Numerička matematika

10. predavanje

Saša Singer i Nela Bosner

PMF - Matematički odsjek, Zagreb

Sadržaj predavanja

Numerička integracija

Općenito o integracijskim formulama

Zadana je funkcija $f : I \to \mathbb{R}$, gdje je $I = [a, b]$ interval, $b > a$, koji može biti i beskonačan. Želimo izračunati integral

$$I(f) = \int_a^b f(x)\, dx.$$

Za relativno mali skup funkcija f

- ovaj se integral može egzaktno izračunati.

U suprotnom, preostaje približno, numeričko računanje $I(f)$.

Osnovna ideja numeričke integracije je približno računanje integrala $I(f)$, korištenjem:

- vrijednosti funkcije f (eventualno i vrijednosti derivacija) na nekom konačnom skupu točaka ($\approx$ Darboux).

Općenito o integracijskim formulama

Opća integracijska formula ima oblik

$$I(f) = I_m(f) + E_m(f),$$

pri čemu je

- $m + 1$ = broj korištenih točaka (tzv. čvorova integracije),
- $I_m(f)$ = pripadna aproksimacija integrala,
- $E_m(f)$ = pritom napravljena greška.

Ako koristimo samo funkcijske vrijednosti, aproksimacija $I_m(f)$ ima oblik

$$I_m(f) = \sum_{k=0}^{m} w_k^{(m)} f\big(x_k^{(m)}\big),$$

gdje je m neki zadani broj, $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ — tzv. red formule.

Općenito o integracijskim formulama

Točke $x_k^{(m)}$ zovu se čvorovi integracije, a brojevi $w_k^{(m)}$ težinski koeficijenti, ili samo težine.

U općem slučaju, za fiksni m, moramo odrediti $2m+2$ nepoznata parametra formule — čvorove i težine.

- Najčešće se zahtijeva da su integracijske formule egzaktne na vektorskom prostoru polinoma $\mathcal{P}_n$ što višeg stupnja n.

Zbog linearnosti integrala kao funkcionala

$$\int (\alpha f(x) + \beta g(x))\,dx = \alpha \int f(x)\,dx + \beta \int g(x)\,dx,$$

dovoljno je zahtijevati egzaktnost tih formula na nekoj bazi vektorskog prostora — recimo, na $\{1, x, x^2, \ldots, x^m, \ldots\}$.

Newton–Cotesove vs. Gaussove formule

Ako su svi čvorovi fiksirani (zadani), recimo ekvidistantni, onda dobivamo tzv. Newton–Cotesove formule.

- Za njih moramo odrediti $m + 1$ nepoznati težinski koeficijent.
- Uvjeti egzaktnosti na vektorskom prostoru polinoma $\mathcal{P}_m$, baš za $n = m$, vode na sustav linearnih jednadžbi koji je regularan $\Rightarrow$ težine postoje i jedinstvene su.
- Pokazat ćemo da se te formule mogu dobiti i kao integral interpolacijskog polinoma stupnja m, za funkciju f, na zadanoj (na primjer, ekvidistantnoj) mreži čvorova.
- Newton–Cotesove formule se obično koriste kao produljene formule — zbroj "po komadima" domene (integral splajna).

Newton–Cotesove vs. Gaussove formule

Možemo i fiksirati samo neke čvorove, ili dozvoliti da su svi čvorovi "slobodni" (tako da dobijemo što veći stupanj n).

Ako su svi čvorovi slobodni, integracijske formule se zovu formule Gaussovog tipa.

Kod Gaussovih, ali i tzv. težinskih Newton–Cotesovih formula, integral, odnosno, podintegralna funkcija se zapisuje kao

$$I(f) = \int_a^b w(x) f(x)\, dx,$$

pri čemu je funkcija $w \geq 0$ unaprijed zadana tzv. težinska funkcija.

Newton–Cotesove vs. Gaussove formule

Gaussove integracijske formule su egzaktne na vektorskom prostoru polinoma $\mathcal{P}_{2m+1}$, tj. za $n = 2m + 1$,

- što je prostor dvostruko veće dimenzije nego kod Newton–Cotesovih formula.
- Gaussove formule se nikad ne računaju "direktno" iz uvjeta egzaktnosti, jer to vodi na nelinearni sustav jednadžbi.
- Pokazat ćemo vezu Gaussovih formula, funkcije w i ortogonalnih polinoma s težinom w na intervalu $[a, b]$.
  - To omogućava efikasno računanje svih parametara formule — i čvorova i težina!
- Za Gaussove formule nema puno smisla tražiti produljene formule (jer w nije ista na raznim komadima domene).

Tipovi Newton–Cotesovih formula

U praksi se koriste dva tipa Newton–Cotesovih formula:

- zatvorene formule — rubovi intervala a i b su čvorovi,
- otvorene formule — rubovi intervala a i b nisu čvorovi.

Katkad se koriste i

- poluotvorene formule — jedan od rubova, a ili b, je čvor, a drugi nije.

Primjena je u integraciji diferencijalnih jednadžbi sa zadanim početnim uvjetom.

Za početak, uzimamo standardnu težinsku funkciju $w(x) = 1$ (najčešći slučaj u praksi za Newton–Cotesove formule) i ekvidistantnu mrežu čvorova integracije na intervalu $[a, b]$.

Zatvorene Newton–Cotesove formule

Za zatvorenu (često se ispušta) Newton–Cotesovu formulu s $m+1$ točaka, interval $[a, b]$ podijelimo na m podintervala jednake duljine h_m. Čvorovi su

$$x_k^{(m)} = a + kh_m, \quad k = 0, \ldots, m, \quad h_m = \frac{b-a}{m},$$

pa je osnovni oblik zatvorenih Newton–Cotesovih formula

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx I_m(f) = \sum_{k=0}^{m} w_k^{(m)} f(a + kh_m).$$

Ova suma ide po svim točkama, uključivo i rubove intervala.

Otvorene Newton–Cotesove formule

Da bismo dobili otvorene Newton–Cotesove formule s $m+1$ točaka, definiramo

$$x_{-1}^{(m)} := a, \quad x_{m+1}^{(m)} := b.$$

Interval $[a,b]$ podijelimo na $m+2$ podintervala, a čvorovi su

$$x_k^{(m)} = a + (k+1)h_m, \quad k = 0, \ldots, m, \quad h_m = \frac{b-a}{m+2},$$

pa je osnovni oblik otvorenih Newton–Cotesovih formula

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx I_m(f) = \sum_{k=0}^{m} w_k^{(m)} f(a + (k+1)h_m).$$

Ova suma ide samo po "unutarnjim" točkama.

Osnovna trapezna formula

Najjednostavnija (zatvorena) Newton–Cotesova formula — za $m = 1$ (s 2 čvora), zove se trapezna formula. Ona ima oblik

$$I_1(f) = w_0^{(1)} f(x_0) + w_1^{(1)} f(x_0 + h_1),$$

pri čemu je

$$h := h_1 = \frac{b-a}{1} = b - a,$$

pa je $x_0 = a$ i $x_1 = b$.

Napomena. Promjenom reda m, promijenit će se i težine $w_k^{(m)}$,

- tj. $w_k^{(m)}$ vrijede za točno određenu formulu (fiksni m).

Dogovor: Ako znamo za koji red formule m računamo težine, zapis skraćujemo na $w_k := w_k^{(m)}$.

Osnovna trapezna formula

Dakle, osnovna trapezna formula ima oblik

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx I_1(f) = w_0 f(a) + w_1 f(b).$$

Moramo pronaći težinske koeficijente w_0 i w_1, tako da

- integracijska formula egzaktno integrira bazu $\{1, x, \ldots\}$ vektorskog prostora polinoma $\mathcal{P}_n$ što višeg stupnja n.

Zato trebamo izračunati integrale oblika

$$\int_a^b x^k\,dx, \quad k \geq 0,$$

a zatim rezultat koristiti za razne k — redom, $k = 0, 1, \ldots$.

Osnovna trapezna formula

Vrijedi

$$\int_a^b x^k \, dx = \frac{x^{k+1}}{k+1} \Big|_a^b = \frac{b^{k+1} - a^{k+1}}{k+1}, \quad k \geq 0.$$

- Za $k = 0$, tj. za $f(x) = x^0 = 1$, iz egzaktnosti dobivamo

$$b - a = \int_a^b x^0 \, dx = w_0 \cdot 1 + w_1 \cdot 1.$$

Jedna jednadžba nije dovoljna za određivanje dva nepoznata parametra, pa zahtijevamo egzaktnost integracijske formule i na polinomima stupnja 1.

Osnovna trapezna formula

- Za $k = 1$, tj. $f(x) = x$, izlazi

$$\frac{b^2 - a^2}{2} = \int_a^b x\,dx = w_0 \cdot a + w_1 \cdot b.$$

Sada imamo dvije jednadžbe s dvije nepoznanice

$$\begin{aligned} w_0 + w_1 &= b - a \\ aw_0 + bw_1 &= \frac{b^2 - a^2}{2}. \end{aligned}$$

Množenjem prve jednadžbe s $-a$ i dodavanjem drugoj, izlazi

$$(b-a)w_1 = \frac{b^2 - a^2}{2} - a(b-a) = \frac{b^2 - 2ab + a^2}{2} = \frac{(b-a)^2}{2}.$$

Osnovna trapezna formula

Budući da je $b > a$ (granice!), dijeljenjem s $b - a$, dobivamo

$$w_1 = \frac{1}{2}(b - a) = \frac{h}{2}.$$

Drugu težinu w_0 lako izračunamo iz prve jednadžbe linearnog sustava

$$w_0 = b - a - w_1 = \frac{1}{2}(b - a) = \frac{h}{2},$$

pa je $w_0 = w_1 = h/2$. Dakle, integracijska formula $I_1(f)$ glasi

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{h}{2}\big(f(a) + f(b)\big).$$

Zadatak. Ponovite izvod na "simetričnoj" bazi $1, x - (a + b)/2$.

Zašto baš trapezna formula?

Odakle ime trapeznoj formuli? Napišemo li je na malo drugačiji način, kao

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{f(a)+f(b)}{2}\,(b-a),$$

vidimo da je

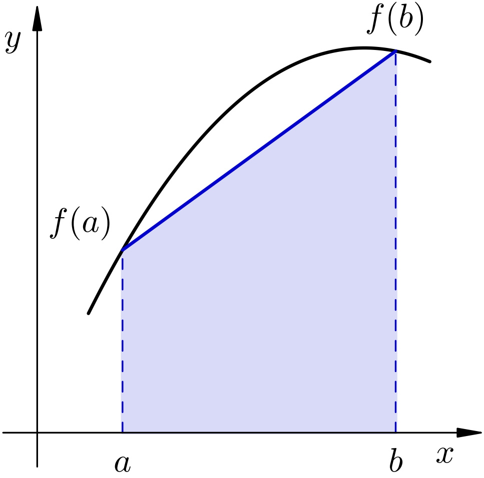
- $(f(a)+f(b))/2$ = srednjica trapeza (stoji okomito), a
- $b-a$ = visina trapeza (leži vodoravno, kao “širina”),

za trapez na slici — v. sljedeća stranica.

Drugim riječima, površinu ispod krivulje aproksimirali smo površinom trapeza.

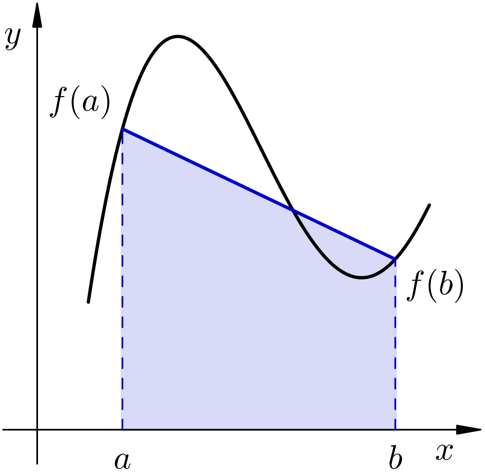
Zašto baš trapezna formula?

Slika aproksimacije integrala funkcije f površinom trapeza.



Zašto baš trapezna formula?

Ovisno o "obliku" funkcije f, slika može izgledati i ovako:



Koje polinome egzaktno integrira trapezna f.?

Trapeznu formulu smo izveli iz uvjeta egzaktnosti na prostoru polinoma $\mathcal{P}_1$ stupnja 1.

- Zato formula egzaktno integrira sve polinome stupnja 1.
- Međutim, ona neće egzaktno integrirati sve polinome stupnja 2, jer ne integrira egzaktno

$$f(x) = x^2.$$

Naime, vrijedi

$$\frac{b^3 - a^3}{3} = \int_a^b x^2 \, dx \neq I_1(x^2) = \frac{a^2 + b^2}{2} \, (b - a).$$

Dakle, tzv. polinomni stupanj egzaktnosti trapezne formule je 1.

Integral linearnog interpolacijskog polinoma

Do trapezne formule možemo doći i na drugačiji način — iz interpolacije.

- Kroz točke $(a, f(a))$ i $(b, f(b))$ povučemo interpolacijski polinom stupnja 1 za funkciju f,
- a zatim ga egzaktno integriramo.

Dobivamo opet trapeznu formulu (dokaz na sljedećoj stranici).

Dakle, vidimo da vrijedi

aproksimacija integrala = integral aproksimacije
aproksimacija integrala = integral (interpolacije).

Ovaj zaključak nam omogućava nalaženje greške trapezne formule! Slično vrijedi i za ostale integracijske formule.

Integral linearnog interpolacijskog polinoma

Interpolacijski pravac za funkciju f, koji prolazi zadanim točkama $(a, f(a))$ i $(b, f(b))$, je

$$p_1(x) = f(a) + f[a, b]\,(x - a).$$

Njegov integral na $[a, b]$ je

$$\begin{aligned}
\int_a^b p_1(x)\,dx &= \left(f(a)x + f[a, b]\,\frac{(x-a)^2}{2}\right)\Big|_a^b \\
&= (b-a)f(a) + \frac{(b-a)^2}{2}\,f[a, b] \\
&= (b-a)f(a) + \frac{(b-a)^2}{2}\,\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \\
&= (b-a)\,\frac{f(a)+f(b)}{2}.
\end{aligned}$$

Greška trapezne formule

Neka je funkcija f integrabilna na $[a, b]$ (inače nema smisla).

Grešku integracijske formule dobit ćemo kao integral greške interpolacijskog polinoma — zapis je u Newtonovom obliku.

- Greška interpolacijskog polinoma stupnja 1, koji funkciju f interpolira u točkama $(a, f(a))$, $(b, f(b))$, na intervalu $[a, b]$ jednaka je

$$e_1(x) = f(x) - p_1(x) = (x - a)\,(x - b)\,f[a, b, x].$$

- Greška trapezne formule je

$$E_1(f) = \int_a^b e_1(x)\,dx = \int_a^b (x - a)\,(x - b)\,f[a, b, x]\,dx.$$

Teorem srednje vrijednosti za integrale

Ostaje samo izračunati $E_1(f)$. Iskoristit ćemo generalizaciju teorema srednje vrijednosti za integrale.

Teorem (Ocjena za integrale s težinama). Neka su funkcije g i w integrabilne na $[a, b]$ i neka je g ograničena, uz

$$m = \inf_{x \in [a,b]} g(x), \quad M = \sup_{x \in [a,b]} g(x).$$

Dodatno, neka je $w(x) \geq 0$ na $[a, b]$. Onda vrijedi

$$m \int_a^b w(x)\,dx \leq \int_a^b w(x) g(x)\,dx \leq M \int_a^b w(x)\,dx.$$

Napomena. Za $w(x) = 1$, ovo ste sigurno već vidjeli!

Teorem srednje vrijednosti za integrale

Dokaz. Zbog $w(x) \geq 0$ na $[a, b]$, za svaki $x \in [a, b]$, vrijedi

$$m \leq g(x) \leq M \implies mw(x) \leq g(x)w(x) \leq Mw(x).$$

Tvrdnja izlazi integriranjem, koristeći monotonost integrala.

■

Teorem (Integralni teorem srednje vrijednosti s težinama).
Neka su funkcije g i w integrabilne na $[a, b]$ i neka je g ograničena, uz

$$m = \inf_{x \in [a,b]} g(x), \quad M = \sup_{x \in [a,b]} g(x).$$

Nadalje, neka je $w(x) \geq 0$ na $[a, b]$.

Integralni teorem srednje vrijednosti s težinama

Tada postoji broj μ, takav da je $m \leq \mu \leq M$, za kojeg vrijedi

$$\int_a^b w(x)g(x)\,dx = \mu \int_a^b w(x)\,dx.$$

Posebno, ako je g neprekidna na $[a, b]$, onda postoji broj $\zeta \in [a, b]$, takav da je

$$\int_a^b w(x)g(x)\,dx = g(\zeta) \int_a^b w(x)\,dx.$$

Napomena. I ovo znate za $w(x) = 1$, tj. za $\int_a^b w(x)\,dx = b - a$.

Integralni teorem srednje vrijednosti s težinama

Dokaz. Ako je

$$\int_a^b w(x)\,dx = 0,$$

onda, po teoremu o ocjeni integrala s težinama, mora vrijediti

$$\int_a^b w(x)g(x)\,dx = 0,$$

pa za μ možemo uzeti proizvoljan realan broj između m i M.
Zbog $w(x) \geq 0$ na $[a, b]$, ostaje pogledati slučaj kad je

$$\int_a^b w(x)\,dx > 0.$$

Integralni teorem srednje vrijednosti s težinama

Onda, iz teorema o ocjeni integrala s težinama, dijeljenjem dobivamo da za

$$\mu := \frac{\int_a^b w(x)g(x)\,dx}{\int_a^b w(x)\,dx}$$

vrijedi tvrdnja i

$$m \leq \mu \leq M.$$

Zaključak o neprekidnom g slijedi iz činjenice da

- neprekidna funkcija na segmentu postiže sve vrijednosti između minimuma i maksimuma, pa mora postići i μ (neprekidna slika segmenta je segment).
- Prema tome, postoji $\zeta \in [a, b]$, takav da je $\mu = g(\zeta)$.

Greška trapezne formule

Vratimo se na grešku trapezne formule. Već smo pokazali da je

$$E_1(f) = \int_a^b (x-a)\,(x-b)\,f[a,b,x]\,dx,$$

gdje je $(x-a)\,(x-b)$ polinom čvorova pripadne interpolacije.

Očito je

$$(x-a)\,(x-b) \leq 0 \quad \text{na} \quad [a,b],$$

pa možemo uzeti

$$w(x) = -(x-a)\,(x-b), \quad g(x) = -f[a,b,x].$$

Uočiti: funkcija $g(x) = -f[a,b,x]$ je neprekidna, čim je f neprekidna na $[a,b]$ i postoje derivacije f' u rubovima a i b.

Greška trapezne formule

Po teoremu srednje vrijednosti za integrale s težinama, postoji $\eta \in [a, b]$, takav da vrijedi

$$E_1(f) = -f[a, b, \eta] \int_a^b -(x - a)(x - b)\, dx.$$

Ovaj se integral jednostavno računa. Integriranjem dobivamo

$$\begin{aligned} \int_a^b (b - x)(x - a)\, dx &= \left((b - a) \frac{(x - a)^2}{2} - \frac{(x - a)^3}{3} \right) \Big|_a^b \\ &= (b - a)^3 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) = \frac{(b - a)^3}{6}. \end{aligned}$$

Na početku smo iskoristili rastav $b - x = (b - a) - (x - a)$.

Greška trapezne formule

Dakle, za grešku vrijedi

$$E_1(f) = -f[a, b, \eta] \, \frac{(b-a)^3}{6}, \quad \eta \in [a, b].$$

Standardni izraz za grešku trapezne formule dobivamo uz jače pretpostavke na f.

Ako f'' postoji na cijelom $[a, b]$, onda podijeljenu razliku možemo napisati preko f'', tj. postoji $\zeta \in [a, b]$ za kojeg je

$$f[a, b, \eta] = \frac{f''(\zeta)}{2},$$

pa je

$$E_1(f) = -\frac{h^3}{12} f''(\zeta) = -\frac{(b-a)^3}{12} f''(\zeta).$$

Osnovna Simpsonova formula

Izvedimo sljedeću (zatvorenu) Newton–Cotesovu formulu za $m = 2$ (s 3 čvora), poznatu pod imenom Simpsonova formula. Ona ima oblik

$$I_2(f) = w_0^{(2)} f(x_0) + w_1^{(2)} f(x_0 + h_2) + w_2^{(2)} f(x_0 + 2h_2),$$

pri čemu je

$$h := h_2 = \frac{b - a}{2}.$$

Ponovno, da bismo olakšali pisanje, izostavimo gornje indekse. Kad h uvrstimo u formulu, dobivamo

$$I_2(f) = w_0 f(a) + w_1\, f\left(\frac{a+b}{2}\right) + w_2 f(b).$$

Osnovna Simpsonova formula

Imamo tri nepoznata parametra, pa moramo postaviti najmanje tri uvjeta za egzaktnost ove formule na vektorskom prostoru polinoma $\mathcal{P}_n$ što višeg stupnja n. Krećemo s $n = 2$.

- Za $f(x) = 1$ dobivamo
$$b - a = \int_a^b x^0 \, dx = w_0 \cdot 1 + w_1 \cdot 1 + w_2 \cdot 1.$$
- Za $f(x) = x$ izlazi
$$\frac{b^2 - a^2}{2} = \int_a^b x \, dx = w_0 \cdot a + w_1 \, \frac{a + b}{2} + w_2 \cdot b.$$

Osnovna Simpsonova formula

- Konačno, za $f(x) = x^2$ dobivamo

$$\frac{b^3 - a^3}{3} = \int_a^b x^2\, dx = w_0 \cdot a^2 + w_1 \frac{(a+b)^2}{4} + w_2 \cdot b^2.$$

Sada imamo linearni sustav s tri jednadžbe i tri nepoznanice

$$\begin{aligned} w_0 + w_1 + w_2 &= b - a \\ aw_0 + \frac{a+b}{2} w_1 + bw_2 &= \frac{b^2 - a^2}{2} \\ a^2 w_0 + \frac{(a+b)^2}{4} w_1 + b^2 w_2 &= \frac{b^3 - a^3}{3}. \end{aligned}$$

Osnovna Simpsonova formula

Rješavanjem ovog sustava (izračunajte sami!), dobivamo

$$w_0 = w_2 = \frac{h}{3} = \frac{b-a}{6}, \quad w_1 = \frac{4h}{3} = \frac{4(b-a)}{6},$$

Integracijska formula $I_2(f)$ dobivena je iz egzaktnosti na svim polinomima iz $\mathcal{P}_2$, stupnja manjeg ili jednakog 2, i glasi

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{h}{3}\left(f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right).$$

Zadatak. Ponovite izvod na "simetričnoj" bazi potencija

$$1, \quad x - \frac{a+b}{2}, \quad \left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2.$$

Egzaktna integracija x^3

Simpsonova formula, iako je dobivena iz uvjeta egzaktnosti na vektorskom prostoru polinoma stupnja manjeg ili jednakog 2,

- egzaktno integrira i sve polinome stupnja 3.

Pokažimo da je polinomni stupanj egzaktnosti Simpsonove formule jednak 3 — za jedan više nego što bismo očekivali!

- Dovoljno je pokazati da formula egzaktno integrira

$$f(x) = x^3.$$

Egzaktni integral jednak je

$$\int_a^b x^3\,dx = \frac{b^4 - a^4}{4}.$$

Egzaktna integracija x^3

Po Simpsonovoj formuli, za $f(x) = x^3$ dobivamo

$$\begin{aligned} I_2(x^3) &= \frac{b-a}{6}\left(a^3 + 4\left(\frac{a+b}{2}\right)^3 + b^3\right) \\ &= \frac{b-a}{6}\cdot\frac{3}{2}\,(a^3 + a^2 b + ab^2 + b^3) = \frac{b^4 - a^4}{4}. \end{aligned}$$

Nije teško pokazati da je i Simpsonova formula interpolacijska.

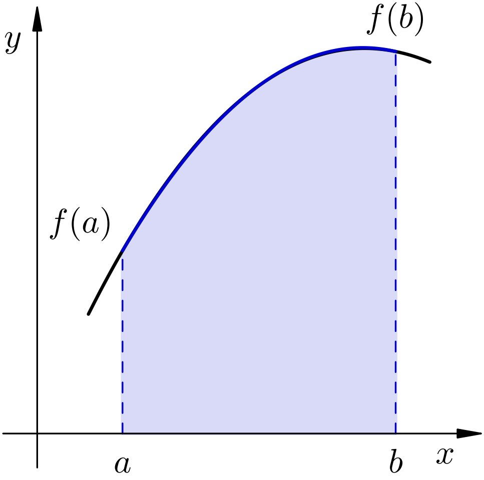
Ako povučemo kvadratni interpolacijski polinom kroz 3 točke

$$(a, f(a)), \quad \left(\frac{a+b}{2}, f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right), \quad (b, f(b)),$$

a zatim ga egzaktno integriramo od a do b, dobivamo upravo Simpsonovu formulu. Provjerite sami!

Točnost Simpsonove formule

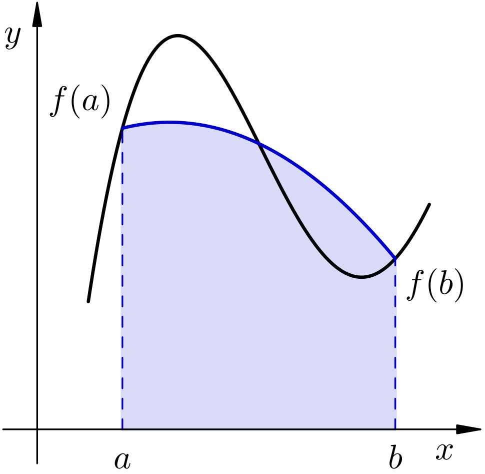
Ilustrirajmo kako Simpsonova formula funkcionira na integralu kojeg smo aproksimirali trapeznom formulom.



Ovdje je aproksimacija integrala vrlo dobra.

Točnost Simpsonove formule

Ovisno o "obliku" funkcije f, slika može izgledati i ovako:



Dakle, aproksimacija ne mora biti tako dobra.

Greška Simpsonove formule

Označimo, za kraći zapis,

$$c := \frac{a+b}{2}.$$

Grešku Simpsonove formule računamo slično kao kod trapezne, integracijom greške kvadratnog interpolacijskog polinoma p_2.

Zapis je u Newtonovom obliku — preko podijeljene razlike

$$e_2(x) = f(x) - p_2(x) = (x-a)(x-c)(x-b)\, f[a,b,c,x].$$

Za grešku Simpsonove formule vrijedi

$$E_2(f) = \int_a^b e_2(x)\, dx.$$

Greška Simpsonove formule

Nažalost, pripadni polinom čvorova

$$\omega(x) = (x - a)(x - c)(x - b)$$

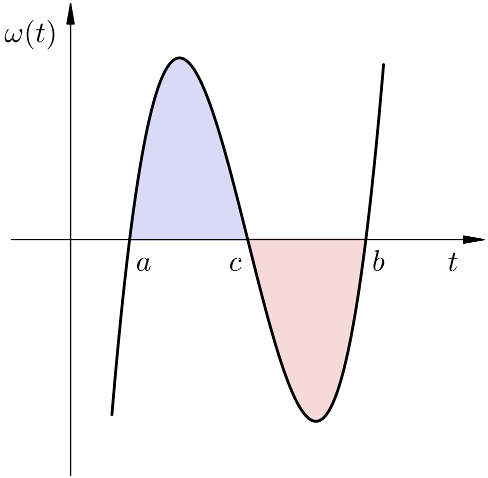
nije fiksnog znaka na $[a, b]$, pa ne možemo direktno primijeniti generalizirani teorem srednje vrijednosti za integrale.

Zato definiramo $w(x)$ kao integral polinoma čvorova od a do x

$$w(x) = \int_a^x \omega(t)\, dt = \int_a^x (t - a)\,(t - c)\,(t - b)\, dt.$$

Skiciramo li graf polinoma čvorova $\omega(t) = (t - a)(t - c)(t - b)$, odmah vidimo da je taj graf centralno simetričan oko srednje točke c, pa zaključujemo ...

Greška Simpsonove formule



da će integral rasti od 0 do svog maksimuma (plava površina),
a zatim padati (kad dođe u crveno područje), upravo do 0.

Greška Simpsonove formule

Dakle, za polinom w vrijedi $w' = \omega$ i još je

$$w(a) = w(b) = 0, \quad w(x) > 0, \quad x \in (a, b).$$

Onda grešku Simpsonove formule možemo napisati kao

$$E_2(f) = \int_a^b \underbrace{w'(x)}_{\omega(x)} f[a, b, c, x]\, dx.$$

Parcijalnom integracijom ovog integrala dobivamo

$$E_2(f) = w(x)\, f[a, b, c, x] \Big|_a^b - \int_a^b w(x)\, \frac{d}{dx} f[a, b, c, x]\, dx.$$

Prvi član je očito jednak 0, jer je $w(a) = w(b) = 0$.

Greška Simpsonove formule

Ostaje još "srediti" drugi član. Već znamo da je podijeljena razlika s dvostrukim čvorom jednaka derivaciji funkcije.

- Analogno, derivacija treće podijeljene razlike $f[a, b, c, x]$ po x, je isto što i
- četvrta podijeljena razlika s dvostrukim čvorom x.

Prema tome, dobivamo formulu za grešku u obliku

$$E_2(f) = -\int_a^b w(x)\, f[a, b, c, x, x]\, dx.$$

Funkcija $g(x) = f[a, b, c, x, x]$ je neprekidna na $[a, b]$, čim je f' neprekidna na $[a, b]$ i postoje druge derivacije f'' u čvorovima a, b i c.

Greška Simpsonove formule

Sad je funkcija w nenegativna i možemo primijeniti generalizirani teorem srednje vrijednosti za integrale. Izlazi

$$E_2(f) = -f[a, b, c, \eta, \eta] \int_a^b w(x)\, dx,$$

za neki $\eta \in [a, b]$.

Ako $f^{(4)}$ postoji na cijelom $[a, b]$, napišemo $f[a, b, c, \eta, \eta]$ kao četvrtu derivaciju od f u nekoj točki $\zeta \in [a, b]$, pa dobivamo

$$E_2(f) = -\frac{f^{(4)}(\zeta)}{4!} \int_a^b w(x)\, dx.$$

Ostaje još samo integrirati funkciju w.

Greška Simpsonove formule

Za samu funkciju w vrijedi da je integral polinoma čvorova ω

$$\begin{aligned} w(x) &= \int_a^x (t-a)\,(t-c)\,(t-b)\,dt \\ &= (\text{zamjena varijable } y = t - c) \\ &= \int_{-h}^{x-c} (y-h)y(y+h)\,dy = \int_{-h}^{x-c} (y^3 - h^2 y)\,dy \\ &= \left(\frac{y^4}{4} - h^2\frac{y^2}{2}\right)\Big|_{-h}^{x-c} = \frac{(x-c)^4}{4} - h^2\frac{(x-c)^2}{2} + \frac{h^4}{4}. \end{aligned}$$

Greška Simpsonove formule

Za integral funkcije w onda dobivamo

$$\begin{aligned}\int_a^b w(x)\,dx &= \int_a^b \left(\frac{(x-c)^4}{4} - h^2\frac{(x-c)^2}{2} + \frac{h^4}{4}\right) dx \\ &= (\text{zamjena varijable } y = x-c) \\ &= \int_{-h}^{h} \left(\frac{y^4}{4} - h^2\frac{y^2}{2} + \frac{h^4}{4}\right) dy \\ &= \left(\frac{y^5}{20} - h^2\frac{y^3}{6} + \frac{h^4 y}{4}\right)\Bigg|_{-h}^{h} = 2\left(\frac{h^5}{20} - \frac{h^5}{6} + \frac{h^5}{4}\right) \\ &= \frac{4}{15}\,h^5.\end{aligned}$$

Greška Simpsonove formule

Kad to uključimo u formulu za grešku, dobivamo

$$E_2(f) = -\frac{4}{15}\,h^5 \cdot \frac{f^{(4)}(\zeta)}{24} = -\frac{h^5}{90} f^{(4)}(\zeta).$$

Dakle, greška Simpsonove formule je

$$E_2(f) = -\frac{h^5}{90} f^{(4)}(\zeta) = -\frac{(b-a)^5}{2880} f^{(4)}(\zeta).$$

Dobivena greška je za red veličine bolja, no što bi trebala biti, prema upotrijebljenom interpolacijskom polinomu.

Razlog tome je centralna simetrija polinoma čvorova ω oko srednje točke c, pa je $w(a) = w(b) = 0$. To vrijedi za sve integracijske formule s neparnim brojem čvorova $m+1$, uz uvjet da su čvorovi simetrični oko polovišta intervala.

Povećana točnost Simpsonove formule

Zadatak. Pokažite da se Simpsonova formula može dobiti integracijom (proširenog) Hermiteovog interpolacijskog polinoma $p_3 \in \mathcal{P}_3$, koji interpolira

- funkciju f u čvorovima a, $(a+b)/2$, b,
- i prvu derivaciju f' u srednjem čvoru $(a+b)/2$.

U dobivenoj integracijskoj formuli, koeficijent uz vrijednost derivacije

$$f'\Big(\frac{a+b}{2}\Big)$$

jednak je nuli, zbog simetrije čvorova i težinske funkcije $w(x) = 1$ oko polovišta intervala.

Izvedite grešku Simpsonove formule — integracijom greške polinoma p_3. Polinom čvorova za p_3 ima fiksni znak na $[a, b]$!

Numerička integracija

Osnovna formula srednje točke

Izvedimo prvu otvorenu Newton–Cotesovu formulu, za $m = 0$ (samo 1 čvor), poznatu pod imenom formula srednje točke, ili pod engleskim nazivom “midpoint” formula.

Formula srednje točke je otvorena formula, pa definiramo

$$x_{-1} := a, \quad x_0 := \frac{a+b}{2}, \quad x_1 := b \quad \text{i} \quad h := h_0 = \frac{b-a}{2}.$$

Da bismo odredili formulu srednje točke, moramo naći težinski koeficijent $w_0 := w_0^{(0)}$, takav da je formula

$$I_0(f) = w_0 f\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

egzaktna na vektorskom prostoru polinoma što višeg stupnja.

Osnovna formula srednje točke

- Za $f(x) = 1$, imamo
$$b - a = \int_a^b 1\, dx = w_0,$$

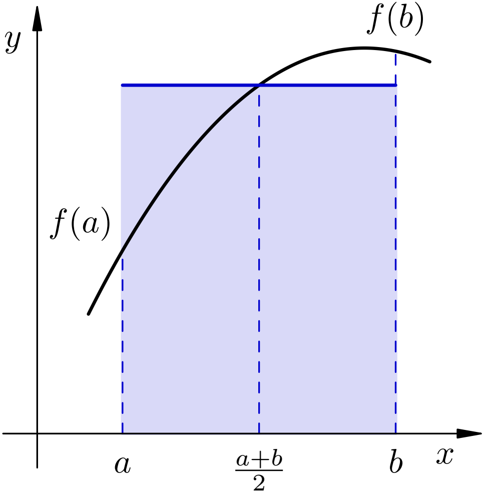
odakle odmah slijedi da je
$$\int_a^b f(x)\, dx \approx 2hf\left(\frac{a+b}{2}\right) = (b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right).$$

I ova formula je interpolacijska, tj. možemo ju dobiti i tako da

- funkciju f interpoliramo polinomom stupnja 0, tj. konstantom, u srednjoj točki $(a+b)/2$,
- a onda egzaktno integriramo tu konstantu na $[a, b]$.

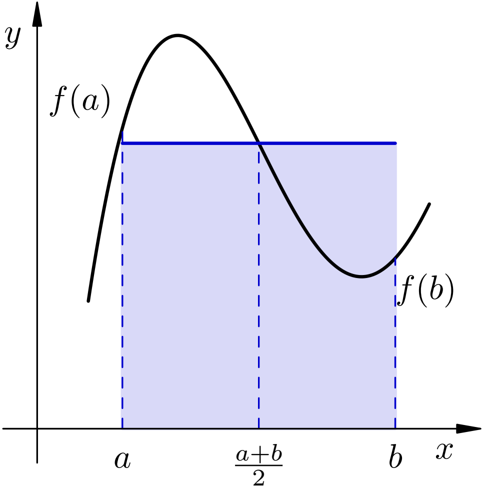
Pravokutna formula u srednjoj točki

Aproksimacija integrala funkcije f površinom pravokutnika.



Pravokutna formula u srednjoj točki

Ovisno o “obliku” funkcije f, slika može izgledati i ovako:



Egzaktna integracija polinoma stupnja 1

Slično kao i Simpsonova formula,

- formula srednje točke egzaktno integrira i polinome stupnja za jedan većeg — sljedećeg neparnog stupnja.

Pokažimo da formula srednje točke egzaktno integrira i sve polinome stupnja 1.

- Za $f(x) = x$, egzaktni integral je

$$\int_a^b x\,dx = \frac{b^2 - a^2}{2},$$

a aproksimacija integrala po formuli srednje točke je

$$I_0(f) = (b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right) = (b-a)\,\frac{a+b}{2} = \frac{b^2-a^2}{2}.$$

Greška osnovne formule srednje točke

Greška formule srednje točke je integral greške konstantnog interpolacijskog polinoma p_0, koji funkciju f interpolira u srednjoj točki $c := (a + b)/2$.

Ako definiramo $w(x)$ kao integral polinoma čvorova $\omega(t)$

$$w(x) = \int_a^x \omega(t)\,dt = \int_a^x (t - c)\,dt,$$

korištenjem iste tehnike kao kod izvoda greške za Simpsonovu formulu, izlazi da je greška formule srednje točke

$$E_0(f) = \int_a^b e_0(x)\,dx = \frac{h^3}{3} f''(\zeta) = \frac{(b-a)^3}{24} f''(\zeta),$$

uz $\zeta \in [a, b]$.

Formula srednje točke i trapezna formula

Napomena. Za istu duljinu intervala $b - a$,

- formula srednje točke, iako ima samo jednu točku,
- približno je dva puta točnija
- od trapezne formule, koja ima dvije točke.

Greška prve formule ima 24 u nazivniku, a greška druge 12.

Trapeznu formulu možemo dobiti iz formule srednje točke

- linearnom interpolacijom funkcije u srednjoj točki, preko funkcijskih vrijednosti u rubovima intervala

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \approx \frac{1}{2}\Big(f(a) + f(b)\Big).$$

To unosi dodatnu pogrešku — istog reda veličine kao i u originalnoj formuli (zato dodatni faktor 2). Dokažite to!

Povećana točnost "midpoint" formule

Zadatak. Pokažite da se formula srednje točke može dobiti integracijom Hermiteovog interpolacijskog polinoma $p_1 \in \mathcal{P}_1$, koji interpolira

- funkciju f i prvu derivaciju f' u srednjoj točki $(a+b)/2$.

U dobivenoj integracijskoj formuli, koeficijent uz vrijednost derivacije $f'((a+b)/2)$ jednak je nuli, zbog simetrije težinske funkcije $w(x) = 1$ oko polovišta intervala.

Izvedite grešku formule srednje točke — integracijom greške polinoma p_1. Polinom čvorova za p_1 ima fiksni znak na $[a, b]$!

Napomena. Uočite da je formula srednje točke, ujedno, i Gaussova integracijska formula — red je $m = 0$, a egzaktna je na polinomima stupnja $2m + 1 = 1$ (v. kasnije).

Numerička integracija

Interpolacijske integracijske formule — uvod

Nije teško pokazati da su sve obične Newton–Cotesove formule integrali interpolacijskih polinoma na ekvidistantnoj mreži.

Ovaj rezultat vrijedi i općenitije — za bilo kakvu težinsku integracijsku formulu, koja koristi samo vrijednosti funkcije

$$\int_a^b w(x)f(x)\,dx = I_m(f) + E_m(f),$$

$$I_m(f) = \sum_{k=0}^{m} w_k^{(m)} f\big(x_k^{(m)}\big),$$

na bilo kojoj (zadanoj) mreži različitih čvorova $x_0^{(m)}, \ldots, x_m^{(m)}$.

Napomene. Radi jednostavnosti pisanja, ponovno ispuštamo gornje indekse m. Ovdje je red m = broj čvorova $-$ 1.

Težinska funkcija u integracijskoj formuli

Pretpostavljamo da je težinska funkcija w

- pozitivna (ili barem nenegativna) i integrabilna na $[a, b]$.

Ako je interval $[a, b]$ beskonačan, moramo osigurati da prethodni integral postoji, bar u slučaju kad je

- funkcija f polinom, neovisno o stupnju.

To postižemo zahtjevom da svi momenti težinske funkcije w

$$\mu_k := \int_a^b x^k w(x)\, dx, \quad k \in \mathbb{N}_0,$$

postoje (kao integrali) i da su konačni.

Takve težinske funkcije w zovemo polinomno dopustivima. Nadalje pretpostavljamo da je w takva!

Polinomni stupanj egzaktnosti formule

Definicija. Za integracijsku formulu I_m, reda m, kažemo da ima polinomni stupanj egzaktnosti (barem) d, ako je

$$I_m(f) = I(f) \quad \text{ili} \quad E_m(f) = 0, \quad \text{za sve} \quad f \in \mathcal{P}_d,$$

pri čemu je $\mathcal{P}_d$ vektorski prostor polinoma stupnja manjeg ili jednakog d. Uočiti da d nije jednoznačno definiran kao najveći stupanj egzaktnosti — na primjer, zbog Simpsonove formule!

Integracijska formula I_m je interpolacijska, ako je $d = m$, a razlog zašto se tako zove opravdan je iskazom sljedećeg Teorema.

■

Preciznije, trebalo bi reći $d \geq m$, tj. stupanj egzaktnosti je barem m, a može biti i veći. Bitno je samo da je

$$E_m(f) = 0, \quad \text{za sve} \quad f \in \mathcal{P}_m.$$

Interpolacijske formule

Teorem (Ekvivalencija tvrdnji A, B, C). Integracijska formula

$$\int_a^b w(x)f(x)\,dx = I_m(f) + E_m(f), \quad I_m(f) = \sum_{k=0}^{m} w_k f(x_k),$$

ima stupanj egzaktnosti (barem) m (A), ako i samo ako je

- $I_m(f)$ = integral interpolacijskog polinoma p_m za funkciju f u čvorovima $x_0, \ldots, x_m$ (B),

odnosno, ako i samo ako za težinske koeficijente w_k vrijedi

$$w_k = \int_a^b w(x)\ell_k(x)\,dx, \quad k = 0, \ldots, m,$$

gdje je ℓ_k k-ti polinom Lagrangeove baze, za $k = 0, \ldots, m$ (C).

Interpolacijske formule

Dokaz. Ide u 3 koraka: (C) $\Rightarrow$ (B), (B) $\Rightarrow$ (A), (A) $\Rightarrow$ (C).

1. korak: Pretpostavimo da vrijedi formula za w_k (C). Onda je

$$
\begin{aligned}
I_m(f) &= \sum_{k=0}^{m} w_k f(x_k) = \sum_{k=0}^{m} f(x_k) \int_a^b w(x)\ell_k(x)\,dx \\
&= \int_a^b w(x)\left(\sum_{k=0}^{m} f(x_k)\ell_k(x)\right) dx = \int_a^b w(x) p_m(x)\,dx,
\end{aligned}
$$

pa je integracijska formula $I_m(f)$ = integral interpolacijskog polinoma p_m za funkciju f u čvorovima $x_0, \ldots, x_m$. Dakle, vrijedi (B).

Interpolacijske formule

2. korak: Pretpostavimo da vrijedi $I_m(f) = I(p_m)$ (B).

Neka je $f = p \in \mathcal{P}_m$ i neka je $p_m \in \mathcal{P}_m$ pripadni interpolacijski polinom za p. Iz jedinstvenosti interpolacije slijedi $p = p_m$, pa je $I_m(p) = I(p)$, za svaki $p \in \mathcal{P}_m$, tj. vrijedi (A).

3. korak: Pretpostavimo da je I_m interpolacijska formula (A).

Za p uzmemo, redom, polinome Lagrangeove baze $\ell_r \in \mathcal{P}_m$, za $r = 0, \ldots, m$. Iz egzaktne integracije ℓ_r slijedi formula (C)

$$\int_a^b w(x)\ell_r(x)\,dx = \sum_{k=0}^{m} w_k \ell_r(x_k) = w_r, \quad r = 0, \ldots, m.$$

■

Korolar. Standardne Newton–Cotesove formule su integrali interpolacijskih polinoma na ekvidistantnoj mreži na $[a, b]$.

■

Dizanje stupnja interpolacijskog polinoma

Prethodni korolar kaže još i ovo:

- ako interpolacijski polinomi loše aproksimiraju funkciju, ni integracijske formule neće biti ništa bolje!

Primjer. Uzmimo f = funkcija Runge i pogledajmo kako se ponašaju aproksimacije integrala $I_m(f)$, kad dižemo stupanj m interpolacijskog polinoma. Prava vrijednost integrala je

$$I(f) = \int_{-5}^{5} \frac{dx}{1+x^2} = 2\mathrm{arctg}5 \approx 2.7468015338900317 2.$$

Tablice na sljedeće dvije stranice su aproksimacije integrala, izračunate običnim Newton–Cotesovim formulama $I_m(f)$, i pripadne greške $E_m(f) = I(f) - I_m(f)$, za rastuće redove m.

Dizanje stupnja interpolacijskog polinoma

m	Aproksimacija $I_m(f)$	Greška $I(f) - I_m(f)$
1	0.38461538461538462	2.36218614927464711
2	6.79487179487179487	−4.04807026098176315
3	2.08144796380090498	0.66535357008912674
4	2.37400530503978780	0.37279622885024392
5	2.30769230769230769	0.43910922619772403
6	3.87044867347079978	−1.12364713958076805
7	2.89899440974837875	−0.15219287585834703
8	1.50048890712791179	1.24631262676211993
9	2.39861789784183472	0.34818363604819700
10	4.67330055565349876	−1.92649902176346704

Zelene znamenke u aproksimaciji su točne, a sve ostale nisu!

Dizanje stupnja interpolacijskog polinoma

m	Aproksimacija $I_m(f)$	Greška $I(f) - I_m(f)$
11	3.24477294027858525	−0.49797140638855353
12	−0.31293651575343889	3.05973804964347061
13	1.91979721683238891	0.82700431705764282
14	7.89954464085193082	−5.15274310696189909
15	4.1555899270655713	−1.40875745881652541
16	−6.24143731477308329	8.98823884866311501
17	0.26050944143760372	2.48629209245242800
18	18.87662129010920670	−16.12981975621917490
19	7.24602608588196936	−4.49922455199193763
20	−26.84955208882447960	29.59635362271451140

Očito je da aproksimacije $I_m(f)$ ne konvergiraju prema pravoj vrijednosti integrala, kad m raste.

Koeficijenti zatvorenih Newton–Cotesovih f.

Pogledajmo kako izgledaju težinski koeficijenti w_k zatvorenih običnih Newton–Cotesovih formula, za redove $m \geq 1$.

Zbog simetrije težina, u tablici je naveden samo dio w_k.

- Dovoljno je napisati prvu polovinu w_k, za $0 \leq k \leq \lfloor m/2 \rfloor$.
- Za preostale w_k vrijedi $w_k = w_{m-k}$, za $\lfloor m/2 \rfloor < k \leq m$.

Radi preglednosti, koeficijenti w_k prikazani su faktorizirano, kao zajednički faktor A i cjelobrojni faktor W_k, tj. u obliku

$$w_k = A\, W_k\, h, \quad h = (b-a)/m.$$

U tablici su popisane i konstante C_m, p, za grešku formule

$$E_m(f) = C_m\, h^{p+1} f^{(p)}(\zeta), \quad p = \begin{cases} m+1, & \text{za } m \text{ neparan}, \\ m+2, & \text{za } m \text{ paran}. \end{cases}$$

Koeficijenti zatvorenih Newton–Cotesovih f.

m	A	W_0	W_1	W_2	W_3	W_4	C_m	p
1	$\frac{1}{2}$	1	1				$-\frac{1}{12}$	2
2	$\frac{1}{3}$	1	4	1			$-\frac{1}{90}$	4
3	$\frac{3}{8}$	1	3	3	1		$-\frac{3}{80}$	4
4	$\frac{2}{45}$	7	32	12	32	7	$-\frac{8}{945}$	6
5	$\frac{5}{288}$	19	75	50	50	75	$-\frac{275}{12096}$	6
6	$\frac{1}{140}$	41	216	27	272	27	$-\frac{9}{1400}$	8
7	$\frac{7}{17280}$	751	3577	1323	2989	2989	$-\frac{8183}{518400}$	8
8	$\frac{4}{14175}$	989	5888	-928	10496	-4540	$-\frac{2368}{467775}$	10

Imena: $m = 3$ — Simpsonova $3/8$, $m = 4$ — Booleova formula.

Koeficijenti otvorenih Newton–Cotesovih f.

Pogledajmo kako izgledaju težinski koeficijenti w_k otvorenih običnih Newton–Cotesovih formula, za redove $m \geq 0$.

Slično kao kod zatvorenih formula, zbog simetrije, u tablici je naveden samo dio koeficijenata w_k.

Koeficijenti w_k prikazani su u istom obliku $w_k = A\, W_k\, h$, s tim da je za otvorene formule

$$h = \frac{b-a}{m+2}.$$

U tablici su popisane i konstante C_m, p, za grešku formule

$$E_m(f) = C_m\, h^{p+1} f^{(p)}(\zeta), \quad p = \begin{cases} m+2, & \text{za } m \text{ paran,} \\ m+1, & \text{za } m \text{ neparan.} \end{cases}$$

Koeficijenti otvorenih Newton–Cotesovih f.

m	A	W_0	W_1	W_2	C_m	p
0	2	1			$\frac{1}{3}$	2
1	$\frac{3}{2}$	1	1		$\frac{3}{4}$	2
2	$\frac{4}{3}$	2	-1	2	$\frac{14}{45}$	4
3	$\frac{5}{24}$	11	1	1	$\frac{95}{144}$	4
4	$\frac{3}{10}$	11	-14	26	$\frac{41}{140}$	4

Zaključak. Koeficijenti u integracijskim formulama, za veće m,

- poprimaju i pozitivne i negativne predznake,
- rastu po apsolutnoj vrijednosti.

Zbog kraćenja, može doći do velike greške u rezultatu, a sa porastom m-a zbog toga može doći do divergencije od polazne funkcije f (v. kasnije).

Simetrija koeficijenata Newton–Cotesovih f.

Zadatak. Pokažite da koeficijenti w_k običnih (ekvidistantnih) Newton–Cotesovih formula moraju biti simetrični, tj. ako je

$$\int_a^b f(x)\,dx = I_m(f) + E_m(f), \quad I_m(f) = \sum_{k=0}^{m} w_k f(x_k),$$

integracijska formula reda m, onda za koeficijente w_k vrijedi

$$w_k = w_{m-k}, \quad 0 \le k \le \lfloor m/2 \rfloor \ \text{(može i do } m\text{)}.$$

Uputa. Uzeti “simetričnu” (par–nepar) bazu potencija oko polovišta

$$\left(x - \frac{a+b}{2}\right)^k, \quad k = 0, \ldots, m,$$

i napisati jednadžbe egzaktne integracije na toj bazi.

Simetrija koeficijenata Newton–Cotesovih f.

Alternativa: Zbog ekvidistantnosti, čvorovi x_k, pa onda i Lagrangeova baza ℓ_k, za $k = 0, \ldots, m$, moraju biti simetrični (parni) oko polovišta intervala. Zaključak slijedi iz formule

$$w_k = \int_a^b \ell_k(x)\, dx, \quad k = 0, \ldots, m.$$

Isti zaključak vrijedi i za težinske Newton–Cotesove formule

$$\int_a^b w(x) f(x)\, dx = I_m(f) + E_m(f), \quad I_m(f) = \sum_{k=0}^{m} w_k f(x_k),$$

uz pretpostavke da su čvorovi x_k simetrični oko polovišta intervala i da je težinska funkcija w parna oko polovišta.

Produljene formule

Umjesto dizanja reda m osnovne formule, puno bolje je

- interval $[a, b]$ podijeliti na n podintervala,
- na svakom podintervalu primijeniti osnovnu formulu,
- i dobivene rezultate zbrojiti.

Tako dobivene formule zovemo produljene formule.

Kod dijeljenja na podintervale treba biti oprezan, jer se osnovna formula izvodi za odgovarajući broj podintervala.

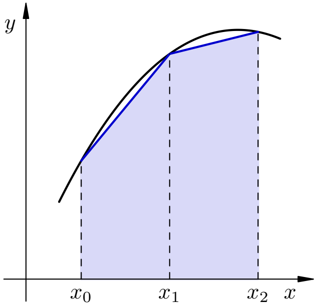
- Na primjer, osnovna Simpsonova formula zahtijeva 2 podintervala, pa n mora biti paran.

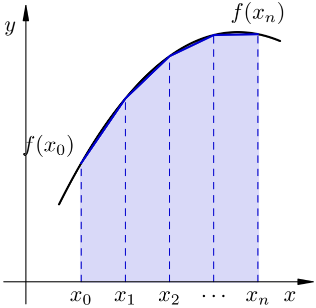
Produljenu formulu možemo interpretirati i kao integral

- odgovarajućeg interpolacijskog splajna za funkciju f.

Produljene formule

Na primjer, produljene trapezne formule, s $n = 2$ i $n = 4$ podintervala, izgledaju ovako:





Produljena trapezna formula

Produljenu trapeznu formulu dobivamo tako da cijeli interval $[a, b]$ podijelimo na n podintervala $[x_{k-1}, x_k]$, za $k = 1, \ldots, n$, s tim da je

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b.$$

Tada je

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{k=1}^{n} \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)\,dx.$$

Na svakom podintervalu $[x_{k-1}, x_k]$, za $k = 1, \ldots, n$,

- iskoristimo "običnu" trapeznu formulu
- i dobivene aproksimacije zbrojimo u produljenu trapeznu aproksimaciju.

Produljena trapezna formula

Najjednostavniji je slučaj kad su točke x_k ekvidistantne, tj. kad je svaki podinterval $[x_{k-1}, x_k]$ iste duljine h. To znači da je

$$h = \frac{b-a}{n}, \quad x_k = a + kh, \quad k = 0, \ldots, n.$$

Za skraćenje zapisa formula, uvedimo još oznaku

$$f_k = f(x_k), \quad k = 0, \ldots, n.$$

Obična trapezna formula na podintervalu $[x_{k-1}, x_k]$ ima oblik

$$\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)\, dx = \frac{h}{2}\big(f_{k-1} + f_k\big) + E_{1,k}(f),$$

gdje je $E_{1,k}(f)$ pripadna greška.

Produljena trapezna formula

Znamo da za greške vrijedi (ako f'' postoji na cijelom $[a, b]$)

$$E_{1,k}(f) = -\frac{h^3}{12} f''(\zeta_k), \quad \text{za neki} \quad \zeta_k \in [x_{k-1}, x_k].$$

Zbrajanjem dobivamo

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\, dx &= \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{h}{2} (f_{k-1} + f_k) + E_{1,k}(f) \right) \\ &= \frac{h}{2} ((f_0 + f_1) + (f_1 + f_2) + \cdots + (f_{n-1} + f_n)) \\ &\qquad + \sum_{k=1}^{n} E_{1,k}(f).\end{aligned}$$

Produljena trapezna formula

Sređivanjem izlazi

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{h}{2}\big(f_0 + 2f_1 + \cdots + 2f_{n-1} + f_n\big) + E_n^T(f).$$

U ovoj formuli,

- prvi član je aproksimacija integrala produljenom trapeznom formulom,
- a drugi član $E_n^T(f)$ je greška produljene formule.

Greška $E_n^T(f)$ je zbroj grešaka osnovnih trapeznih formula

$$E_n^T(f) = \sum_{k=1}^{n} E_{1,k}(f) = \sum_{k=1}^{n} -\frac{h^3}{12} f''(\zeta_k).$$

Greška produljene trapezne formule

Greška, ovako napisana, nije naročito korisna, pa ju treba napisati u drugačijem obliku — "proširimo" faktorom n/n i stavimo zagrade na pravo mjesto:

$$E_n^T(f) = -\frac{h^3}{12} \cdot n \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f''(\zeta_k) \right).$$

- Izraz u zagradi je aritmetička sredina vrijednosti drugih derivacija funkcije f u točkama ζ_k.
- Taj se broj sigurno nalazi između najmanje i najveće vrijednosti druge derivacije funkcije f na intervalu $[a, b]$.
- Ako je f'' još i neprekidna na $[a, b]$, onda je broj u zagradi $=$ vrijednost druge derivacije u nekoj točki $\xi \in [a, b]$.

Greška produljene trapezne formule

Dakle, ako je $f \in C^2[a, b]$, onda postoji točka $\xi \in [a, b]$, takva da je

$$f''(\xi) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f''(\zeta_k).$$

Stoga, formulu za grešku možemo napisati kao

$$E_n^T(f) = -\frac{h^3 n}{12} f''(\xi) = -\frac{(b-a)h^2}{12} f''(\xi).$$

Tu smo iskoristili da je $nh = b - a$.

Ocijenimo po apsolutnoj vrijednosti $E_n^T(f)$. Dobivamo

$$|E_n^T(f)| \leq \frac{(b-a)h^2}{12} M_2 = \frac{(b-a)^3}{12n^2} M_2, \quad M_2 = \max_{x \in [a,b]} |f''(x)|.$$

Broj podintervala za zadanu točnost

Iz ocjene greške produljene trapezne formule

$$|E_n^T(f)| \leq \frac{(b-a)^3}{12n^2} M_2, \quad M_2 = \max_{x \in [a,b]} |f''(x)|,$$

možemo naći i broj podintervala n, koji je potreban da se postigne neka zadana točnost aproksimacije integrala.

Želimo li da je $|E_n^T(f)| \leq \varepsilon$, gdje je ε tražena točnost, dovoljno je tražiti da je

$$\frac{(b-a)^3}{12n^2} M_2 \leq \varepsilon,$$

pa treba uzeti

$$n \geq \sqrt{\frac{(b-a)^3 M_2}{12\varepsilon}}, \quad n \text{ cijeli broj.}$$

Produljena Simpsonova formula

Na sličan se način izvodi i produljena Simpsonova formula, koja mora imati paran broj podintervala n. Ograničimo se samo na ekvidistantni slučaj. Imamo

$$h = \frac{b-a}{n}, \quad x_k = a + kh, \quad k = 0, \ldots, n.$$

Aproksimaciju integrala produljenom Simpsonovom formulom dobivamo iz

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{k=1}^{n/2} \int_{x_{2k-2}}^{x_{2k}} f(x)\,dx,$$

tako da na svakom podintervalu $[x_{2k-2}, x_{2k}]$, duljine $2h$, za $k = 1, \ldots, n/2$, primijenimo "običnu" Simpsonovu formulu.

Produljena Simpsonova formula

Obična Simpsonova formula na podintervalu $[x_{2k-2}, x_{2k}]$ ima oblik

$$\int_{x_{2k-2}}^{x_{2k}} f(x)\,dx = \frac{h}{3}\big(f_{2k-2} + 4f_{2k-1} + f_{2k}\big) + E_{2,k}(f),$$

gdje je $E_{2,k}(f)$ pripadna greška

$$E_{2,k}(f) = -\frac{h^5}{90} f^{(4)}(\zeta_k), \quad \text{za neki} \quad \zeta_k \in [x_{2k-2}, x_{2k}],$$

uz pretpostavku da $f^{(4)}$ postoji na cijelom $[a, b]$.

Produljena Simpsonova formula

Zbrajanjem dobivamo

$$
\begin{aligned}
\int_a^b f(x)\,dx &= \sum_{k=1}^{n/2} \left(\frac{h}{3}\big(f_{2k-2} + 4f_{2k-1} + f_{2k}\big) + E_{2,k}(f) \right) \\
&= \frac{h}{3}\big((f_0 + 4f_1 + f_2) + (f_2 + 4f_3 + f_4) + \cdots \\
&\qquad + (f_{n-2} + 4f_{n-1} + f_n)\big) \\
&\qquad + \sum_{k=1}^{n/2} E_{2,k}(f).
\end{aligned}
$$

Produljena Simpsonova formula

Sređivanjem izlazi

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{h}{3}\big(f_0 + 4f_1 + 2f_2 + 4f_3 + 2f_4 + \cdots + 2f_{n-2} + 4f_{n-1} + f_n\big) + E_n^S(f),$$

pri čemu je $E_n^S(f)$ greška produljene formule. Ova greška je zbroj grešaka osnovnih Simpsonovih formula na $[x_{2k-2}, x_{2k}]$

$$E_n^S(f) = \sum_{k=1}^{n/2} E_{2,k}(f) = \sum_{k=1}^{n/2} -\frac{h^5}{90} f^{(4)}(\zeta_k).$$

Greška produljene Simpsonove formule

Slično kao kod trapezne formule, grešku je korisno napisati malo drugačije

$$E_n^S(f) = -\frac{h^5}{90} \cdot \frac{n}{2} \left(\frac{2}{n} \sum_{k=1}^{n/2} f^{(4)}(\zeta_k) \right).$$

Ako je $f^{(4)}$ još i neprekidna, tj. ako je $f \in C^4[a,b]$, onda izraz u zagradi možemo zamijeniti s $f^{(4)}(\xi)$, za neki $\xi \in [a,b]$, pa je

$$E_n^S(f) = -\frac{h^5 n}{180} f^{(4)}(\xi) = -\frac{(b-a)h^4}{180} f^{(4)}(\xi).$$

Ponovno, ocijenimo po apsolutnoj vrijednosti $E_n^S(f)$

$$|E_n^S(f)| \leq \frac{(b-a)h^4}{180} M_4 = \frac{(b-a)^5}{180 n^4} M_4, \quad M_4 = \max_{x \in [a,b]} |f^{(4)}(x)|.$$

Broj podintervala za zadanu točnost

Želimo li da je $|E_n^S(f)| \leq \varepsilon$, dovoljno je tražiti da bude

$$\frac{(b-a)^5}{180n^4} M_4 \leq \varepsilon,$$

pa treba uzeti

$$n \geq \sqrt[4]{\frac{(b-a)^5 M_4}{180\varepsilon}}, \quad n \text{ paran cijeli broj.}$$

Produljena formula srednje točke

Da bismo izveli produljenu formulu srednje točke, podijelimo interval $[a, b]$ na n podintervala, gdje je n paran broj.

U ekvidistantnom slučaju je

$$h = \frac{b-a}{n}, \quad x_k = a + kh, \quad k = 0, \ldots, n.$$

Aproksimaciju integrala produljenom formulom srednje točke dobivamo iz

$$\int_a^b f(x)\, dx = \sum_{k=1}^{n/2} \int_{x_{2k-2}}^{x_{2k}} f(x)\, dx,$$

tako da na svakom podintervalu $[x_{2k-2}, x_{2k}]$, duljine $2h$, za $k = 1, \ldots, n/2$, primijenimo "običnu" formulu srednje točke.

Produljena formula srednje točke

Obična formula srednje točke na $[x_{2k-2}, x_{2k}]$ ima oblik

$$\int_{x_{2k-2}}^{x_{2k}} f(x)\,dx = 2h\,f_{2k-1} + E_{0,k}(f),$$

gdje je $E_{0,k}(f)$ pripadna greška

$$E_{0,k}(f) = \frac{h^3}{3} f''(\zeta_k), \quad \text{za neki} \quad \zeta_k \in [x_{2k-2}, x_{2k}].$$

uz pretpostavku da f'' postoji na cijelom $[a, b]$.

Zbrajanjem po $k = 1, \ldots, n/2$, dobivamo

$$I_n(f) = 2h\big(f_1 + f_3 + \cdots + f_{n-1}\big) + E_n^M(f).$$

Greška produljene formule srednje točke

Za $f \in C^2[a,b]$, ukupna greška $E_n^M(f)$ produljene formule je

$$\begin{aligned} E_n^M(f) &= \sum_{k=1}^{n/2} \frac{h^3}{3} f''(\zeta_k) = \frac{h^3}{3} \cdot \frac{n}{2} \left(\frac{2}{n} \sum_{k=1}^{n/2} f''(\zeta_k) \right) \\ &= \frac{h^3 n}{6} f''(\xi) = \frac{(b-a)h^2}{6} f''(\xi), \end{aligned}$$

za neki $\xi \in [a,b]$. Ocjena greške $E_n^M(f)$ ima oblik

$$|E_n^M(f)| \le \frac{(b-a)h^2}{6} M_2 = \frac{(b-a)^3}{6n^2} M_2, \quad M_2 = \max_{x \in [a,b]} |f''(x)|.$$

Broj podintervala, za zadanu apsolutnu točnost ε, dobivamo na isti način kao prije, s tim da n mora biti paran.

Produljena formula srednje točke — drugi oblik

Katkad se produljena formula srednje točke piše s polovičnim (a ne cjelobrojnim) indeksima!

Ovaj oblik formule dobiva se primjenom obične formule srednje točke

- na podintervalima oblika $[x_{k-1}, x_k]$, za $k = 1, \ldots, n$,
- s tim da n više ne mora biti paran,

tj., isto kao kod produljene trapezne formule.

U ekvidistantnom slučaju je

$$h = \frac{b-a}{n}, \quad x_k = a + kh, \quad k = 0, \ldots, n.$$

Ovaj h odgovara ranijem $2h$.

Produljena formula srednje točke — drugi oblik

Srednja točka podintervala $[x_{k-1}, x_k]$ je

$$x_{k-1/2} = a + \left(k - \frac{1}{2}\right)h, \quad k = 1, \ldots, n.$$

Uz oznaku $f_{k-1/2} = f(x_{k-1/2})$, za $k = 1, \ldots, n$, obična formula srednje točke na podintervalu $[x_{k-1}, x_k]$ ima oblik

$$\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)\, dx = hf_{k-1/2} + E_{0,k}(f),$$

a pripadna greška $E_{0,k}(f)$ je sada

$$E_{0,k}(f) = \frac{h^3}{24} f''(\zeta_k), \quad \text{za neki} \quad \zeta_k \in [x_{k-1}, x_k].$$

Produljena formula srednje točke — drugi oblik

Produljena formula srednje točke onda ima oblik

$$I_n(f) = h\big(f_{1/2} + f_{3/2} + \cdots + f_{n-1/2}\big) + E_n^M(f).$$

Uz pretpostavku $f \in C^2[a,b]$, greška $E_n^M(f)$ ove produljene formule jednaka je

$$\begin{aligned} E_n^M(f) &= \sum_{k=1}^{n} \frac{h^3}{24} f''(\zeta_k) = \frac{h^3}{24} \cdot n \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f''(\zeta_k) \right) \\ &= \frac{h^3 n}{24} f''(\xi) = \frac{(b-a)h^2}{24} f''(\xi), \end{aligned}$$

za neki $\xi \in [a,b]$.

Opet, greška je upola manja od $E_n^T(f)$ i suprotnog znaka.

Produljena formula srednje točke — drugi oblik

Produljena formula srednje točke s $n = 4$ podintervala izgleda ovako: