučajnih vektora $((T_j, C_j) : j = 1, \ldots, M)$.

I ovdje se slučajne varijable C_j zovu iznosi, a $T_j \geq 0$ vremena. Duljina niza M je takodjer (poopćena) slučajna varijabla s vrijednostima u skupu $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$.

Primjer (kućni izdaci za sljedeći mjesec)

j	T_j	C_j	Opis
1	1	-150.23	račun za struju
2	T_2	C_2	isplata sa automata
3	10	C_3	račun za telefon
4	15	-1890.20	rata za kredit
5	25	4200	osobni dohodak

Primjeri: Korporacijske obveznice. Dionice. Osiguranje života. Životne rente. Igre na sreću. Osiguranje imovine. Derivativi. Investicijski projekti.

Kamata je naknada koju neka osoba plaća drugoj osobi za korištenje kapitala. Slične naknade plaćamo i za posudbu nekog drugog dobra, stana npr.

Kako u pravilu svi preferiramo 1 euro danas u odn. na 1 euro za godinu dana, kamata je gotovo bez iznimke strogo pozitivna. Ona izražava vremensku vrijednost novca. Ako ne bismo znali tu vrijednost, ne bismo mogli usporediti različite ekonomske planove i donijeti korektne odluke.

Kapital i kamata su najčešće izraženi u jedinicama istog dobra, npr. u terminima neke apstraktne monetarne jedinice. Takodjer, kamata se odnosi na unaprijed dogovorenu vremensku jedinicu, tipično - godinu dana.

Jednostavna kamata: iznos C je deponiran uz uvjet da mu se pridodaje jednostavna kamata po stopi i godišnje, tako da se nakon n godina isplaćuje iznos

$$C(1+ni).$$

Godišnja kamatna stopa i nakon 1 godine ulogu pridodaje iznos Ci. Obično je $i < 1$ i izražava se postotkom, npr.

$$i = 0.09 = \frac{9}{100} = 9\%.$$

Primjetimo da se kamata uvijek *odnosi na danu vremensku jedinicu*, no ona ne mora biti cijela godina, kao što ni n ne mora biti cijeli broj. Nakon t godina jednostavna kamata iznosu C pridodaje

$$I_{simp}(i,t,C) := Cti\,.$$

Primjer

Uzmimo $n = 2$, po isteku dvije godine dobit ćemo iznos $C(1 + 2i)$. Ako uz iste uvjete ponovo uložimo iznos koji nam pripada nakon prve godine $C(1 + i)$ dobit ćemo iznos $C(1 + i)(1 + i)$. Razlika je dakle

$$Ci^2.$$

Taj iznos je u 2. godini donijela kamata iz 1. godine. Indukcijom vidimo da takvim ulaganjem nakon n godina dobivamo

$$C(1 + i)^n\,,$$

od čega je sama kamata $C((1 + i)^n - 1)$.

U sistemu jednostavne kamate, kamata ne donosi kamatu $\longrightarrow$ NEKONZISTENTNOST.

2. Složena kamatna

Osnovna vremenska jedinica neka je 1 godina. Kamata se isplaćuje na kraju fiksiranog perioda. Na investiciju u iznosu 1 uloženu u trenutku t na period od 1 godine isplaćuje se u trenutku $t+1$ iznos $1+i(t)$. Izraz $i(t)$ naziva se *(efektivna) kamatna stopa* za jedinični vremenski period $[t, t+1]$.
Mi pretpostavljamo da kamatna stopa ne ovisi o visini uloženog kapitala. Dakle na iznos C dobit ćemo

$$C(1+i(t)).$$

U sistemu *složene kamate* na iznos C uložen u $t = 0$ imat ćemo u trenutku $n \in N$ (nakon n godina)

$$C(1+i(0))(1+i(1))\cdots(1+i(n-1))\,,$$

ako se kamata mijenja godišnje, ili $C(1+i)^n$, ukoliko je kamatna stopa konstantna. Gornji iznos zovemo *akumulacija od C za n godina po kamatnoj stopi i.*

Nominalne kamatne stope

Prepostavljamo: vremenska jedinica je i dalje 1 godina, a kamatna stopa ne ovisi o visini uloženog kapitala (što je često nerealno). Promatramo transakcije u trajanju h, gdje h nije nužno cijeli broj. Dovoljno je promatrati povrat na depozit u iznosu 1.
Neka je iznos 1 investiran u trenutku t, sa $A(t, t+h)$ označimo njegovu vrijednost u trenutku $t+h$. Možemo pisati

$$A(t, t+h) = 1 + h i_h(t). \tag{2.1}$$

Broj $i_h(t)$ nazivamo *godišnja nominalna kamatna stopa u periodu* $[t, t+h]$, tj.

$$i_h(t) = \frac{A(t, t+h) - 1}{h}\,.$$

Primjetite da uz $i_h(t)$ kao godišnju k.s. u sustavu jednostavne kamate dobijemo baš $A(t, t+h)$ kao akumulaciju iznosa 1 u intervalu $[t, t+h]$.

Za $h = 1$ nominalna i efektivna stopa su jednake, odnosno $i_1(t) = i(t)$. U praksi često pretpostavljamo da su kamatne stope (odn. akumulacije $A(t, t+h)$) neovisne o trenutku t. Tada pišemo

$$i_h(t) = i_h, \qquad \text{za svako } t\,.$$

Kada vrijedi ova prepostavka govorimo o *sustavu fiksne kamatne stope*. Dakle, u njemu $A(t, t+h)$ ovisi samo o h.

Najinteresantniji slučaj je $h = 1/p$, $p \in \mathbb{N}$, a u praksi posebno polugodišnje, kvartalne, mjesečne ili dnevne transakcije, tj. $h = 1/2, 1/4, 1/12, 1/365$. Tada pišemo

$$i_{1/p} = i^{(p)}, \qquad p \in \mathbb{N}\,,$$

dakle uvodimo samo novu oznaku, a (2.1) i dalje kaže da iznos 1 položen u bilo kom času po isteku $1/p$ godina daje

$$1 + \frac{1}{p} i^{(p)}\,.$$

Kaze se da je $i^{(p)}$ godišnja *nominalna kamatna stopa plativa (konvertibilna)* p *puta godišnje [convertible* p*thly].*

3. Akumulacijski faktori

Za $t_1 \leq t_2$ definiramo veličinu $A(t_1, t_2)$ kao *akumulaciju* (tj. ukupni kapital) u trenutku t_2 koji proizvodi depozit 1 investiran u trenutku t_1. Po definiciji (2.1) je

$$A(t, t+h) = 1 + hi_h(t), ,$$

a zovemo ga *akumulacijski faktor u periodu* $[t_1, t_2]$. Naravno, $A(t, t) = 1$. Akumulacijske faktore (zasad) smatramo unaprijed poznatim (predvidivim).

Uzmimo $t_0 \leq t_1 \leq t_2$. Investicija u iznosu 1 u trenutku t_0 u trenutku t_2 vrijedi $A(t_0, t_2)$. S druge strane ako akumulirani iznos u trenutku t_1 reinvestiramo do t_2 dobit ćemo

$$A(t_0, t_1)A(t_1, t_2).$$

Dakle, ako je tržište konzistentno očekujemo

$$A(t_0, t_2) = A(t_0, t_1)A(t_1, t_2), \qquad \text{za svako } t_0 \leq t_1 \leq t_2. \tag{3.1}$$

PRINCIP KONZISTENCIJE

Pa indukcijom slijedi

$$A(t_0, t_n) = A(t_0, t_1)A(t_1, t_2) \cdots A(t_{n-1}, t_n), \qquad \text{za svako } t_0 \leq \cdots \leq t_n.$$

U nastavku pretpostavljamo konzistentnost tržišta (u praksi to ne vrijedi zbog troškova transakcije, poreza i sl.) i fiksnu efektivnu kamatnu stopu.

Fiksirajmo $p \in \mathbb{N}$, izračunajmo $i^{(p)}$. Iz (2.1) imamo

$$A(t, t + \frac{1}{p}) = 1 + \frac{1}{p} i^{(p)},$$

posebno jer je e.k.s. fiksna

$$A(0, 1/p) = A(1/p, 2/p) = \cdots = A((p-1)/p, 1)\,,$$

pa po principu konzistencije

$$\left(1 + \frac{1}{p} i^{(p)}\right)^p = 1 + i, \qquad \text{jer}$$

$$A(0, 1/p) A(1/p, 2/p) \cdots A((p-1)/p, 1) = A(0, 1)\,,$$

odakle slijedi

$$i^{(p)} = p\left((1+i)^{1/p} - 1\right)\,.$$

Iz binomne formule se lako vidi:

$$i^{(p)} \leq i, \qquad \text{za svaki } p \geq 1.$$

Prepostavimo da za neko t postoji

$$\delta(t) := \lim_{h \to 0+} i_h(t)\,,$$

tada se ova veličina naziva *intenzitet kamate (po jedinici vremena) u trenutku* t. U sustavu fiksne kamatne stope vrijedi

$$\delta = \delta(t) = \lim_{p \to \infty} i^{(p)} = \left((1+i)^x\right)' \big|_{x=0}\,.$$

Dakle je

$$\delta = \ln(1+i) \quad \text{odn.} \quad e^{\delta} = 1 + i\,.$$

Ideja: prinos od kamate na iznos C u infinitezimalno malom intervalu $[t, t + \mathrm{d}t]$ je

$$\approx C\delta(t)\mathrm{d}t.$$

Teorem 1 *Ako funkcija* $A : [0, \infty)^2 \to (0, \infty)$ *zadovoljava princip konzistencije (3.1), te ako je* $g(t) = A(0, t)$ *neprekidno derivabilna funkcija na* $[0, \infty)$*, tada postoji neprekidna funkcija* $\delta : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ *tako da*

$$A(t_1, t_2) = \exp\left(\int_{t_1}^{t_2} \delta(t) dt\right), \qquad \text{za sve } t_2 > t_1 \geq 0$$

Dokaz. Iz (3.1) slijedi $A(t, t) = 1$ za svako $t \geq 0$. Definirajmo

$$\delta(t) = \lim_{h \to 0+} \frac{A(t, t+h) - 1}{h} = \lim_{h \to 0+} \frac{A(0, t+h) - A(0, t)}{hA(0, t)}$$

i $f(t) = \ln g(t)$. Sada je

$$\delta(t) = g'(t)/g(t) = f'(t).$$

Dakle f je primitivna funkcija funkcije δ koja je neprekidna, pa je primjenjiva Newton-Leibnizova formula. Odavde slijedi

$$f(t) = \ln A(0,t) = \int_0^t \delta(s)\mathrm{d}s$$

i konačno iz (3.1) slijedi $A(t_1,t_2) = \exp(f(t_2) - f(t_1))$, tj. tvrdnja teorema.

Mi u nastavku pretpostavljamo da postoji (po dijelovima) neprekidna funkcija δ t.d. vrijedi

$$A(t_1,t_2) = \exp(\int_{t_1}^{t_2} \delta(t)\mathrm{d}t), \qquad \text{za sve } t_2 > t_1 \geq 0.$$

Tada vrijedi

$$i_h(t) = \frac{\exp(\int_t^{t+h} \delta(t)\mathrm{d}t) - 1}{h}.$$

Sada očito u točkama neprekidnosti od δ vrijedi

$$i_h(t) \approx \frac{e^{\delta(t)h} - 1}{h} \to \delta(t)$$

za $h \to 0+$, dakle intenzitet kamate je upravo $\delta(t)$ za takve t. Pokažite to rigorozno.

Nadalje, ako je $\delta(t) \equiv \delta$ za svako t, tada

$$A(0,t) = e^{\delta t} = (1+i)^t, \qquad \text{za sve } t \geq 0\,,$$

a ne samo cijele brojeve.

Posebno, u periodu $[0, t]$, u sustavu složene kamate glavnici C se dodaje iznos

$$C\left(\exp(\int_0^t \delta(s)\mathrm{d}s) - 1\right).$$

Taj iznos se naziva i *prihod od kamata*, a u slučaju da je kamata fiksna ($\delta \equiv \ln(1+i)$) označavamo ga sa:

$$I_{comp}(i, t, C) := C(A(0, t) - 1) = C((1+i)^t - 1)\,.$$

Korolar 2 *Uz proizvoljnu fiksnu e.k.s.* $i > 0$ *i glavnicu* $C \geq 0$ *vrijedi*

$$\begin{aligned} I_{simp}(i, t, C) &> I_{comp}(i, t, C), \qquad \textit{ako} \quad t \in (0, 1), \\ I_{simp}(i, t, C) &< I_{comp}(i, t, C), \qquad \textit{ako} \quad t \in (1, \infty). \end{aligned}$$

Dokaz. Koristite $I_{simp}(i, t, C) = itC$ i pokažite $f(t) = C((1+i)^t - 1)$ je strogo konveksna i rastuća.

U praksi se jednostavno ukamaćivanje više gotovo i ne koristi, osim iznimno za obračun kamate u kraćim vremenskim razmacima, kada za male i daje približno istu kamatu kao i složeno. Iznimka je i obračun zateznih kamata u RH, koji po Vjerodostojnom tumačenju Sabora RH od 7. svibnja 2004. kaže

> *"U dvojbi može li se konformni [složeni] način uračunavanja zateznih kamata primjenjivati u slučaju kašnjenja s ispunjenjem dospjelih obveza za razdoblje dulje od godinu dana smatra se da to nije moguće već se za razdoblje dulje od godinu dana treba primjenjivati proporcionalni (prosti) [jednostavni] način obračuna zateznih kamata."*

Primjer Neka se zatezna kamata obračunava jednostavnim sustavom po stopi od 15%. Ako je dužnik duguje iznos 1 i može ga uložiti po e.k.s. i tokom 15 godina, koliki mora biti i da bi mu se odugovlačenje s otplatom duga isplatilo?

R. Mora biti $I_{simp}(0.15, 15, C) < I_{comp}(i, 15, C)$, tj.

$$15 \cdot 0.15 < (1+i)^{15} - 1.$$

Dakle i mora biti $> 8.17466\%$.

Korolar 3 *Uz fiksnu e.k.s.* $i > 0$ *vrijedi*

$$i > i^{(2)} > i^{(3)} > i^{(4)} > \cdots$$

Dokaz. Pokažite $f(t) = t(e^{\delta/t} - 1)$ je strogo padajuća na $[0, \infty)$.

Sadašnje vrijedosti tokova novca

Ako u trenutku t_1 investiramo depozit u iznosu $C/A(t_1, t_2)$ on u trenutku t_2 naraste do iznosa C. Kažemo da je

$$C/A(t_1, t_2) = C \exp(-\int_{t_1}^{t_2} \delta(s) \mathrm{d}s)$$

diskontirana vrijednost u t_1 *iznosa* C *koji dospijeva u* t_2. Posebno

$$C \exp(-\int_{0}^{t} \delta(s) \mathrm{d}s)$$

zovemo *sadašnja vrijednost iznosa* C *koji dospijeva u trenutku* t.

Uvedimo i oznaku

$$v(t) = \exp(-\int_0^t \delta(s)\mathrm{d}s)$$

za sadašnju vrijednost jediničnog iznosa koji dospjeva u trenutku $t \geq 0$. Za $t < 0$, funkcija $v(t)$ je akumulacija od iznosa 1 u intervalu $[t, 0]$.

Sadašnja vrijednost toka novca $\mathcal{C} = ((t_j, c_j) : j = 1, \ldots, m)$ je

$$V_0(\mathcal{C}) = \sum_{j=1}^{m} c_j v(t_j)\,, \tag{3.2}$$

uz prepostavku da red konvergira ako je $m = \infty$. Kada je e.k.s. i fiksna za sad. vrijednost koristimo i oznaku *NPV*$_{\mathcal{C}}(i) = V_0(\mathcal{C})$.

Primjetite da je tek na osnovu poznate k.s. moguće odrediti koji izmedju više tokova novca treba izabrati. Uz vrlo jednostavne prepostavke (zero transaction costs, interest independent on scaling, no satiation), taj izbor je jasan i neovisan o osobnim preferencama pojedinca u pogledu buduće potrošnje ili sl.

Neprekidni tokovi novca

Kao matematičku idealizaciju možemo promatrati i *neprekidne tokove novca*, npr. kada se radi o vrlo frekventnim isplatama.

Neprekidni tok novca je (lokalno) Riemann integrabilna funkcija $\rho : [0, \infty) \to \mathbb{R}$. Vrijednost $\rho(t)$ zovemo stopa isplate po jedinici vremena u trenutku t.

Dakle, u infinitezimalno malom vremenskom periodu $[t, t + \mathrm{d}t]$ isplata iznosi

$$\rho(t) \cdot \mathrm{d}t \, .$$

Ukupnu akumulaciju u intervalu $[0, t]$ označimo s $M(t)$, ona se u infinitezimalnom intervalu $[t, t + \mathrm{d}t]$ uveća za

$$M(t)\delta(t)\mathrm{d}t + \rho(t)\mathrm{d}t \, ,$$

pa M mora zadovoljati diferencijalnu jednadžbu

$$M'(t) = M(t)\delta(t) + \rho(t) \, .$$

Ako je $M(0) = 0$, rješenje se nadje kao

$$M(h) = \int_0^h \exp(\int_t^h \delta(s)\mathrm{d}s)\rho(t)\mathrm{d}t\,.$$

U skladu sa (3.2), sadašnju vrijednost neprekidnog toka novca $\mathcal{C} = (\rho(t))_{t\in[0,h]}$ računamo kao

$$V_0(\mathcal{C}) = \int_0^h v(t)\rho(t)\mathrm{d}t\,.$$

Ako nas zanima vrijednost u nekoj drugoj vremenskoj točki t' dovoljno je podijeliti gornji iznos sa $v(t')$. To dakako vrijedi i za diskretne tokove novca.

Označimo s $\mathcal{C}$ diskretni ili neprekidni tok novca, a njegovu vrijednost u času t sa $V_t(\mathcal{C})$, tada za sve $s, t \in \mathbb{R}_+$ imamo formulu

$$V_t(\mathcal{C}) = \frac{v(s)}{v(t)} V_s(\mathcal{C}).$$

Posebno

$$V_t(\mathcal{C}) = \frac{1}{v(t)} V_0(\mathcal{C}).$$

Intenzitet kamate se katkad modelira Stoodleyovom formulom

$$\delta(t) = p + \frac{s}{1 + re^{st}},$$

za pozitivne konstante p, r i s. U praksi ove parametre procjenjujemo nekom statističkom metodom.

4. Složeno ukamaćivanje uz fiksnu e.k.s.

Do kraja poglavlja prepostavljamo fiksnu efektivnu kamatnu stopu. Uočimo

$$v(t) = e^{-\delta t} = v^t \,,$$

uz oznaku $v = e^{-\delta}$.

Kamata unaprijed

Za posudbu iznosa 1 sada, u trenutku 1 moramo platiti naknadu i. Kolika bi naknada bila ako je želimo platiti odmah?

Odgovor je očito

$$d = vi = \frac{i}{1+i} = 1 - v \,.$$

Iznos d se zove *efektivna diskontna (ili anticipativna) kamatna stopa po jedinici vremena*.

Kamata neprekidno

Pretpostavimo da kamatu želimo otplaćivati neprekidno po fiksnoj stopi u intervalu $[0, 1]$. Označimo taj iznos sa x, iz

$$d = \int_0^1 e^{-\delta t} x \mathrm{d}t = \frac{x}{\delta}(1 - e^{-\delta}) = \frac{x}{\delta} d$$

slijedi

$$x = \delta \, .$$

Osnovne funkcije složenog ukamaćivanja

	δ	i	v	d
δ	$\cdot$	$e^{\delta}-1$	$e^{-\delta}$	$1-e^{-\delta}$
i	$\ln(1+i)$	$\cdot$	$1/(1+i)$	$i/(1+i)$
v	$-\ln v$	$1/v-1$	$\cdot$	$1-v$
d	$-\ln(1-d)$	$1/(1-d)-1$	$1-d$	$\cdot$

Uočimo

$$\lim_{i\to 0+}\frac{\delta(i)}{i}=\lim_{i\to 0+}\frac{\ln(1+i)}{i}=1$$

$$\lim_{i\to 0+}\frac{d(i)}{i}=\lim_{i\to 0+}\frac{i/(1+i)}{i}=1$$

Kamata p puta godišnje

Fiksirajmo $p \in \mathbb{N}$. Ako želimo kamatu otplatiti u p obroka u vremenskim trenutcima $1/p, 2/p, \ldots, p/p$ u jednakim iznosima, recimo x/p. Nadjimo x iz

$$i = \sum_{k=0}^{p-1} \frac{x}{p}(1+i)^{k/p} = \frac{x}{p}\frac{i}{(1+i)^{1/p}-1}\,.$$

Slijedi $x = p((1+i)^{1/p} - 1) = i^{(p)}$, x je dakle nominalna kamatna stopa plativa p puta godišnje. To je i razlog za ovakav naziv, jer je kamata nominalno $i^{(p)}$ plativo p puta godišnje, a stvarna e.k.s. je i dalje i dakako.

Ako želimo kamatu otplatiti u p obroka u vremenskim trenucima $0, 1/p, 2/p, \ldots, (p-1)/p$ u jednakim iznosima, recimo $d^{(p)}/p$. Izjednačavanjem vrijednosti u $t = 0$ direktno se vidi da je

$$(1 - d^{(p)}/p)^p = 1 - d\,,$$

odnosno

$$d^{(p)} = p(1 - (1-d)^{1/p})$$

Veličina $d^{(p)}$ se zove *nominalna diskontna kamatna stopa plativa* p *puta godišnje.*

Jasno je $d^{(p)} < i^{(p)}$. Zapravo vrijedi

$$i = i^{(1)} > i^{(2)} > i^{(3)} > \cdots > \delta > \cdots > d^{(3)} > d^{(2)} > d^{(1)} = d$$

5. Jednostavne financijske rente

Financijske rente su (deterministički) tokovi novca kod kojih se u pravilnim vremenskim razmacima vrše uplate u jednakim iznosima.

Promotrimo prvo tok novca kod kojega se u trenucima $t_1 = 1, t_2 = 2, \ldots, t_n = n$ uplaćuje iznos 1. Takvu rentu zovemo *postnumerando ili plativa unatrag (annuity-certain)*. Njena sadašnja vrijednost ovisi dakako o e.k.s. i i iznosi

$$a_{\overline{n}|} = a_{\overline{n}|,i} = v + \cdots + v^n = \frac{1 - v^n}{i}\,.$$

Iz formule za sadašnju vrijednost toka novca jasno je da ako uplate iznose C sadašnja vrijednost postaje $Ca_{\overline{n}|}$.

Ako se uplate iznosa 1 vrše u trenucima $t_1 = 0, t_2 = 2, \ldots, t_n = n - 1$ renta se zove *prenumerando ili plativa unaprijed (annuity-due)*. Njena sadašnja vrijednost je:

$$\ddot{a}_{\overline{n|}} = 1 + \cdots + v^{n-1} = \frac{1 - v^n}{d}\,.$$

U trenutku zadnje uplate obje ove rente imaju vrijednost

$$s_{\overline{n|}} = (1+i)^{n-1} + \cdots + (1+i) + 1 = \frac{(1+i)^n - 1}{i}\,.$$

a godinu dana nakon toga

$$\ddot{s}_{\overline{n|}} = (1+i)^n + \cdots + (1+i)^2 + 1 + i = \frac{(1+i)^n - 1}{d}$$

Ove vrijednosti su zovu i akumulacije financijskih renti.

Perpetuities (vječne ili beskonačne rente)

Pogledajmo sada slučaj kada se uplate vrše postnumerando odn. prenumerando ali u beskonačnost ($n = \infty$). Jasno je da

$$a_{\overline{\infty}|} = v + v^2 + v^3 + \cdots = \tfrac{1}{i}\,,$$
$$\ddot{a}_{\overline{\infty}|} = 1 + v + v^2 + \cdots = \tfrac{1}{d}\,.$$

Neprekidne rente

Neka je $n \geq 0$ ne nužno cijeli broj. Sadašnja vrijednost rente koja se isplaćuje kontinuirano u intervalu $[0, n]$ po fiksnoj godišnjoj stopi 1 iznosi

$$\bar{a}_{\overline{n}|} = \frac{1 - v^n}{\delta}\,.$$

Odgođene rente

Ako rente imaju odgodu od m godina njihova sadašnja vrijednost je jednostavnim argumentima

$$
\begin{aligned}
{}_{m|}a_{\overline{n|}} = a_{\overline{n+m|}} - a_{\overline{m|}} &= v^m a_{\overline{n|}}, \\
{}_{m|}\ddot{a}_{\overline{n|}} &= \ddot{a}_{\overline{n+m|}} - \ddot{a}_{\overline{m|}}, \\
{}_{m|}\bar{a}_{\overline{n|}} &= \bar{a}_{\overline{n+m|}} - \bar{a}_{\overline{m|}}.
\end{aligned}
$$

Pravilno pomjenjive rente

Posebno važne su sljedeće dvije rastuće rente:

- iznosi $1, 2, \ldots, n$ uplaćuju se u trenucima $1, \ldots, n$
- iznosi $1, 2, \ldots, n$ uplaćuju se u trenucima $0, \ldots, n-1$

Sadašnje vrijednosti ovakvih renti označimo sa $(Ia)_{\overline{n|}}$ odn. $(I\ddot{a})_{\overline{n|}}$.

Po definiciji je

$$(Ia)_{\overline{n|}} = v + 2v^2 + \cdots + nv^n,$$

otkuda množenjem s $1+i$ i oduzimanjem dviju jednakosti slijedi

$$i(Ia)_{\overline{n|}} = 1 + v + \cdots + v^{n-1} - nv^n.$$

Pa vrijedi

$$(Ia)_{\overline{n|}} = \frac{\ddot{a}_{\overline{n|}} - nv^n}{i} \quad \text{odn.} \quad (I\ddot{a})_{\overline{n|}} = (1+i)(Ia)_{\overline{n|}}.$$

Pokažite da je

$$(I\ddot{a})_{\overline{n|}} = 1 + a_{\overline{n-1|}} + Ia_{\overline{n-1|}}.$$

Ako npr. renta traje n godina i počinje uplatom iznosa a u trenutku 1, te nakon toga uplaćuje iznose $a+b, a+2b, \ldots, a+(n-1)b$ u trenucima $2, 3, \ldots, n$ njena sad. vrijednost lako se nadje kao

$$(a-b)a_{\overline{n|}} + b(Ia)_{\overline{n|}} \, .$$

Rente koje se isplaćuju u višegodišnjim intervalima

Za $r \in \mathbb{N}$, neka se renta uplaćuje u iznosu x ali u trenucima $r, 2r, \ldots, kr$. Sadašnja vrijednost ovakve rente je

$$\frac{x}{s_{\overline{r|}}} a_{\overline{kr|}}$$

Rente plative p puta godišnje

Neka se u trenucima $1/p, 2/p, \ldots, n \cdot p/p$ uplaćuje iznos 1/p. Sadašnja vrijednost ovakve postnumerando rente je

$$a_{\overline{n}|}^{(p)} = \frac{i}{i^{(p)}} a_{\overline{n}|} \, .$$

Naime uplata iznosa $i^{(p)}/p$ u trenucima $(k-1)+1/p, (k-1)+2/p, \ldots, k$ ekivalentno je uplati iznosa i u trenutku k.
Ako se radi o prenumerando renti tj. uplate su u trenucima $0, 1/p, 2/p, \ldots, (n \cdot p - 1)/p$ dobijemo

$$\ddot{a}_{\overline{n}|}^{(p)} = \frac{i}{d^{(p)}} a_{\overline{n}|} \, .$$

6. Prinos

Diskretni tok novca $\mathcal{C}$ ima sadašnju vrijednost

$$NPV_{\mathcal{C}}(i) = \sum_{j=1}^{m} c_j e^{-\delta t_j}$$

gdje je $\delta = \ln(1+i)$. Mi tražimo intenzitet kamate δ tako da vrijedi

$$\sum_{j=1}^{m} c_j e^{-\delta t_j} = 0 \tag{6.1}$$

Ako takvo rješenje δ_0 postoji i jedinstveno je zovemo ga *intenzitet kamate impliciran transakcijom*. Pripadna e.k.s. $i_0 = e^{\delta_0} - 1$ naziva se *prinos od transakcije* $\mathcal{C}$. Uočite da je $i_0 \in (-1, \infty)$.

Alternativno, prinos i_0 možemo naći i kao jedinstveno rješenje u skupu $(-1, \infty)$ (kad ono postoji) jednadžbe

$$NPV_{\mathcal{C}}(i_0) = 0\,.$$

Drugim riječima, uz e.k.s. i_0 vrijednost svih uplata jednaka je vrijednosti svih isplata.

Jednadžba (6.1) se lako generalizira na neprekidne tokove novca.

Primjer (prinos ne postoji uvijek)

Pretpostavimo da se u vremenskim trenucima $t_1 = 0,\ t_2 = 1$ i $t_3 = 2$ uplaćuju iznosi

a) $c_1 = -1.1,\ c_2 = 2.1$, $c_3 = -1$
b) $c_1 = -1,\ c_2 = 2.3$, $c_3 = -1.2$
c) $c_1 = -1,\ c_2 = 2$, $c_3 = -1.1$
d) $c_1 = -1,\ c_2 = b$, $c_3 = -1$, $b > 0$ proizvoljan.
e) $c_1 = -1,\ c_2 = -1$, $c_3 = a$, $a > 0$ proizvoljan.

Uočite da prinos postoji u slučaju e), te u slučaju d) za $b = 2$, u svim ostalim slučajevima prinos ne postoji.

Projekt je *profitabilan* ako je

$$NPV_{\mathcal{C}}(i_1) > 0\,,$$

gdje je i_1 e.k.s. koja vrijedi na tržistu.

Tipično je $NPV_{\mathcal{C}}(\cdot)$ padajuća funkcija, u tom slučaju projekt je profitabilan ako

$$i_0 > i_1.$$

Primjer (dva financijska projekta)

Ako odabiremo izmedju dva investicijska projekta, npr. A i B, mogli bismo ih usporediti preko njihovih prinosa i_A i i_B. Uočite da iz $i_A > i_B$ ne slijedi da je nužno projekt A profitabilniji. Potrebno je usporediti njihovu (sadašnju) vrijednost u odn. na e.k.s. na tržištu, tj. e.k.s. i_1 po kojoj se možemo zaduživati odn. ulagati svoj novac. Projekt A je profitabilniji ako vrijedi

$$NPV_A(i_1) > NPV_B(i_1).$$

Teorem 4 *Za svaki tok novca u kojem postoje i uplate i isplate, te sve uplate prethode svim isplatama (ili obrnuto) jednadžba (6.1) ima jedinstveno rješenje.*

Dokaz. Neka su (b.s.o.) $c_i > 0,\ i = 1, \ldots, k$ te $c_i < 0,\ i = k+1, \ldots, n$, za neki $1 \leq k < n$. Želimo naći δ tako da

$$(c_1 e^{-\delta t_1} + \cdots c_k e^{-\delta t_k}) + (c_{k+1} e^{-\delta t_{k+1}} + \cdots c_n e^{-\delta t_n}) = 0$$

Pogledajmo vrijednost ovog toka novca u $t = t_k$ ona iznosi $f(\delta) = h(\delta) + g(\delta)$, gdje definiramo

$$g(\delta) = c_1 e^{\delta(t_k - t_1)} + \cdots + c_k e^{\delta(t_k - t_k)},$$

$$h(\delta) = c_{k+1} e^{-\delta(t_{k+1} - t_k)} + \cdots + c_n e^{-\delta(t_n - t_k)}\,.$$

Funkcije g i h su strogo rastuće, pa je i f strogo rastuća. No kako je f neprekidna, a vrijedi

$$\lim_{\delta \to -\infty} f(\delta) = -\infty \qquad \text{odn.} \qquad \lim_{\delta \to \infty} f(\delta) = \infty\,,$$

slijedi da postoji jedinstvena nultočka za f. $\square$

Teorem 5 *Za tok novca* $\mathcal{C} = ((t_j, c_j) : j = 1, \ldots, m)$ *definiramo* $S_r = \sum_{j=1}^{r} c_j,\ r = 1, \ldots, m$. *Ako se predznak u nizu* $S_1, \ldots, S_m$ *promjeni točno jednom i ako* $S_1 S_m < 0$, *tada jednadžba* $NPV_{\mathcal{C}}(i) = 0$ *ima jedinstveno rješenje na skupu* $(0, \infty)$.

Dokaz. Neka je b.s.o. $S_1, S_2, \ldots, S_k > 0$, a $S_{k+1}, S_{k+2}, \ldots, S_m \leq 0$. Uzmimo $t' \in (t_k, t_{k+1})$. Definirajmo

$$g(\delta) = c_1 e^{\delta(t'-t_1)} + \cdots + c_k e^{\delta(t'-t_k)}$$

i

$$h(\delta) = c_{k+1} e^{-\delta(t_{k+1}-t')} + \cdots + c_n e^{-\delta(t_n-t')}\,.$$

Vrijednost ovog toka novca u t' je upravo $f(\delta) = g(\delta) + h(\delta)$. Uočimo da je $g(0) > 0$ i g monotono raste prema ∞ za $\delta \to \infty$, a s druge raste i h za $\delta \to \infty$, ali prema 0 (derivirajte ili dajte ekonomski argument).
No $f(0) = S_m < 0$, a f je neprekidna dakle $f(\delta_0) = 0$ ima jedinstveno rješenje na $(0, \infty)$. $\square$

Napomena

Prinos se ponekad definira i ako postoji jedinstveno rješenje jednadžbe $NPV_{\mathcal{C}}(i) = 0$ na skupu $(0, \infty)$. Dakle, kada god su zadovoljeni uvjeti prethodnog teorema, mi to ipak nećemo činiti.

7. Otplata kapitala i pričuva

Net reserve (Neto pričuva) i otplata duga

Dva toka novca $\mathcal{C}$ i $\mathcal{C}'$ su jednako vrijedna ako je za neko $t \in \mathbb{R}$

$$V_t(\mathcal{C}) = V_t(\mathcal{C}')\,.$$

Tada im je vrijednost jednaka za svako $t \in \mathbb{R}$ i možemo ih smatrati ekvivalentnima. Posebno sad. vrijednost toka novca zovemo *jednokratnom neto premijom*, jer uplata iznosa $V_0(\mathcal{C})$ u $t = 0$ ima jednaku vrijednost kao $\mathcal{C}$. Premija se ne plaća često na taj način. Ako se premija plaća kao tok novca $\mathcal{C}'$ i ako vrijedi gornja jednakost za neko $t \in \mathbb{R}$, tok $\mathcal{C}'$ zovemo *neto premijom* (za $\mathcal{C}$).

Primjer (otplata duga) Pretpostavimo da se iznos S isplaćen u $t = 0$ (dug) otplaćuje u trenucima $1, 2, \ldots, n$ i iznosima $r_1, r_2, \ldots, r_n$. Neka je ${}_kW$ vrijednost u trenutku $t = k$ akumuliranih otplata u periodu $[0, k)$, S_k neka je ukupna vrijednost preostalog duga za period $[k, \infty)$ u času k. Ako su premije bile u neto iznosu, tj. ako

$$S = vr_1 + v^2 r_2 + \cdots v^n r_n$$

iznos ${}_kW$ je očito akumulacija za tok novca $\{(i, r_i) : i = 1, \ldots, n\}$ u trenutku k. Tada je za $k \geq 1$ očito

$${}_kW + S_k = (1+i)^k S \quad \text{i} \quad {}_kW = (1+i)\left({}_{k-1}W + r_{k-1}\right) .$$

Još vrijedi

$$S_k = (1+i)(S_{k-1} - r_{k-1}), \quad \text{pa} \quad S_k = S(1+i)^k - \sum_{j=1}^{k-1} (1+i)^{k-j} r_j,$$

za $k \geq 1$, uz prepostavku $S_0 = S$, a $r_0 = 0$.

Primjer (pričuva) Pretpostavimo da želimo isplatu svote 1 u trenutku n. Ako se premija plaća godišnje prenumerando tokom perioda $[0, n)$ u iznosu P, onda je ona *neto premija* ako zadovoljava

$$P\ddot{a}_{\overline{n|}} = v^n \,.$$

Neto pričuva u trenutku $t \in \mathbb{N}$ je vrijednost akumuliranih otplata u periodu $[0, t)$, tj.

$${}_tV_{\overline{n|}} = P\ddot{a}_{\overline{t|}}(1+i)^t \,.$$

to je tzv. retrospektivna formula No neto pričuvu lako možemo dobiti i računajući unaprijed kao vrijednost osigurane svote u trenutku t umanjenu za vrijednost nedospjelih premija

$${}_tV_{\overline{n|}} = v^{n-t} - P\ddot{a}_{\overline{n-t|}} \,.$$

To je tzv. prospektivna formula za neto pričuvu. Neto rezerva se ekvivalentno računa i za druge tokove novca.

Zillmer reserve

Pitanje je kolika mora biti premija ako uračunamo *inicijalne troškove* I i *troškove obnavljanja* e. Ovakvu premiju označavamo sa P^* i zovemo *bruto premija*.

Prepostavimo da želimo isplatu iznosa 1 u trenutku n uz ove uvjete. Postavimo jednadžbu vrijednosti u $t = 0$

$$P^* \ddot{a}_{\overline{n|}} - e\ddot{a}_{\overline{n|}} - I = v^n$$

Cilmerizirana pričuva [Zillmer reserve] u trenutku $t \in \mathbb{N}$ je vrijednost osigurane svote i budućih troškova umanjena za vrijednost nedospjelih premija

$${}_tV^*_{\overline{n|}} = v^{n-t} + (e - P^*)\ddot{a}_{\overline{n-t|}} = (1 + I)_tV_{\overline{n|}} + I$$

Alternativno i ovu pričuvu možemo dobiti retrospektivno kao vrijednost premija umanjenu za vrijednost troškova do tog momenta, tj.

$${}_tV^*_{\overline{n|}} = P^* \ddot{s}_{\overline{t|}} - I(1 + i)^t - e\ddot{s}_{\overline{t|}} \, .$$