Potpuno pivotiranje

Potpuno pivotiranje kao pivota odabire po modulu najveći element iz cijele podmatrice dolje desno. Osim zamjene redaka, ovdje je dozvoljena i zamjena stupaca (preimenovanje tj. mijenjanje redoslijeda varijabli). To se radi zbog još veće numeričke stabilnosti. Sve promjene stupaca treba pamtiti u vektoru permutacije varijabli. U svakom koraku je

zamjena redaka = množenje permutacijskom matricom s lijeva,

zamjena stupaca = množenje permutacijskom matricom s desna.

Matrični zapis (prvog) koraka: matrica A prelazi u $L^{(1)}P^{(1)}AQ^{(1)}$ pri čemu je $L^{(1)}$ donjetrokutasta, a $Q^{(1)}$ i $P^{(1)}$ permutacijske matrice koje zamjenjuju dva stupca odnosno dva retka. Na kraju dobivamo $PAQ = LU$ gdje su P i Q permutacijske matrice. Kako riješiti sustav $Ax = b$ koristeći potpuno pivotiranje?

1. Pomnožite sustav s lijeva s P: $PAx = Pb$.
2. Uočite da je $QQ^t = I$ tj. da je permutacija unitarna matrica pa to uguramo između A i x: $(PAQ)(Q^t x) = Pb$.
3. Dobivamo $(LU)y = Pb$ pri čemu je $y = Q^t x$ (tu se vidi kako Q ispremiješa redoslijed nepoznanica).
4. Riješite dva trokutasta sustava ($Lz = Pb$ i $Uy = z$) da dobijete y.
5. $x = Qy$ (sad vratimo natrag originalni redoslijed nepoznanica).

Potpuno pivotiranje u odnosu na parcijalno pivotiranje ima više pretraživanja u svakom koraku – $(n-k+1)^2$ elemenata u odnosu prema ranijih $n-k+1$ – što usporava proces. No, potpunim pivotiranjem mogu se izvesti bolje ocjene greške nego kod parcijalnog pivotiranja.

Faktorizacija Choleskog

U primjenama se često javljaju tzv. pozitivno-definitne matrice.

Definicija. Simetrična matrica $A \in \mathbf{R}^{n\times n}$ je pozitivno definitna ako za sve $x \in \mathbf{R}^n \setminus \{\Theta\}$ vrijedi $x^t Ax > 0$.

Propozicija. Ekvivalentno, A je pozitivno definitna ako i samo ako:

1. sve svojstvene vrijednosti od A su pozitivne
2. sve vodeće minore od A su strogo pozitivne
3. postoji gornjetrokutasta matrica R s pozitivnim elementima na dijagonali takva da je $A = R^t R$.

Usporedimo, $A = LU = R^t R$.

Zadatak. Neka je A simetrična matrica koja ima LU faktorizaciju. Pokažite da se A može prikazati u obliku $A = LDL^t$ gdje je L donjetrokutasta s jedinicama na dijagonali, a D dijagonalna.

Faktorizaciju iz (3.) dijela prethodne propozicije zovemo faktorizacija Choleskog. Na predavanjima je napravljen algoritam za njeno izračunavanje:

* za $i = 1, \ldots, n$
  * $r_{ii} = \sqrt{a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} r_{ki}^2}$
  * za $j = i+1, \ldots, n$
    $r_{ij} = \frac{1}{r_{ii}} \left(a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} r_{ki} r_{kj} \right)$

Koja je složenost? Ako se u r_{ii} vadi korijen iz negativnoga broja, onda A nije pozitivno definitna.

Napomena. Sustave $Ax = b$ s pozitivno definitnom matricom A rješavamo ovako:

1. $A = R^t R$
2. supstitucijom unaprijed riješite $R^t y = b$
3. supstitucijom unatrag riješite $Rx = y$.

Zadatak. Dokažite da je matrica

$$T = \begin{bmatrix} 2 & -1 & & & \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & -1 & 2 & -1 & \\ & & -1 & 2 & -1 \\ & & & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

pozitivno definitna.

Interpolacija polinomima

Neka nam je zadan polinom oblika $p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$. Hornerova shema dana je sljedećim algoritmom:

s=a(n);
for $i = n-1, \ldots, 0$ **do**
| s=s*x+a(i);
end
p(x)=s;

U Hornerovoj shemi za računanje vrijednosti polinoma u jednoj točki trebamo ukupno n množenja i n zbrajanja.

Problem intepolacije polinomom. Neka su zadane točke (x_i, y_i), $i = 0, \ldots, n$. Treba naći polinom $p(x) = p_n(x)$ stupnja $\leq n$ uz uvjet da je $p_n(x_i) = y_i$, $i = 0, \ldots, n$.

Prikaz interpolacijskog polinoma u standardnoj bazi

Standardna baza u prostoru polinoma $\mathcal{P}_n = \{p : p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k, a_i \in \mathbf{R}\}$ je dana funkcijama $\{1, x, \ldots, x^n\}$.

Primjer: Nađite interpolacijski polinom stupnja manjeg ili jednakog dva koji prolazi točkama $(-1, 3)$, $(1, 5)$ i $(2, 0)$.

Lagrangeov oblik interpolacijskog polinoma (LIP)

Neka su zadane točke (x_i, y_i), $i = 0, \dots, n$. Definiramo polinome $l_i \in \mathcal{P}_n$, $i = 0, \dots, n$ s

$$l_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j} = \frac{\omega_i(x)}{\omega_i(x_i)},$$

pri čemu je $\omega(x)$ definiran s

$$\omega(x) = \prod_{j=0}^{n} (x - x_j),$$

a $\omega_i(x)$ s

$$\omega_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} (x - x_j) = \frac{\omega(x)}{x - x_i}.$$

Za polinome l_i je $l_i(x_j) = \delta_{ij},\ i, j = 0, \dots, n$ pa polinom p koji rješava problem interpolacije možemo zapisati kao

$$p(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i l_i(x).$$

Ovako zapisan p nazivamo Lagrangeov interpolacijski polinom iako bi precizniji naziv bio Lagrangeov oblik interpolacijskog polinoma jer je interpolacijski polinom jedinstven.

DZ. Dokažite da prethodno definirani polinomi l_i čine bazu za prostor $\mathcal{P}_n$.

Primjer: Nađite Lagrangeov oblik interpolacijskog polinoma stupnja 2 koji polazi točkama $(-1, 3)$, $(1, 5)$ i $(2, 0)$.

Zadatak. Odredite broj operacija potrebnih za računanje vrijednosti Lagrangeovog oblika interpolacijskog polinoma u točki x.

Newtonov oblik interpolacijskog polinoma (NIP)

Neka su zadane točke (x_i, y_i), $i = 0, \ldots, n$. Newtonov interpolacijski polinom (podnosno Newtonov oblik interpolacijskog polinoma) za zadane čvorove dan je s

$$p(x) = f[x_0] + \sum_{i=1}^{n} f[x_0, \ldots, x_i](x - x_0) \cdots (x - x_{i-1}).$$

Brojeve $f[x_0, \ldots, x_i]$ nazivamo podijeljene razlike.
DZ. Dokažite da je skup polinoma

$$\left\{1, x - x_0, (x - x_0)(x - x_1), \ldots, \prod_{k=0}^{n-1}(x - x_k)\right\}.$$

baza u prostoru $\mathcal{P}_n$.

Definicija. Podijeljena razlika nultog reda u čvoru x_i dana je s

$$f[x_i] = f(x_i) = y_i,\ i = 0, \ldots, n.$$

Podijeljena razlika k-tog reda ($k \geq 1$) dobiva se iz podijeljenih razlika $(k-1)$-og reda formulom

$$f[x_i, \ldots, x_{i+k}] = \frac{f[x_{i+1}, \ldots, x_{i+k}] - f[x_i, \ldots, x_{i+k-1}]}{x_{i+k} - x_i}$$

za $k = 1, \ldots, n$ i $i = 1, \ldots, n - k$.
Podijeljene razlike najlakše određujemo pomoću tablice podijeljenih razlika (v. predavanja L.G. slide 42).
Primjer: Nađite Lagrangeov oblik interpolacijskog polinoma stupnja 2 koji polazi točkama $(-1, 3)$, $(1, 5)$ i $(2, 0)$.

Napomena: U prethodnom primjeru smo mogli naći interpolacijski polinom i da smo išli po donjoj strani tablice podijeljenih razlika. U tom slučaju bi interpolacijski polinom bio oblika

$$p(x) = 0 - 5(x - 2) - 2(x - 2)(x - 1).$$

Zadatak. Odredite broj operacija potrebnih za računanje vrijednosti Newtonovog oblika interpolacijskog polinoma u točki x.

Pogreška interpolacije

Neka je $f \in C^{(n+1)}([a, b])$. Funkciju f interpoliramo polinomom $p \in \mathcal{P}_n$ za kojeg vrijedi $p(x_i) = f(x_i)$ gdje su $x_0, x_1, \ldots, x_n$

$$a \leq x_0 < x_1 < \cdots < x_n \leq b.$$

neke unaprijed određene točke.
Za formule vidite službeni šalabahter.

Zadatak. Nađite interpolacijski polinom p stupnja 2 za funkciju $f(x) = \ln(1 + x)$ sa čvorovima interpolacije 0, 1 i 3. Nađite $p(2)$, pravu grešku interpolacije u točki 2, ocjenu pogreške interpolacije u točki 2 i uniformnu ocjenu pogreške interpolacije.

Zadatak. Odredite $t \in \langle 0, 1]$ takav da interpolacijski polinom za funkciju $f(x) = x^2 - 6x + 8$ s točkama interpolacije $(0, f(0))$ i $(t, f(t))$ ima najmanju moguću maksimalnu pogrešku na intervalu $[0, 1]$.

Zadatak. Zadane su vrijednosti funkcije $f(x) = 1/x$ u čvorovima $1/n$ za $n = 1, 2, 3, 4$. Nađite vrijednosti svih interpolacijskih polinoma na bazi te tablice u točki $x = 2/3$ i ocijenite pogrešku. Kada su stvarna greška i ocjena pogreške najmanje?

Ekvidistantni čvorovi

DZ. Ako su čvorovi interpolacije ekvidistantni tj. $x_{i+1} - x_i = h$, $i = 0, 1, \ldots, n-1$, onda vrijedi

$$\omega(x_0, \ldots, x_n) = \max_{x \in [x_0, x_n]} |(x - x_0) \ldots (x - x_n)| < n! h^{n+1}$$

za svaki $x \in [x_0, x_n]$.
Dakle, uniformna ocjena pogreške interpolacijskog polinoma stupnja n na ekvidistantnoj mreži s korakom h je:

$$\max_{x \in [x_0, x_n]} |f(x) - p(x)| \le \frac{h^{n+1}}{n+1} M_{n+1} f.$$

Zadatak. Zadana je funkcija

$$f(x) = \frac{x+1}{(3-x)^2}$$

na intervalu $[1, 2]$. Funkciju f interpoliramo polinomima p_n s $n+1$ čvorova na ekvidistantnoj mreži. Dokažite da niz polinoma p_n uniformno konvergira funkciji f kada n teži u ∞. Nađite najmanji takav n da pogreška ne prelazi 10^{-2} na cijelom intervalu.

Čebiševljevi čvorovi

Formule za Čebiševljeve polinome i Čebiševljeve polinome na $[a, b]$ pogledati na šalabahteru.
Zadatak. Za funkciju

$$f(x) = \frac{1}{1 + 25x^2}$$

na segmentu $[-1, 1]$ nađite interpolacijski polinom stupnja 2 na ekvidistantnoj i Čebiševljevoj mreži te uniformnu ocjenu pogreške.

Po dijelovima linearna interpolacija (ili interpolacija linearnim splineom)

Definicija. Neka je na segmentu $[a, b]$ zadana mreža $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$. Linearni spline l na mreži $(x_0, \ldots, x_n)$ je ona funkcija čija je restrikcija na segmetu $[x_{i-1}, x_i]$ linearni polinom. Restrikciju funkcije l na $[x_{i-1}, x_i]$ zovemo l_i.

Kod po dijelovima linearne interpolacije je

$$l_i(x) = \frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} f(x_i) + \frac{x_i - x}{x_i - x_{i-1}} f(x_{i-1}).$$

Ocjene za pogreške pogledajte u službenom šalabahteru.

Zadatak. Aproksimiramo funkciju $f(x) = \ln x$ na intervalu $[1, 100]$ po dijelovima linearnom interpolacijom. Fiksiramo traženu točnost $\epsilon = 10^{-4}$ koju zahtijevamo na cijelom intervalu. Nađite broj čvorova potreban da se postigne tražena točnost uz

1. ekvidistantnu mrežu s korakom h na cijelom intervalu $[1, 100]$,
2. podjelu intervala na tri dijela $[1, 2]$, $[2, 7]$, $[7, 100]$ i svaki od ta tri intervala podijelimo na ekvidistantnu mrežu redom s koracima h_1, h_2, h_3,
3. izračunajte vrijednost aproksimacije i pogreške u točki $x = \mathrm{e}^2$ za obje mreže.

Višestruki čvorovi

Ponekad, uz vrijednost funkcije u točki, trebamo interpolirati i vrijednost derivacije (ili više derivacija) u toj točki. Razlikujemo dva slučaja:

1. interpolacija u slučaju kada su u nekoj točki zadane sve derivacije počevši od nulte do posljednje (postoji uvijek),
2. interpolacija u slučaju kada su u nekoj točki zadane samo neke derivacije (ne mora uvijek postojati).

Za prvi slučaj koristit ćemo postupak Newtonove interpolacije uz korištenje činjenice da je

$$f[\underbrace{x_0, \ldots, x_0}_{k+1}] = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}.$$

Zadatak. Konstruirajte interpolacijski polinom koji zadovoljava slijedeće uvjete

x_i	$f(x_i)$	$f'(x_i)$	$f''(x_i)$
1	2	3	–
2	6	7	8

Interpolacija funkcije i njenih derivacija ponekad se još naziva i Hermiteova (Lagrange-Sylvesterova) interpolacija.

U drugom slučaju ne smijemo koristiti formule za Newtonovu interpolaciju nego koeficijente polinoma dobivamo rješavanjem sustava

$$p^{(k)}(x_i) = y_i,\ k = 0, \ldots, n_i - 1,\ i = 0, \ldots, m.$$

Zadatak. Konstruirajte, ako postoji, interpolacijski polinom za zadane vrijednosti funkcije f:

$$\begin{array}{ll} f(-1) = 4, & f'(-1) = 17, \\ f(0) = 2, & f''(0) = 4, \\ f(1) = 8, & f'(1) = 17. \end{array}$$

Zadatak. Konstruirajte interpolacijski polinom za zadane vrijednosti funkcije f:

$$\begin{array}{ll} f(-1) = 20, & f''(-1) = 108, \\ f(0) = 0, & f'(0) = -6, \\ f(1) = 4, & f''(1) = 0. \end{array}$$

Nadalje, aproksimirajte vrijednost funkcije f u točku 0.5.

Po dijelovima kubična interpolacija

Funkciju f aproksimiramo funkcijom φ koja je na svakom podintervalu $[x_{k-1}, x_k]$ kubični polinom $\varphi\,|_{[x_{k-1},x_k]} = p_k$, $k = 1, \ldots, n$, $p_k \in \mathcal{P}_3$. Polinome p_k zapisujemo relativno obzirom na početnu točku intervala:

$$p_k(x) = c_{0,k} + c_{1,k}(x - x_{k-1}) + c_{2,k}(x - x_{k-1})^2 + c_{3,k}(x - x_{k-1})^3,\ x \in [x_{k-1}, x_k],\ k = 1, \ldots, n$$

pri čemu mora vrijediti:

$$\begin{aligned} p_k(x_{k-1}) &= f_{k-1} \\ p_k(x_k) &= f_k \\ p_k'(x_{k-1}) &= s_{k-1} \\ p_k'(x_k) &= s_k. \end{aligned}$$

Brojeve s_k biramo tako da osiguramo neprekidnost prve derivacije funkcije φ u unutrašnjim točkama. Dobivamo

$$\begin{aligned} c_{0,k} &= f_{k-1} \\ c_{1,k} &= s_{k-1} \\ c_{2,k} &= f[x_{k-1}, x_{k-1}, x_k] - h_k f[x_{k-1}, x_{k-1}, x_k, x_k] \\ c_{3,k} &= f[x_{k-1}, x_{k-1}, x_k, x_k]. \end{aligned}$$

Kako biramo brojeve s_k?

1. Kubična Hermiteova interpolacija: s_k su prave vrijednosti derivacije funkcije f u čvorovima funkcije $s_k = f'(x_k)$ (radili ste na predavanjima pa se mi nećemo baviti njome).

2. Kvazihermitska po dijelovima kubična interpolacija: s_k su aproksimacije za $f'(x_k)$.

Besselova aproksimacija derivacija

Formule potražite na službenom šalabahteru. Greška u derivaciji je $\mathcal{O}(h^2)$, a greška u funkciji je $\mathcal{O}(h^3)$. Kvazihermiteova po dijelovima kubična interpolacija je lokalna tj. promjenom jedne točke mijenjamo samo nekoliko susjednih polinoma.

Zadatak. Besselova kvazihermitska po dijelovima kubična interpolacija interprolira funkciju $f(x)$ zadanu tablicom

x_i	-2.0	-1.5	0.5	1.0	1.5
$f(x_i)$	2.5	1.0	0.0	1.0	2.5

Izračunajte vrijednost u točki $x = 0.25$.

Kubična splajn interpolacija

Brojeve $s_0, \dots, s_n$ određujemo iz zahtjeva da φ ima neprekidnu drugu derivaciju u čvorovima $x_1, \dots, x_{n-1}$. Formule potražite na službenom šalabahteru. Da bismo iz tih formula dobili $s_0, \dots, s_n$, potrebno je riješiti sustav kojemu je matrica sustava dana s

$$A = \begin{bmatrix} d_1 & e_1 & & & \\ c_2 & d_2 & e_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & c_{n-1} & d_{n-1} & e_{n-1} \\ & & & c_n & d_n \end{bmatrix}.$$

Za to koristimo LU faktorizaciju bez pivotiranja. Ako ona postoji, onda su L i U oblika

$$L = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ l_2 & 1 & & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & l_{n-1} & 1 & \\ & & & l_n & 1 \end{bmatrix}, \; U = \begin{bmatrix} u_1 & e_1 & & & \\ & u_2 & l_2 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & u_{n-1} & e_{n-1} \\ & & & & u_n \end{bmatrix}.$$

Algoritam:

$u_1 = d_1;$

za $i = 2, \dots, n$

$l_i = c_i / u_{i-1};$

$u_i = d_i - l_i e_{i-1};$

Brojeve s_0 i s_n određujemo tako da zadamo rubne uvjete na φ. Postoji nekoliko načina, a mi radimo jedan - **Potpuni (kompletni) splajn**. Tu se u rubovima zadaju upravo derivacije od f tj. $s_0 = f'(x_0)$ i $s_n = f'(x_n)$. Greška aproksimacije u funkcijskoj vrijednosti je $\mathcal{O}(h^4)$.

Zadatak. Kubični splajn s interpolira funkciju $f(x) = \cos(x)$ na mreži čvorova $x_k = \dfrac{\pi i}{6}$, $i = -2, -1, 1, 2$ $(k = 0, \dots, 3)$ i zadovoljava rubne uvjete $s'\left(-\frac{\pi}{3}\right) = f'\left(-\frac{\pi}{3}\right), s'\left(\frac{\pi}{3}\right) = f'\left(\frac{\pi}{3}\right)$. Izračunajte vrijednost tog splajna, njegove prve i druge derivacije u točki 0 i nađite pripadne pogreške.