Neprekidna metoda najmanjih kvadrata

Cilj nam je aproksimirati teško izračunljivu funkciju f nekom funkcijom oblika $\varphi(x, a_0, a_1, \dots, a_m)$. Metodu najmanjih kvadrata koristimo na neprekidnom području. Želimo minimizirati normu greške. Da bismo to mogli, treba nam definicija norme greške u neprekidnom slučaju.
Definicija. Za funkciju $w(x)$ kažemo da je *težinska* ako je $w(x) \geq 0$ na $[a, b]$ i ako je $w(x) = 0$ samo u izoliranim točkama.
Definicija. Težinska L_2-norma funkcije u na $[a, b]$ je

$$||u||_2 = \left(\int_a^b w(x) |u(x)|^2 \mathrm{dx} \right)^{1/2} .$$

Ako je ta norma konačna i za funkciju u i za funkciju v, možemo definirati težinski skalarni produkt

$$\langle u|v \rangle = \int_a^b w(x) u(x) \overline{v(x)} \mathrm{dx} .$$

Ako je funkcija linearna, možemo ju zapisati kao

$$\varphi(x) = a_0 \varphi_0(x) + a_1 \varphi_1(x) + \cdots + a_m \varphi_m(x)$$

pri čemu su φ_i za $i = 0, \dots, m$ unaprijed nam poznate funkcije.

Definiramo $S := ||e||_2^2 = ||f - \varphi||_2^2 = \langle f|f \rangle + 2\langle f|\varphi \rangle + \langle \varphi|\varphi \rangle$. Iz uvjeta da su sve parcijalne derivacije jednake nuli, imamo sustav

$$\sum_{j=0}^{m} \langle \varphi_i|\varphi_j \rangle a_j = \langle \varphi_i|f \rangle , \quad i = 0, \dots, m .$$

Matrica M koeficijenata uz a_j za $j = 0, \dots, m$ je simetrična i pozitivno definitna pa postoji jedinstveno rješenje a problema najmanjih kvadrata. Kako je Hesseova matrica $H = 2M$ pozitivno definitna, to je izračunati vektor a jedinstveni minimum za problem najmanjih kvadrata.
Ako se za φ_i kada $i = 0, \dots, m$ uzme familija ortogonalnih funkcija, nećemo imati problema s lošom uvjetovanosti matrice M te će sustav biti dijagonalan (Zašto?). U tom slučaju rješenje je

$$a_j = \frac{\langle \varphi_j|f \rangle}{\langle \varphi_j|\varphi_j \rangle} .$$

Da bismo izbjegli katastrofalno kraćenje, kod računanja koeficijenata a_j koristimo formulu

$$a_j = \frac{1}{||\varphi_j||_2^2} \langle f - \sum_{k=0}^{j-1} a_k \varphi_k | \varphi_j \rangle , \quad j = 0, \dots, m .$$

Algoritam za računanje koeficijenata a_j

s[-1]=0
za j=0 do m radi
{
$a[j] = \langle f - s[j-1] | \varphi[j] \rangle / ||\varphi[j]||_2^2$
$s[j] = s[j-1] + a[j] * \varphi[j]$
}

Sada je $\varphi(x)$ izračunato u $s[m]$.

Primjer

Korištenjem ortogonalizirane baze za bazu polinoma $\{1, x, x^2\}$ aproksimirajte funkciju $f(x) = xe^{2x}$ na intervalu $[0, 1]$. Za težinsku funkciju uzmite $w(x) = 1$.

Najprije moramo ortogonalizirati bazu $\{1, x, x^2\}$ *jer ćemo tako dobiti ortogonalnu familiju funkcija. Na funkcijama* $\hat{\varphi}_0(x) = 1$, $\hat{\varphi}_1(x) = x$, $\hat{\varphi}_2(x) = x^2$ *provodimo Gram-Schmidtov proces ortogonalizacije.*

$$\begin{aligned}
\varphi_0(x) &= \hat{\varphi}_0(x) = 1 \\
\varphi_1 &= \hat{\varphi}_1 - b_0^1\varphi_0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& b_0^1 = \tfrac{\langle\hat{\varphi}_1|\varphi_0\rangle}{\langle\varphi_0|\varphi_0\rangle} \\
& \langle\hat{\varphi}_1|\varphi_0\rangle = \textstyle\int_0^1 x \cdot 1 \cdot 1 dx = \tfrac{1}{2} \\
& \langle\hat{\varphi}_0|\varphi_0\rangle = \textstyle\int_0^1 1^2 \cdot 1 dx = 1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\varphi_1(x) &= x - \tfrac{1}{2} \\
\varphi_2 &= \hat{\varphi}_2 - b_0^2\varphi_0 - b_1^2\varphi_1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& b_0^2 = \tfrac{\langle\hat{\varphi}_2|\varphi_0\rangle}{\langle\varphi_0|\varphi_0\rangle} = \textstyle\int_0^1 x^2 dx = \tfrac{1}{3} \\
& b_1^2 = \tfrac{\langle\hat{\varphi}_2|\varphi_1\rangle}{\langle\varphi_1|\varphi_1\rangle} \\
& \langle\hat{\varphi}_2|\varphi_1\rangle = \textstyle\int_0^1 x^2 \cdot (x - \tfrac{1}{2}) \cdot 1 dx = \tfrac{1}{12} \\
& \langle\varphi_1|\varphi_1\rangle = \textstyle\int_0^1 (x - \tfrac{1}{2})^2 \cdot 1 dx = \tfrac{1}{12} \\
& b_1^2 = 1
\end{aligned}$$

$$\varphi_2(x) = x^2 - \tfrac{1}{3} - x + \tfrac{1}{2} = x^2 - x + \tfrac{1}{6}$$

Sada kad smo ortogonalizirali danu bazu, izračunajmo koeficijente a_j *za* $j = 0, \ldots, m$. *Za to nam treba sljedeće:*

$$\begin{aligned}
&\langle\varphi_0|\varphi_0\rangle = 1\ , &&\langle\varphi_0|xe^{2x}\rangle = \textstyle\int_0^1 xe^{2x} dx = \tfrac{e^2+1}{4} \\
&\langle\varphi_1|\varphi_1\rangle = \tfrac{1}{12}\ , &&\langle\varphi_1|xe^{2x}\rangle = \textstyle\int_0^1 (x - \tfrac{1}{2})xe^{2x} dx = \tfrac{e^2-3}{8} \\
&\langle\varphi_2|\varphi_2\rangle = \tfrac{1}{180}\ , &&\langle\varphi_2|xe^{2x}\rangle = \textstyle\int_0^1 (x^2 - x + \tfrac{1}{6})xe^{2x} dx = \tfrac{8-e^2}{12}
\end{aligned}$$

Dobivamo

$$a_0 = \frac{e^2+1}{4}\ , \quad a_1 = 3 \cdot \frac{e^2-3}{2}\ , \quad a_2 = 15(8 - e^2)$$

Dakle,

$$\begin{aligned}
\varphi(x) &= a_2\varphi_2 + a_1\varphi_1 + a_0\varphi_0 \\
&= 15(8 - e^2)(x^2 - x + \frac{1}{6}) + 3 \cdot \frac{e^2-3}{2}(x - \frac{1}{2}) + \frac{e^2+1}{4} \cdot 1 \\
&= 15(8 - e^2)x^2 + \frac{3(53e^2 - 9)}{166}x + \frac{535 - 98e^2}{166}
\end{aligned}$$

Domaća zadaća Aproksimirajte funkciju $f(x) = x \cos x$ na intervalu $[0, \pi]$ pomoću ortogonalne familije funkcija $\{1, \cos x, cos(2x)\}$. Za težinsku funkciju uzmite $w(x) = 1$.