Numerička matematika

Skripta iz vježbi

16. travnja 2024.

***Disclaimer**: Ovo je radna verzija skripte iz vježbi za kolegij Numerička matematika nastala u proljeće 2024. godine. Svjesni smo da ima grešaka, tako da je njezino korištenje na "vlastitu odgovornost". Sve pronađene greške možete javiti autorima skripte kako bi se u sljedećim verzijama ispravile.*

Sadržaj

1

Greške, stabilnost, uvjetovanost

1.1 Tipovi grešaka

Neke od grešaka koje se događaju prilikom numeričkog rješavanja nekog problema su

- greške modela,
- greške u ulaznim podacima,
- greške numeričkih metoda.

Greške numeričkih metoda se dijele u dvije kategorije: *greške diskretizacije* i *greške odbacivanja*. Kao primjer greške odbacivanja, na predavanjima je analizirano korištenje Taylorovog reda u svrhu računanja aproksimacije funkcije u nekoj točki.

1.2 Greške približnog računanja i aritmetike računala

Realni brojevi u računalu su zapisani u binarnom brojevnom sustavu (standard IEEE-754). Pri tome je zapis određen sa tri veličine: predznakom, eksponentom i mantisom. Duljinu eksponenta u bitovima označavamo s w, a duljinu u bitovima mantise sa t.

Aproksimacija broja $x = \pm(1.b_{-1}b_{-2}\ldots)_2 \cdot 2^e$ spremljena u računalu se označava sa $f\ell(x) = \pm(1.b_{-1}b_{-2}\ldots b_{-t})_2 \cdot 2^e$.

Za **apsolutnu grešku** napravljenu prilikom spremanja broja x u računalo vrijedi

$$|x - f\ell(x)| \leq 2^e \cdot 2^{-(t+1)},$$

dok za **relativnu grešku** vrijedi sljedeća ocjena

$$\frac{|x - f\ell(x)|}{|x|} \leq 2^{-(t+1)} =: u.$$

u zovemo **jedinična greška zaokruživanja**.

1.2.1 Širenje grešaka u egzaktnoj aritmetici

Neka su $x, y \in \mathbb{R}$ i neka su $\tilde{x}, \tilde{y}$ odgovarajuće aproksimacije koje imaju malu relativnu grešku, tj.

$$\tilde{x} = (1 + \varepsilon_x)x, \quad \tilde{y} = (1 + \varepsilon_y)y,$$

za malene ε_x, ε_y.

Zanima nas što se događa sa konačnim rezultatom ako u računu koristimo perturbirane podatke:

- **množenje** (bezopasno):

$$\tilde{x} * \tilde{y} = (x * y)(1 + \varepsilon_*), \quad \varepsilon_* \approx \varepsilon_x + \varepsilon_y;$$

- **dijeljenje** (bezopasno):

$$x/y = (x/y)(1 + \varepsilon_/), \quad \varepsilon_/ \approx \varepsilon_x - \varepsilon_y;$$

- **zbrajanje i oduzimanje** (potencijalno opasno):

$$x + \tilde{y} = (x + y)(1 + \varepsilon_+), \quad \varepsilon_+ = \frac{x}{x+y}\varepsilon_x + \frac{y}{x+y}\varepsilon_y.$$

  - x i y istog predzanaka (bezopasno):

$$|\varepsilon_+| \le \max\{|\varepsilon_x|, |\varepsilon_y|\};$$

  - x i y različitog predznaka (**katastrofalno kraćenje**):

$$|\varepsilon_+| \le \frac{|x|}{|x+y|}|\varepsilon_x| + \frac{|y|}{|x+y|}|\varepsilon_y|.$$

Primjer 1.1. Aproksimirajmo broj e^{-10} početnim komadom Taylorovog reda oko nule.

Rješenje. Broj e^{-10} računamo putem početnog komada Taylorovog reda oko nule

$$e^x \approx \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} =: p(x),$$

sve dok posljednji član (po apsolutnoj vrijednosti) u zbroju ne padne ispod neke zadane točnosti ε

$$\left| \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \right| < \varepsilon.$$

Na predavanjima je izvedeno da tada za grešku odbacivanja vrijedi

$$|R_{n+1}(-10)| \le e^{-10}\varepsilon, \quad \frac{e^{-10} - p(-10)}{e^{-10}} \le \varepsilon.$$

Dakle, ovakvom aproksimacijom osiguravamo malu relativnu grešku.

Pogledajmo članove Taylorovog polinoma kojim aproksimiramo vrijednost e^{-10}:

$$e^{-10} = 1 - \frac{10}{1!} + \frac{10^2}{2!} - \frac{10^3}{3!} + \ldots + (-1)^n \frac{10^n}{n!}.$$

Rezultat koji očekujemo je mali broj. S druge strane, članovi polinoma različitog predznaka i prvo rastu po apsolutnoj vrijednosti a onda padaju. Dakle, rezultat možemo dobiti oduzimanjem relativno velikih brojeva pa dolazi do katastrofalnog kraćenja.

Iako smo analizom metode zaključili da je relativna greška mala, u aritmetici računala ćemo dobiti potpuno krivi rezultat. Taj rezultat nije posljedica greške numeričke metode niti greške odbacivanja nego je posljedica grešaka aritmetike računala. △

Gornji račun možemo provjeriti u pythonu, koristimo ažurirani kod s predavanja:

```
import math;
import matplotlib.pyplot as plt;

def taylor_exp(x, eps):
    clanovi = [];
    parcijalne_sume = [];
    suma = 0.0;
    clan = 1;
    k = 0;
    while (abs(clan) > eps):
        suma = suma + clan;
        clanovi.append(clan);
        parcijalne_sume.append(suma);
        k = k + 1;
        clan = clan * x / k;

    return (suma, clanovi, parcijalne_sume);

x0 = -10;
(suma, clanovi, parcijalne_sume) = taylor_exp(-x0, 5e-16);
egzaktna_vrijednost = math.exp(x0);

print(f'Funkcija exp iz Pythona vraca (egzaktno): {egzaktna_vrijednost:.
    16e}.');
print(f'Vrijednost izracunata pomocu Taylorovog polinoma: {suma:.16e}.');
print(f'Apsolutna greska: {abs(suma - egzaktna_vrijednost):.16e}.');
print(f'Relativna greska: {abs(suma - egzaktna_vrijednost) / abs(
    egzaktna_vrijednost):.16e}.');
print(f'Taylorov polinom koristi {len(clanovi)} clanova.');
print(f'Najveci clan: {max([abs(c) for c in clanovi]):.5e}.');
print(f'Teorija daje da je greska odbacivanja manja od: {math.exp(x0) *
    5e-16:.5e}.');
```

Rezultat tog koda bi bio:

```
Funkcija exp iz Pythona vraca (egzaktno): 4.5399929762484854e-05.
Vrijednost izracunata pomocu Taylorovog polinoma: 2.2026465794806711e+04.
Apsolutna greska: 2.2026465749406780e+04.
```

```
Relativna greska:  4.8516519440979010e+08.
Taylorov polinom koristi 52 clanova.
Najvećci clan:  2.75573e+03.
Teorija daje da je greska odbacivanja manja od:  2.27000e-20.
```

1.3 Uvjetovanost skalarnih funkcija

Apsolutna uvjetovanost funkcije $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ klase C^2 je

$$\kappa_f^{\text{abs}}(x) = |f'(x)|,$$

a njena **relativna uvjetovanost** (za $x \neq 0$) je

$$\kappa_f^{\text{rel}}(x) = \left| \frac{xf'(x)}{f(x)} \right|.$$

Primjer 1.2. Zadana je funkcija $f(x) = x - 2$. Odredite apsolutnu i relativnu uvjetovanost te funkcije. Što možete zaključiti o točnosti rezultata za razne $x \in \mathbb{R}$?

Rješenje.

$$f'(x) = 1.$$

$$\kappa_f^{rel}(x) = \left| \frac{xf'(x)}{f(x)} \right| = \left| \frac{x}{x-2} \right|.$$

$$\kappa_f^{abs}(x) = |f'(x)| = 1.$$

U apsolutnom smislu izvrednjavanje ove funkcije nije osjetljivo ni za koji $x \in \mathbb{R}$, no u relativnom smislu kada $x \to 2$, relativna uvjetovanost problema raste, pa time zaključujemo da je problem osjetljiv kada je x blizu 2, tj. prilikom izračuna funkcije f za x koji su blizu 2 možemo očekivati veliku relativnu grešku. △

Zaključak iz gornjeg zadatka u skladu je s *opasnim kraćenjem*: prilikom oduzimanja dva bliska broja u računalu dolazi do velike relativne pogreške.

Zadatak 1.3 (1. kolokvij 2016.)**.** Za kvadratnu jednadžbu $x^2 - 8x + q = 0$ neka je f funkcija koja realnom koeficijentu q pridružuje veće realno rješenje te kvadratne jednadžbe. Neka je domena f svi parametri q za koje ta jednadžba ima realna rješenja. Odredite apsolutnu i relativnu uvjetovanost preslikavanja f i komentirajte za koje q je račun funkcije f loše uvjetovan u apsolutnom i relativnom smislu.

Rješenje. Rješenje kvadratne jednadžbe su dana formulom

$$x_{1,2} = \frac{8 \pm \sqrt{64 - 4q}}{2} = 4 \pm \sqrt{16 - q}.$$

Domena funkcije f određena je diskriminantom: $q \leq 16$. Veće rješenje dobivamo kada u gornjoj formuli uzmemo "+". Dakle, dobili smo funkciju $f : \langle -\infty, 16] \to \mathbb{R}$ definiranu s

$$f(q) = 4 + \sqrt{16 - q}.$$

Derivacija te funkcije je

$$f'(q) = \frac{1}{2\sqrt{16-q}}.$$

Sada je

$$\begin{aligned} \kappa_f^{\mathrm{abs}}(q) &= |f'(x)| = \frac{1}{2\sqrt{16-q}}, \\ \kappa_f^{\mathrm{rel}}(q) &= \frac{|q|}{2(\sqrt{16-q})(4+\sqrt{16-q})}. \end{aligned}$$

Obje uvjetovanosti mogu težiti u $+\infty$ samo ako im nazivnici idu u 0. Kako je izraz $4+\sqrt{16-q}$ ograničen odozdo s 4, obje uvjetovanosti imaju problem samo ako $\sqrt{16-q} \to 0$, a to je ako i samo ako $q \to 16^-$. Samo za takve q je problem loše uvjetovan. $\triangle$

Zadatak 1.4 (1. kolokvij 2017., ažuriran)**.** Promotrimo funkciju

$$f(x) = 1 - \sqrt{1-x}.$$

Pretpostavimo da želimo izračunati vrijednost $f(x)$ u realnoj aritmetici računala, uz dodatnu pretpostavku da za sve y postoji neki $|\alpha_y| < \varepsilon$ takav da vrijedi $f\ell(\sqrt{x}) = \sqrt{x}(1+\alpha_y)$. Ovdje je ε jedinična greška zaokruživanja.

- Izvedite izraz za relativnu grešku izračunate vrijednosti $f\ell(f(x))$ u odnosu na egzaktnu vrijednost $f(x)$ koristeći gornju formulu i objasnite što se događa kada $x \to 0$.
- Izračunajte relativnu uvjetovanost za funkciju f u točki x i objasnite njezino ponašanje kada $x \to 0$. Je li "krivac" za lošu stabilnost iz prošlog dijela zadatka uvjetovanost funkcije?
- Predložite, ako je moguće, alternativni način za računanje $f(x)$ za male x i ukratko obrazložite zašto je takav način stabilan.

Rješenje. Kada je x blizu nule, očekujemo opasno kraćenje između članova 1 i $\sqrt{1-x}$. Potvrdimo to računom. Neka su $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ svi po apsolutnoj vrijednosti manji od ε. Tada vrijedi

$$\begin{aligned} f\ell(1-\sqrt{1-x}) &= \left(1 - \sqrt{(1-x)(1+\varepsilon_1)} \cdot (1+\varepsilon_2)\right)(1+\varepsilon_3) \\ &= (1-\sqrt{1-x})\left(1 - 1 + \frac{1-\sqrt{(1-x)(1+\varepsilon_1)}\cdot(1+\varepsilon_2)}{1-\sqrt{1-x}}\right)(1+\varepsilon_3) \\ &= (1-\sqrt{1-x})\left(1 + \underbrace{\frac{\sqrt{1-x}\,(1-\sqrt{1+\varepsilon_1}(1+\varepsilon_2))}{1-\sqrt{1-x}}}_{\to\infty \text{ za } x\to 0}\right)(1+\varepsilon_3). \end{aligned}$$

Naša hipoteza je potvrđena, kada $x \to 0$, relativna greška nekontrolirano raste.

Izračunajmo relativnu uvjetovanost:

$$f'(x) = \frac{-1}{2\sqrt{1-x}},$$
$$\kappa_f^{\text{rel}}(x) = \left|\frac{xf'(x)}{f(x)}\right| = \left|\frac{x}{(2\sqrt{1-x})1-\sqrt{1-x})}\right|$$

Odredimo ponašanje kada $x \to 0$, a za to racionalizirajmo nazivnik:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} \kappa_f^{\text{rel}}(x) &= \lim_{x\to 0} \left|\frac{x}{(2\sqrt{1-x})(1-\sqrt{1-x})}\right| \cdot \frac{1+\sqrt{1-x}}{1+\sqrt{1-x}} \\ &= \lim_{x\to 0} \left|\frac{x(1+\sqrt{1-x})}{2(\sqrt{1-x})x}\right| = 1.\end{aligned}$$

Dakle, krivac velike relativne greške nije u funkciji f nego u načinu njezinog izračuna.

Problem ćemo riješiti tako da izbjegnemo oduzimanje van korijena, a to ćemo postići racionalizacijom:

$$f(x) = (1-\sqrt{1-x}) \cdot \frac{1+\sqrt{1-x}}{1+\sqrt{1-x}} = \frac{x}{1+\sqrt{1-x}}.$$

△

Zadatak 1.5 (1. kolokvij 2021.)**.** Promotrimo funkciju

$$f(x) = \frac{1-\cos x}{\sin x}.$$

Pretpostavimo da želimo izračunati vrijednost $f(x)$ u realnoj aritmetici računala, uz dodatnu pretpostavku da za sve y postoje neki $|\alpha_y|, |\beta_y| < \varepsilon$ takvi da vrijedi $f\ell(\cos x) = \cos x(1+\alpha_y)$ i $f\ell(\sin x) = \sin x(1+\beta_y)$. Ovdje je ε jedinična greška zaokruživanja.

- Izvedite izraz za relativnu grešku izračunate vrijednosti $f\ell(f(x))$ u odnosu na egzaktnu vrijednost $f(x)$ koristeći gornju formulu i objasnite što se događa kada $x \to 0$.

- Izračunajte relativnu uvjetovanost za funkciju f u točki x i objasnite njezino ponašanje kada $x \to 0$. Je li "krivac" za lošu stabilnost iz prošlog dijela zadatka uvjetovanost funkcije?

- Predložite, ako je moguće, alternativni način za računanje $f(x)$ za male x i ukratko obrazložite zašto je takav način stabilan.

Rješenje. Očekujemo da će račun funkcije $f(x)$ prema gornjoj formuli biti loš za male x budući da u brojniku oduzimamo dva bliska broja, te cijeli rezultat dijelimo malim brojem čime još više povećavamo tu grešku dobivenu opasnim kraćenjem. Uvjerimo se to i računom. Neka su $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4$ svi po apsolutnoj vrijednosti manji od ε. Tada vrijedi

$$\begin{aligned} f\ell(f(x)) &= \frac{(1-\cos x(1+\varepsilon_1))(1+\varepsilon_2)}{\sin x(1+\varepsilon_3)}(1+\varepsilon_4) \\ &= f(x)\frac{(1+\varepsilon_2)(1+\varepsilon_4)}{1+\varepsilon_3}\frac{\sin x}{1-\cos x}\frac{1-\cos x(1+\varepsilon_1)}{\sin x} \\ &= f(x)\frac{(1+\varepsilon_2)(1+\varepsilon_4)}{1+\varepsilon_3}\frac{1-\cos x-\cos x\varepsilon_1)}{1-\cos x} \\ &= f(x)\frac{(1+\varepsilon_2)(1+\varepsilon_4)}{1+\varepsilon_3}\left(1+\frac{-\cos x\varepsilon_1}{1-\cos x}\right). \end{aligned}$$

Drugi sumand u zagradi teži u ∞ kada $x \to 0$, pa zato u tom slučaju dobivamo nekontroliranu relativnu grešku, odnosno račun je zaista nestabilan.

Izračunajmo relativnu uvjetovanost. Prvo odredimo derivaciju funkcije f:

$$f'(x) = \frac{\sin x \cdot \sin x - (1-\cos x)\cos x}{\sin^2 x} = \frac{1-\cos x}{\sin^2 x}.$$

Sada je

$$\kappa_f^{\mathrm{rel}}(x) = \left|\frac{xf'(x)}{f(x)}\right| = \left|\frac{x}{\sin x}\right|.$$

Kad $x \to 0$, uvjetovanost teži u 1. Dakle, krivac za nestabilnost iz prvog dijela zadatka je način izračuna funkcije f, a ne funkcija sama po sebi.

Formulu ćemo poraviti tako da iskoristimo svojstva trigonometrijskih funkcija tako da izbjegnemo katastrofalno kraćenje u brojniku. Više je načina, recimo

$$f(x) = \frac{\sin(x/2)}{\cos(x/2)} \text{ ili } f(x) = \frac{\sin x}{1+\cos x}.$$

Sada su te formule stabilne kada je x blizu nule. *Nije bitno za zadatak, ali druga formula nije stabilna kada je x blizu $\frac{\pi}{2}$, ponovno zbog opasnog kraćenja, no tada možemo računati prema originalnoj formuli.* △

2

Linearni sustavi

2.1 LU faktorizacija

Primjer 2.1. Nađimo LU faktorizaciju matrice

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 4 \\ 10 & 4 & 7 \\ -15 & 5 & -9 \end{bmatrix}$$

koristeći kompaktni zapis.

Rješenje. Na matrici provodimo Gaussove eliminacije: u k-tom koraku elementom na mjestu (k, k) poništavamo elemente ispod njega. Nova verzija matrice A na tim mjestima ispod dijagonale imat će nule. Kako želimo pamtiti i multiplikatore kojima smo poništili te retke, upravo ta mjesta iskoristit ćemo za pamćenje tih multiplikatora. To je u duhu tzv. **kompaktnog zapisa**.

Počinjemo se matricom

$$A^{(1)} = A.$$

Elementom na mjestu $(1, 1)$ (koji iznosi 5) poništavamo preostale elemente u prvom stupcu ispod njega Gaussovim eliminacijama. Za to je potrebno pomnožiti drugi redak s $-\frac{}{10}5 = -2$, te treći redak s $-\frac{-15}{5} = 3$. U novom stanju matrice A u prvom stupcu ispod dijagonale pisat će nule. U kompaktnom zapisu to koristimo tako da tamo ne napišemo eksplicitno te nule, nego ta mjesta iskoristimo za zapis iskorištenih multiplikatora. Te multiplikatore zapisujemo u matrici $A^{(2)}$ i odijeljujemo ih crtama:

$$A^{(2)} = \left[\begin{array}{c|cc} 5 & 1 & 4 \\ \hline -2 & 2 & -1 \\ 3 & 8 & 3 \end{array}\right].$$

Preostali elementi u matrici $A^{(}2)$ u drugom i trećem retku dobiveni su na standardan način Gaussovim eliminacijama. Nastavljamo s ovom matricom dalje: elementom na mjestu $(2,2)$ (koji iznosi 2) poništavamo preostale elemente u drugom stupcu ispod njega, a to je samo element na mjestu $(3,2)$. Njega poništimo multiplikatorom $-\frac{8}{2} = -4$. Ponovno taj multiplikator pamtimo na mjestu na kojem bi u novoj matrici A pisala nula. Nakon ažuriranja trećeg retka dobivamo novu matricu.

$$A^{(3)} = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 4 \\ -2 & 2 & -1 \\ 3 & -4 & 7 \end{bmatrix}.$$

Kada je proces završen, iz gornjeg trokuta (uključujući i dijagonalu) zadnje matrice A^3 dobivamo gornjetrokutastu matricu U, a iz donjeg trokuta stvaramo donjetrokutastu matricu L tako da svim elementima promijenimo predznak, te na dijagonalu stavimo jedinice. Dobivamo

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -3 & 4 & 1 \end{bmatrix} \text{ i } U = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}.$$

Provjerite da zaista vrijedi $A = LU$. △

Definicija 2.2. Neka je A kvadratna matrica reda n. Kažemo da je prikaz $A = LU$ **LU faktorizacija** matrice A ako je L donjetrokutasta matrica s jedinicama na dijagonali, a U gornjetrokutasta matrica, pri čemu su obje matrice L i U kvadratne reda n.

Pokazuje se da ne mora svaka matrica imati LU faktorizaciju, te da ako neka matrica i ima LU faktorizaciju, da rješavanje sustava ne mora biti stabilno. Rješenje za to je **LU faktorizacija s parcijalnim pivotiranjem**: prije svakog eliminiranja elemenata ispod dijagonale, na dijagonalno mjesto (k,k) dovedemo onaj element koji je najveći po apsolutnoj vrijednosti u tom stupcu ispod dijagonale (ili na dijagonali).

Na predavanjima se pokazuje da se taj algoritam može uvijek provesti.

Teorem 2.3. Neka je A kvadratna matrica reda n. Tada postoje gornjetrokutasta matrica U, donjetrokutasta matrica s jedinicama na dijagonali L i permutacijska matrica P, sve reda n, takve da je $PA = LU$. Ovaj zapis zovemo **LU faktorizacija s parcijalnim pivotiranjem**

Primjer 2.4. Riješimo sustav

$$\begin{aligned} 2x_1 - 4x_2 + x_3 &= 6 \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 &= 3 \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 &= 5, \end{aligned}$$

koristeći LU s parcijalnim pivotiranjem i kompaktni zapis.

Rješenje. Iz sustava čitamo:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 3 & -2 & 1 \end{bmatrix} \text{ i } b = \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

Kako 2 nije najveći element po apsolutnoj vrijednosti u prvom stupcu, nego je to 3 koji se nalazi u trećem retku, prvo moramo zamijeniti prvi i treći redak. To radimo množenjem slijeva s matricom permutacije $P^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Dobivamo matricu

Računamo LU faktorizaciju s parcijalnim pivotiranjem

$$\check{A}^{(1)} = P^{(1)}A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 3 & -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 2 & -4 & 1 \end{bmatrix}.$$

Sada na toj matrici provodimo Gaussove eliminacije u kompaktnom zapisu kao u prošlom primjeru. Dobivamo

$$\hat{A}^{(1)} = \left[\begin{array}{ccc} 3 & -2 & 1 \\ \cline{1-1} \multicolumn{1}{c|}{-1/3} & -4/3 & 5/3 \\ \multicolumn{1}{c|}{-2/3} & -8/3 & 1/3 \end{array}\right].$$

U drugom koraku u gornjoj matrici opet tražimo najveći element po apsolutnoj vrijednosti u drugom stupcu ispod ili na dijagonali. Od brojeva $-4/3$ i $-4/3$ drugi ima veću apsolutnu vrijednost, pa moramo zamijeniti drugi i treći redak. To radimo množeći slijeva matricom $P^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$. Množimo cijelu matricu $\hat{A}^{(1)}$ (uključujući i crtama odijeljene multiplikatore). Dobivamo

$$\check{A}^{(2)} = P^{(2)}\hat{A}^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \hat{A}^{(1)} = \left[\begin{array}{ccc} 3 & -2 & 1 \\ \cline{1-1} \multicolumn{1}{c|}{-2/3} & -8/3 & 1/3 \\ \multicolumn{1}{c|}{-1/3} & -4/3 & 5/3 \end{array}\right].$$

Na kraju u matrici $\hat{A}^{(2)}$ poništavamo element ispod dijagonale, dopisujući novi multiplikator odijeljen crtama. Dobivamo

$$\hat{A}^{(2)} = \left[\begin{array}{ccc} 3 & -2 & 1 \\ \cline{1-1} \multicolumn{1}{c|}{-2/3} & -8/3 & 1/3 \\ \cline{2-2} -1/3 & \multicolumn{1}{c|}{-1/2} & 3/2 \end{array}\right].$$

Matrice L i U dobivamo kao prije. Matricu P dobivamo tako da pomnožimo sve matrice $P^{(k)}$ obrnutim redoslijedom:

$$P = P^{(2)}P^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2/3 & 1 & 0 \\ 1/3 & 1/2 & 1 \end{bmatrix} \text{ i } U = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 0 & -8/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 3/2 \end{bmatrix}.$$

Možete se sami uvjeriti da zaista vrijedi $PA = LU$.

Kada dobijemo LU faktorizaciju s parcijalnim pivotiranjem za neku matricu A, sustav rješavamo u 2 koraka

1. Rješavamo donjetrokutasti sustav $Ly = Pb$ suptitucijom unaprijed (krećemo od gornjih redaka prema donjim):

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2/3 & 1 & 0 \\ 1/3 & 1/2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \\ 3 \end{bmatrix} \implies y = \begin{bmatrix} 5 \\ 8/3 \\ 0 \end{bmatrix},$$

2. Rješavamo donjetrokutasti sustav $Ux = y$ suptitucijom unazad (krećemo od donjih redaka prema gornjim):

$$\begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 0 & -8/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 3/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 8/3 \\ 0 \end{bmatrix} \implies x = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

$\triangle$

2.2 Uvjetovanost linearnih sustava i stabilnost LU

Uvjetovanost matrice A definiramo kao

$$\kappa(A) = \|A\| \cdot \|A^{-1}\|,$$

gdje je $\|\cdot\|$ operatorska norma koja je inducirana vektorskom normom $\|\cdot\|$.

Vrijede sljedeći rezultati o uvjetovanosti rješavanja sustava:

- Neka je $A \in \mathbb{M}_n$ regularna kvadratna matrica te $b, \Delta b, x$ i Δx iz $\mathbb{R}^n$ takvi da vrijedi

$$Ax = b \text{ i } A(x + \Delta x) = b + \Delta b.$$

  Tada za $x \neq 0$ vrijedi

$$\frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \leq \kappa(A) \frac{\|\Delta b\|}{\|b\|}.$$

- Ako je dodatno $\Delta A \in \mathbb{M}_n$ takva da vrijedi

$$Ax = b \text{ i } (A + \Delta A)(x + \Delta x) = b + \Delta b.$$

  Neka je $\varepsilon > 0$ takav da je $\|\Delta A\| \leq \varepsilon \|A\|$ i $\|\Delta b\| \leq \varepsilon \|b\|$. Za $x \neq 0$ i $\varepsilon\kappa(A) < 1$ vrijedi

$$\frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \leq \frac{2\varepsilon\kappa(A)}{1 - \varepsilon\kappa(A)}.$$

Izračunati $\hat{L}$ i $\hat{U}$ zadovoljavaju $\hat{L}\hat{U} = A + \Delta A$, pri čemu je

$$|\Delta A| \leq \gamma_n |\hat{L}||\hat{U}|, \quad \gamma_n = \frac{nu}{1 - nu}.$$

Idealno bi bilo kada bi $|\hat{L}||\hat{U}| = |\hat{L}\hat{U}|$ jer bi tada imali

$$|\Delta A| \leq \frac{\gamma_n}{1-\gamma_n}|A|.$$

Kako to općenito nije slučaj, promatramo omjer

$$\frac{\||\hat{L}||\hat{U}|\|}{\|A\|}.$$

Što je omjer manji, očekujemo veću točnost rješenja.

Još jedan broj koji nam je bitan kod analize stabilnosti LU faktorizacije je **pivotni rast** $\rho_n(A)$:

$$\rho_n(A) = \frac{\max_{i,j,k} |a^{(k)}{}_{i,j}|}{\max_{i,j} |a_{i,j}|},$$

gdje su $a^{(k)}_{i,j}$ elementi matrice $A^{(k)}$ u k-tom koraku LU faktorizacije. Cilj je da taj broj bude što manji. Njegova veličina ovisi naravno o matrici A, ali i o pivotiranju.

Zadatak 2.5. Nađite uvjetovanost matrice A i pivotni rast za matrice iz zadataka 2.1 i 2.2. Za uvjetovanost promatrajte ∞-normu matrice

$$\|A\|_\infty = \max_{1\leq i\leq n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|.$$

Rješenje. Računamo prvo $\kappa(A)$ i $\rho_n(A)$ za zadatak 2.1. Za uvjetovanost nam treba $\|A\|_\infty$ i $\|A^{-1}\|_\infty$:

$$\|A\|_\infty = \max\{10, 21, 29\} = 29. \tag{2.1}$$

A^{-1} možemo izračunati kao $A^{-1} = U^{-1}L^{-1}$.

Računamo L^{-1}. Neka je $X_L^{(0)} = \left[\begin{array}{c|c} L & I \end{array}\right]$:

$$X_L^{(1)} = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$X_L^{(2)} = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 11 & -4 & 1 \end{array}\right].$$

Računamo U^{-1}. Neka je $X_U^{(0)} = \left[\begin{array}{c|c} U & I \end{array}\right]$:

$$X_U^{(1)} = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 5 & 1 & 0 & 1 & 0 & -4/7 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 1/7 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1/7 \end{array}\right]$$

$$X_U^{(2)} = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 5 & 0 & 0 & 1 & -1/2 & -9/14 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1/2 & 1/14 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1/7 \end{array}\right]$$

$$X_U^{(3)} = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/5 & -1/10 & -9/70 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1/2 & 1/14 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1/7 \end{array}\right].$$

Sada je A^{-1}:

$$A^{-1} = U^{-1}L^{-1} = \begin{bmatrix} 1/5 & -1/10 & -9/70 \\ 0 & 1/2 & 1/14 \\ 0 & 0 & 1/7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 11 & -4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -71/70 & 29/70 & -9/70 \\ -3/14 & 3/14 & 1/14 \\ 11/7 & -4/7 & 1/7 \end{bmatrix},$$

pa je $\|A^{-1}\|_\infty = \max\{109/70, 1/2, 16/7\} = \frac{16}{7}$. Prema tome, uvjetovanost matrice A je $\kappa(A) = \|A\|_\infty \|A^{-1}\|_\infty = 29 \cdot \frac{16}{7} = 66.285714$, a pivotni rast je $\rho_n = \frac{8}{15}$.

Prelazimo na matricu iz zadatka 2.2. $\|A\|_\infty = \max\{7, 5, 6\} = 7$. A^{-1} računamo kao $A^{-1} = U^{-1}L^{-1}P$. Računamo L^{-1}. Neka je $X_L^{(0)} = \left[\begin{array}{c|c} L & I \end{array}\right]$:

$$X_L^{(1)} = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2/3 & 10 & \\ 0 & 1/2 & 1 & -1/3 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$X_L^{(2)} = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2/3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1/2 & 1 \end{array}\right]$$

Računamo U^{-1}. Neka je $X_U^{(0)} = \left[\begin{array}{c|c} U & I \end{array}\right]$:

$$X_U^{(1)} = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 3 & -2 & 0 & 1 & 0 & -2/3 \\ 0 & -8/3 & 0 & 0 & 1 & -2/9 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2/3 \end{array}\right]$$

$$X_U^{(2)} = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{4} & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -3/8 & 1/12 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2/3 \end{array}\right]$$

$$X_U^{(2)} = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/3 & -1/4 & -1/6 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -3/8 & 1/12 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2/3 \end{array}\right].$$

Sada je

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1/3 & -1/4 & -1/6 \\ 0 & -3/8 & 1/12 \\ 0 & 0 & 2/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2/3 & 1 & 0 \\ 0 & -1/2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/6 & -1/6 & 1/2 \\ -5/12 & 1/12 & 1/4 \\ -1/3 & 2/3 & 0 \end{bmatrix},$$

pa možemo izračunati $\|A^{-1}\|_\infty = \max\{5/6, 3/4, 1\} = 1$. Sada je $\kappa(A) = 7 \cdot 1 = 7$. Pivotni rast je $\rho_n(A) = \frac{3}{4}$. △

Zadatak 2.6. Za neki **neparan** prirodan broj n neka je A_n matrica reda n dana s

$$A_n = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & \dots & & \dots & 0 & 0 \\ 6 & 1 & 1 & 0 & & & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & 0 & & & \\ & 0 & 2 & 1 & 1 & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ & & & 0 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ \vdots & & & & 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & & & & \dots & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

(na dijagonali se izmjenjuju brojevi 3 i 1, iznad dijagonale se izmjenjuju 0 i 1, a ispod dijagonale su sve dvojke osim u prvom stupcu gdje je broj 6).

- Za $n = 5$ odredite LU faktorizaciju bez pivotiranja matrice A_n. Zaključite kako bi ti faktori L_n i U_n izgledali za velike n (bez dokaza indukcijom). Jesu li ti faktori L_n i U_n jednaki onima koji bi bili dobiveni prilikom računa LU faktorizacije s parcijalnim pivotiranjem?
- Izračunajte pivotni rast u ovisnosti o n.
- U ovisnosti o n izračunajte omjer $\dfrac{\||L_n| \cdot |U_n|\|_2}{\|A_n\|_2}$. Izvedite konačan zaključak o stabilnosti rješavanja sustava LU faktorizacijom bez pivotiranja (pod pretpostavkom da je uvjetovanost matrice dovoljno mala).

Rješenje. Za $n = 5$ matrica A_5 je

$$A_5 = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Računamo LU faktorizaciju:

$$A_5^{(1)} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad A_5^{(2)} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 3 \end{bmatrix},$$

$$A_5^{(3)} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad A_5^{(4)} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 1 \end{bmatrix},$$

pa su L i U jednaki

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \ U = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Odavde vidimo da će elementi ispod glavne dijagonale matrice L_n biti 2, dok će preostali elementi biti 0. S druge strane, U_n će na dijagonali imati jedinice, osim na mjestu $(1, 1)$ gdje će biti 3. Iznad glavne dijagonale se izmjenjuju 0 i 1, s tim da je 0 na mjestu $(1, 2)$. Svi elementi iznad su jednaki 0.

To nisu matrice kao u parcijalnom pivotiranju, što vidimo jer već treba u prvom koraku pivotirati, ili zato što su elementi ispod dijagonale kod L veći od 1.

Pivotni rast je $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ za sve n.

Omjer $\dfrac{\||L_n| \cdot |U_n|\|_2}{\|A_n\|_2}$ je točno 1. Naime, matrice L i U su nenegativne, pa je $|L| \cdot |U| = L \cdot U = A$.

Dakle, u ovom slučaju nije potrebno parcijalno pivotirati, algoritam bez parcijalnog pivotiranja dovoljno je stabilan.

△

Zadatak 2.7 (1. kolokvij 2023.)**.** Za neki prirodan broj n dana je matrica

$$A_n = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots & & \dots & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & & & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & 1 & 0 & & & \\ & 0 & 4 & 5 & 1 & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ & & & 0 & n-2 & n-1 & 1 & 0 \\ \vdots & & & & 0 & n-1 & n & 0 \\ 0 & & & & \dots & 0 & n & 0 \end{bmatrix}.$$

Na toj matrici provodimo

(i) LU faktorizaciju bez pivotiranja;

(ii) LU faktorizaciju s parcijalnim privotiranjem.

Za $n = 5$ odredite faktore L i U, odnosno L, U i P za (i) i (ii), te zaključite kako bi ti faktori izgledali za proizvoljan n (slutnju nije potrebno dokazivati indukcijom). Koristeći pivotni rast (dovoljno je gledati samo konačne matrice L i U, a ne i sve međukorake) argumentirajte jesu li računi (i) i (ii) stabilni u aritmetici računala za velike n.

Rješenje. Za $n = 5$ imamo ovakvu situaciju bez pivotiranja:

$$A_5 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 0 \end{bmatrix}, \quad L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 1 \end{bmatrix}, \quad U \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -24 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 120 \end{bmatrix}$$

Za proizvoljan n zaključujemo da će matrica L na dijagonali imati jedinice, a ispod dijagonale će ići brojevi $2, 3, \ldots, n$. U matrici U sve do zadnjeg stupca na dijagonali i neposredno iznad nje nalazit će se jedinice, a u zadnjem stupcu će pisati $(-1)^{k+1}k!$. Zbog tih zadnjih članova pivotni rast iznosi $\dfrac{n!}{n} = (n-1)!$, te je ogroman, pa račun nije stabilan.

Ako uključimo parcijalno pivotiranje:

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1/2! & -1/3! & 1/4! & -1/5! & 1 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Zaključujemo da za općeniti n u i-tom retku matrice U $(i < n)$ piše $(i+1)$-ti redak matrice A_n, a u zadnjem retku su sve nule osim jedinice u zadnjem stupcu. U matrici L jedini netrivijalni elementi su u zadnjem retku, gdje u k-tom stupcu piše $(-1)^{k+1}/(k+1)!$. Matrica P dobivena je od jedinične tako da je prvi redak prebačen u zadnji, a svi ostali su pomaknuti za jedno mjesto gore.

U ovom slučaju pivotni rast iznosi općenito $n/n = 1$, pa bi ovaj račun trebao biti stabilan.

△

Primjer 2.8. Na predavanjima smo kao primjer rješavali sustav oblika

$$\begin{bmatrix} a & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix},$$

LU faktorizacijom sa i bez parcijalnog pivotiranja.

Promotrimo funkciju koje komponenti a matrice sustava pridružuje rješenje $f(a) := x_1$. Izračunajte relativnu uvjetovanost preslikavanja $f(a)$, povežite zaključak o lošoj uvjetovanosti problema s pojmom uvjetovanosti matrice. Nakon toga, izvedite izraze za $fl(f(a))$ u slučaju rješavanja sustava Gaussovim eliminacijama sa i bez parcijalnog pivotiranja, i zaključite što se događa s relativnom greškom kada $a \to 0$.

Rješenje. Riješimo originalan sustav Gaussovim eliminacijama. Kako bismo izveli izraz za $fl(f(x))$, nemojmo raditi nikakva algebarska pojednostavljenja formula, nego isključivo ono što se događa u računalu. Pomnožimo prvu jednadžbu s $-1/a$ i pridodajmo drugoj i dobivamo

$$\left(\left(-\frac{1}{a}\right)\cdot 1 + 1\right) x_2 = \left(\left(-\frac{1}{a}\right)\cdot 1 + 2\right) \implies x_2 = \frac{2-\frac{1}{a}}{1-\frac{1}{a}}.$$

Taj rezultat uvrštavamo u prvu jednadžbu sustava, odakle dobivamo

$$x_1 = \frac{1}{a}\,(1 - x_2) = \frac{1}{a}\cdot\left(1 - \frac{2-\frac{1}{a}}{1-\frac{1}{a}}\right).$$

Dakle, dobili smo preslikavanje

$$f(a) = \frac{1}{a}\cdot\left(1 - \frac{2-\frac{1}{a}}{1-\frac{1}{a}}\right).$$

Za potrebe računa $fl(f(a))$ ovaj izraz ne trebamo pojednostavljivati, ali za potrebe računa uvjetovanosti, pojednostavimo ga:

$$f(a) = \frac{1}{a}\cdot\left(1a - \frac{2a-1}{a-1}\right) = \frac{a-1-(2a-1)}{a(a-1)} = \frac{-a}{a(a-1)} = \frac{1}{1-a}.$$

Za relativnu uvjetovanost računamo derivaciju

$$f'(a) = \frac{1}{(1-a)^2},$$

odakle je

$$\kappa_f^{\mathrm{rel}}(a) = \left|\frac{af'(a)}{f(a)}\right| = \left|\frac{a(1-a)}{(1-a)^2}\right| = \left|\frac{a}{1-a}\right|.$$

Vidimo da uvjetovanost preslikavanja $f(a)$ ide u bekonačnost kada $a \to 1$, što je logično jer tada matrica sustava postaje sve bliža singularnoj matrici (u izrazu za uvjetovanost matrice, izraz $\|A^{-1}\|$ teži u beskonačnost u tom slučaju).

Izvedimo izraz za stabilnost: za dovoljno male $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_7$ imamo

$$
\begin{aligned}
fl(f(x)) &= \frac{1}{x}\left(1 - \frac{(2-\frac{1}{x}(1+\varepsilon_1))(1+\varepsilon_2)}{(1-\frac{1}{x}(1+\varepsilon_3))(1+\varepsilon_4)}(1+\varepsilon_5)\right)(1+\varepsilon_6)(1+\varepsilon_7) = \\
&\left[1+\bar{\varepsilon} := \frac{(1+\varepsilon_2)(1+\varepsilon_5)}{1+\varepsilon_4}\right] \\
&= f(x)(1+\varepsilon_6)(1+\varepsilon_7)\frac{1-x}{x}\left(1-(1+\bar{\varepsilon}) - \frac{(2x-(1+\varepsilon_1))-(x-(1+\varepsilon_3))}{x-(1+\varepsilon_3)}(1+\bar{\varepsilon})\right) \\
&= f(x)(1+\varepsilon_6)(1+\varepsilon_7)\frac{1-x}{x}\left(-\bar{\varepsilon} - \frac{x+\varepsilon_3-\varepsilon_1}{x-1-\varepsilon_3}(1+\bar{\varepsilon})\right).
\end{aligned}
$$

Kada $x \to 0$, u nazivniku prvog razlomka imamo izraz koji teži k nuli. Zbog preostalih "epsilonova" u zagradi zadnji faktor ne teži k nuli, pa zato fl(f(x)) teži u beskonačnost. Zaključujemo da je račun nestabilan.

Sada provjerimo što se događa kada rješavamo sustav Gaussovim eliminacijama s pivotiranjem. U stvari rješavamo sustav

$$
\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ a & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}.
$$

Pomnožimo prvu jednadžbu s $-a$ i pridodajmo drugoj i dobivamo

$$
((-a)\cdot 1 + 1)x_2 = ((-a)\cdot 2 + 1) \implies x_2 = \frac{-2a+1}{-a+1}.
$$

Taj rezultat uvrštavamo u prvu jednadžbu sustava, odakle dobivamo

$$
x_1 = 2 - x_2 = 2 - \frac{-2a+1}{-a+1}.
$$

Dakle, dobili smo isto preslikavanje

$$
f(a) = 2 - \frac{-2a+1}{-a+1}
$$

kao i prije, samo zapisano u ekvivalentnom formatu.

Izvedimo izraz za stabilnost: za dovoljno male $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_6$ imamo

$$
\begin{aligned}
fl(f(x)) &= \left(2 - \frac{(-2x(1+\varepsilon_1)+1)(1+\varepsilon_2)}{(-x(1+\varepsilon_3)+1)(1+\varepsilon_4)}(1+\varepsilon_5)\right)(1+\varepsilon_6) \\
&\left[1+\bar{\varepsilon} := \frac{(1+\varepsilon_2)(1+\varepsilon_5)}{1+\varepsilon_4}\right] \\
&= f(x)(1+\varepsilon_6)(1-x)\left(2 - 2(1+\bar{\varepsilon}) + \frac{2(x(1+\varepsilon_3)-1) - 2(x(1+\varepsilon_1)+1}{x(1+\varepsilon_3)-1}(1+\bar{\varepsilon})\right) \\
&= f(x)(1+\varepsilon_6)(1-x)\left(-2\bar{\varepsilon} + \frac{2x(\varepsilon_3-\varepsilon_1)-1}{x(1+\varepsilon_3)-1}(1+\bar{\varepsilon})\right).
\end{aligned}
$$

Sada, kada $x \to 0$, faktor koji množi $f(x)$ teži u

$$(1+\varepsilon_6)(1-\bar{\varepsilon}).$$

Ako pretpostavimo da su svi ε_i po apsolutnoj vrijednosti manji od $\varepsilon \ll 1$, tada je

$$\begin{aligned}
(1+\bar{\varepsilon}) &= \frac{(1+\varepsilon_2)(1+\varepsilon_5)}{1+\varepsilon_4} = \frac{1+\varepsilon_2+\varepsilon_5+\mathcal{O}(\varepsilon)}{1+\varepsilon_4} = (1+\varepsilon_2+\varepsilon_5)\frac{1}{1+\varepsilon_4} + O(\varepsilon) \\
&= (1+\varepsilon_2+\varepsilon_5)\left(1-\varepsilon_4+\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\varepsilon_4^n\right) + \mathcal{O}(\varepsilon) \\
&= (1+\varepsilon_2+\varepsilon_5)(1-\varepsilon_4) + \mathcal{O}(\varepsilon) = 1+\varepsilon_2+\varepsilon_5-\varepsilon_4+\mathcal{O}(\varepsilon) \\
\implies & |\bar{\varepsilon}| \lessapprox 3\varepsilon.
\end{aligned}$$

Slično, $(1+\varepsilon_6)(1-\bar{\varepsilon}) = (1+\bar{\bar{\varepsilon}})$, gdje je $|\bar{\bar{\varepsilon}}| \lessapprox 4\varepsilon$, pa je ovaj račun stabilan kada $x \to 0$. $\triangle$

2.3 Faktorizacija Choleskog

Simetrična matrica $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ je **pozitivno definitna** ako za svaki vektor $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ vrijedi $x^T Ax > 0$.

Vrijede sljedeće karakterizacije pozitivne definitnost: simetrična matrica A je pozitivno definitna ako i samo ako

- sve svojstvene vrijednosti od A su pozitivne,
- sve vodeće minore su pozitivne,
- postoji gornjetrokutasta matrica R sa pozitivnim elementima na dijagonali takva da je $A = R^T R$ (**faktorizacija Choleskog**).

Elementi matrice $R = [r_{i,j}]_{i,j=1}^n$ se računaju sljedećim formulama:

- dijagonalni elementi, $i = 1, \ldots, n$:

$$r_{ii} = \sqrt{a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} r_{ki}^2},$$

- elementi i-tog retka, $j = i+1, \ldots, n$:

$$r_{ij} = \frac{1}{r_{ii}}\left(a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} r_{ki}r_{kj}\right).$$

Naglasimo da se zadnji uvjet karakterizacije simetričnih pozitivno definitnih matrica može iskazati na sljedeći način:

- simetrična matrica je pozitivno definitna ako i samo ako je gornji algoritam za traženje faktorizacije Choleskog provediv (ako prilikom algoritma nismo došli do dijeljenja s nulom ili korijenovanja negativnog broja).

Zadatak 2.9. Odredite faktorizaciju Choleskog matrice

$$A = \begin{bmatrix} 25 & 15 & -5 \\ 15 & 18 & 0 \\ -5 & 0 & 11 \end{bmatrix}.$$

Rješenje. Računamo elemente prvog retka:

$$\begin{aligned} r_{11} &= \sqrt{a_{11}} = \sqrt{25} = 5, \\ r_{12} &= \frac{1}{r_{11}} a_{12} = \frac{1}{5} \cdot 15 = 3, \\ r_{13} &= \frac{1}{r_{11}} a_{13} = \frac{1}{5} \cdot (-5) = -1. \end{aligned}$$

Računamo elemente drugog retka:

$$\begin{aligned} r_{22} &= \sqrt{a_{22} - r_{12}^2} = \sqrt{18 - 9} = 3, \\ r_{23} &= \frac{1}{r_{22}} (a_{23} - r_{12} r_{13}) = \frac{1}{3} (0 - 3 \cdot (-1)) = 1. \end{aligned}$$

Računamo element trećeg retka:

$$r_{33} = \sqrt{a_{33} - r^2 13 - r_{23}^2} = \sqrt{11 - (-1)^2 - 1^2} = 3.$$

Dakle, matrica R je

$$R = \begin{bmatrix} 5 & 3 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

△

Zadatak 2.10. Zadane su četiri matrice. Za svaku odredite je li ona pozitivno definitna. Detaljno obrazložite svoje odgovore. Za barem jednu od matrica provedite algoritam za određivanje Choleskyjeve faktorizacije.

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & -4 & 6 \\ 2 & 7 & -2 & -3 \\ -4 & -2 & 4 & -6 \\ 6 & -3 & -6 & 9 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 4 & 2 & -4 & 6 \\ 2 & 7 & -2 & -3 \\ -4 & -2 & -4 & -6 \\ 6 & -3 & -6 & 9 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 4 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 16 & -8 & 0 \\ -2 & -8 & 6 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 29 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 4 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 16 & -8 & 0 \\ -2 & -8 & 14 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 29 \end{bmatrix}.$$

Rješenje. Matrica A je singularna budući da je zbroj prvog i trećeg retka jednak nul-retku. Zato joj je jedna od singularnih vrijednosti jednaka nuli, pa joj nisu sve svojstvene vrijednosti pozitivne, dakle nije pozitivno definitna.

Matrica B ima jedan dijagoalni element (-4 na mjestu $(3,3)$) manji od nule, pa opet ne može biti pozitivno definitna.

Matrica D je strogo dijagonalno dominantna s pozitivnim dijagonalnim elementima:

$$\begin{aligned} 4 &> 2 = |0| + |-2| + |0| \\ 16 &> 8 = |0| + |-8| + |0| \\ 14 &> 12 = |-2| + |-8| + |-2| \\ 29 &> 2 = |0| + |0| + |-2|. \end{aligned}$$

Zato je pozitivno definitna.

Za matricu C provedimo algoritam.

$$\begin{aligned} r_{1,1} &= \sqrt{c_{1,1}} = \sqrt{4} = 2; \\ r_{1,2} &= \frac{c_{2,1}}{r_{1,1}} = 0,\ r_{1,3} = \frac{c_{3,1}}{r_{1,1}} = -1,\ r_{1,4} = \frac{c_{4,1}}{r_{1,1}} = 0; \\ r_{2,2} &= \sqrt{c_{2,2} - r_{1,2}^2} = \sqrt{16-0} = 4; \\ r_{2,3} &= \frac{c_{2,3} - r_{1,2}r_{1,3}}{r_{2,2}} = \frac{-8-0}{4} = -2,\ r_{2,4} = \frac{c_{2,4} - r_{1,2}r_{1,4}}{r_{2,2}} = \frac{0-0}{4} = 0; \\ r_{3,3} &= \sqrt{c_{3,3} - r_{1,3}^2 - r_{2,3}^2} = \sqrt{6-1-4} = 1; \\ r_{3,4} &= \frac{c_{3,4} - r_{1,3}r_{1,4} - r_{2,3}r_{2,4}}{r_{3,3}} = \frac{-2-0-0}{1} = -2; \\ r_{4,4} &= \sqrt{c_{4,4} - r_{1,4}^2 - r_{2,4}^2 - r_{3,4}^2} = \sqrt{29-0-0-4} = 5. \end{aligned}$$

Algoritam smo uspješno proveli, pa je matrica C pozitivno definitna. Njezina Choleskyjeva faktorizacija je $C = R^T R$, gdje je

$$R = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}.$$

$\triangle$

3

Interpolacija

3.1 Interpolacija polinomom

Problem interpolacije polinomom: Neka su zadane točke (x_i, y_i), $i = 0, 1, \dots, n$ i $x_i \neq x_j$ za $i \neq j$. Treba naći polinom $p \in \mathcal{P}_n$ takav da je $p(x_i) = y_i$ za sve $i = 0, 1, \dots, n$. Takav polinom zovemo **interpolacijski polinom**.

Ukoliko su $x_i \neq x_j$ za $i \neq j$ interpolacijski polinom postoji i jedinstven je. Ovisno koju bazu za prostor polinoma izaberemo dobijemo:

- Prikaz u standardnoj bazi
- Lagrangeov oblik interpolacijskog polinoma
- Newtonov oblik interpolacijskog polinoma

Prikaz interpolacijskog polinoma u standardnoj bazi. Skup $\{1, x, x^2, \dots, x^n\}$ je baza za realan vektorski prostor $\mathcal{P}_n = \left\{p : p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k, a_i \in \mathbb{R}\right\}$. Problem nalaženja interpolacijskog polinoma p se svodi na rješavanje sustava linearnih jednadžbi

$$p(x_i) = y_i, \quad i = 0, 1, \dots, n.$$

To je sustav $(n+1) \times (n+1)$ koji ima jedinstveno rješenje.

Lagrangeov oblik interpolacijskog polinoma. Neka su zadane točke (x_i, y_i), $i = 0, 1, \dots, n$. Definiramo polinome $\ell_i \in \mathcal{P}_n$ za $i = 0, 1, \dots, n$

$$\ell_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j} = \frac{\omega_i(x)}{\omega_i(x_i)}$$

pri čemu su

$$\omega(x) = \prod_{i=0}^{n} (x - x_i), \quad \omega_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} (x - x_j) = \frac{\omega(x)}{x - x_i}.$$

Za polinome ℓ_i vrijedi: $\ell_i(x_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$. Dakle traženi interpolacijski polinom p možemo dobiti kao

$$p(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i \ell_i(x), \quad i, j = 0, 1, \ldots, n. \tag{3.1}$$

Newtonov oblik interpolacijskog polinoma. Neka su zadane točke (x_i, y_i), $i = 0, 1, \ldots, n$. **Newtonov interpolacijski polinom** za zadane čvorove dan je sa

$$p(x) = f[x_0] + \sum_{i=1}^{n} f[x_0, \ldots, x_i](x - x_0) \ldots (x - x_{i-1}).$$

Brojeve $f[x_0, \ldots, x_i]$ zovemo **podijeljene razlike**.
Primijetimo da je baza zadana sa

$$\left\{ 1, (x - x_0), (x - x_0)(x - x_1), \ldots, \prod_{k=0}^{n-1} (x - x_k) \right\}.$$

Za vježbu dokažite da je ovo baza u $\mathcal{P}_n$.

Definicija 3.1. **Podijeljena razlika nultog reda** u čvoru x_i dana je sa

$$f[x_i] = y_i, \quad i = 0, 1, 2, \ldots, n$$

Podijeljena razlika k-tog reda ($k \geq 1$) dobiva se iz podijeljenih razlika $(k-1)$-og reda formulom

$$f[x_i, \ldots, x_{i+k}] = \frac{f[x_{i+1}, \ldots, x_{i+k}] - f[x_i, \ldots, x_{i+k-1}]}{x_{i+k} - x_i}$$

za $k = 1, \ldots, n$ i $i = 0, \ldots, n - k$.

Tablica podijeljenih razlika izgleda

x_i \ k	0	1	2	3
x_0	$f[x_0] = y_0$			
		$f[x_0, x_1]$		
x_1	$f[x_1] = y_1$		$f[x_0, x_1, x_2]$	
		$f[x_1, x_2]$		$f[x_0, x_1, x_2, x_3]$
x_2	$f[x_2] = y_2$		$f[x_1, x_2, x_3]$	
		$f[x_2, x_3]$		
x_3	$f[x_3] = y_3$			

Tablica 3.1: Tablica podijeljenih razlika

Zadatak 3.2. Nađite Newtonov interpolacijski polinom stupnja ≤ 2 koji prolazi točkama $(-1, 3)$, $(1, 5)$, $(2, 0)$.

Rješenje. Formirajmo tablicu podijeljenih razlika

x_i \ k	0	1	2
-1	3		
		$\frac{5-3}{1-(-1)} = 1$	
1	5		$\frac{-5-1}{2-(-1)} = -2$
		$\frac{0-5}{2-1} = -5$	
2	0		

Slijedi

$$p(x) = 3 + (x+1) - 2(x+1)(x-1).$$

△

3.2 Pogreške interpolacije

Neka je $f \in C^{n+1}([a,b])$, funkciju f interpoliramo u točkama $x_0, x_1, \ldots, x_n$ polinomom $p \in \mathcal{P}_n$, za kojeg vrijedi

$$p(x_i) = f(x_i) \quad i = 0, 1, \ldots, n.$$

Prava greška interpolacije u točki $x \in [x_0, x_n]$ dana je sa

$$|f(x) - p(x)|.$$

Ocjena prave greške interpolacije je

$$|f(x) - p(x)| \leq \frac{|\prod_{i=0}^{n}(x - x_i)|}{(n+1)!} M_{n+1} f$$

gdje je $M_{n+1} f = \max_{y \in [x_0, x_n]} |f^{(n+1)}(y)|$.
Pogrešku interpolacije na čitavom intervalu $[x_0, x_n]$ zovemo još i **uniformna pogreška**. Računamo je kao

$$\max_{x \in [x_0, x_n]} |f(x) - p(x)| = \max_{x \in [x_0, x_n]} \frac{|\prod_{i=0}^{n}(x - x_i)|}{(n+1)!} f^{n+1}(\xi_x).$$

Ocjena unifromne pogreške je

$$\max_{x \in [x_0, x_n]} |f(x) - p(x)| \leq \frac{|\omega(x_0, \ldots, x_n)|}{(n+1)!} M_{n+1} f$$

gdje je $\omega(x_0, \ldots, x_n) = \max_{x \in [x_0, x_n]} |(x - x_0) \ldots (x - x_n)|$.

Zadatak 3.3. Nađite interpolacijski polinom stupnja 2 za funkciju $f(x) = \ln(1+x)$ sa čvorovima interpolacije 0, 1 i 3.

a) Nađite $p(2)$, pravu pogrešku interpolacije u točki 2 i ocjenu pogreške interpolacije u točki 2,

b) nađite ocjenu uniformne pogreške interpolacije.

Rješenje.

x_i \ k	0	1	2
0	0		
		$\ln 2$	
1	$\ln 2$		$\frac{-\ln 2}{6}$
		$\frac{\ln 4 - \ln 2}{3-1} = \frac{\ln 2}{2}$	
3	$\ln 4$		

a)

$$p(x) = \ln 2 \cdot x - \frac{\ln 2}{6} x(x-1)$$

Prava pogreška u točki 2 je

$$|f(2) - p(2)| = |\ln 3 - \frac{5}{3}\ln 2| = 0.056633.$$

Da bismo odredili ocjenu prave pogreške u točki 2 treba nam $f^{(3)}$ i maksimum njene aposlutne vrijednosti na $[0, 3]$.

$$f'(x) = \frac{1}{1+x}, \quad f''(x) = -\frac{1}{(x+1)^2} \quad f'''(x) = \frac{2}{(x+1)^3}.$$

Kako je f''' strogo padajuća slijedi da je

$$M_3 f = f'''(0) = 2.$$

Slijedi da je ocjena

$$|f(2) - p(2)| \leq \frac{|(2-0)(2-1)(2-3)|}{3!} 2 = \frac{2}{3} = 0.666667$$

Vidimo da je ocjena prave pogreške pesimistična (deset puta veća od prave).

b) Za ocjenu uniformne pogreške treba nam

$$\omega(0, 1, 3) = \max_{x \in [0,3]} |x(x-1)(x-3)| = \max_{x \in [0,3]} |x^3 - 4x^2 + 3x|.$$

Tražimo globalni maksimum

$$(x^3 - 4x^2 + 3x)' = 3x^2 - 8x + 3$$

Stacionarne točke su $x_1 = 0.451516$ i $x_2 = 2.21525$. Kako je $|\omega(x_1)| = 0.63113$, a $|\omega(x_2)| = 2.11261$, slijedi da je $\omega(0,1,3) = 2.11261$. Konačno

$$\max_{x\in[0,3]} |f(x) - p(x)| \leq \frac{|\omega(0,1,3)|}{3!} M_3 f = \frac{2.11261}{6} 2 = 0.704204.$$

$\triangle$

3.3 Ekvidistantni čvorovi

Kažemo da su čvorovi interpolacije $x_0, \ldots, x_n$ ekvidistantni ako su svi susjedni čvorovi jednako udaljeni:

$$x_i = x_0 + ih, \quad h = \frac{x_n - x_0}{n} \quad i = 0, \ldots, n.$$

Za male n (cca $n \leq 5$) u ocjeni uniformne greške interpolacije član $\omega(x0, \ldots, x_n)$ tražimo kao i inače, dok za velike n možemo (bez dokaza) koristiti ocjenu

$$\omega(x_0, x_1, \ldots, x_n) = \max_{x\in[x_0,x_n]} |(x - x_0) \ldots (x - x_n)| < n! h^{n+1},$$

odakle je

$$\max_{x\in[x_0,x_n]} |f(x) - p(x)| \leq \frac{h^{n+1}}{n+1} M_{n+1} f.$$

Zadatak 3.4. Zadana je funckija

$$f(x) = \frac{x+1}{(3-x)^2}$$

na intervalu $[1, 2]$. Funkciju interpoliramo polinomom p_n sa $n + 1$ čvorova na ekvidistantnoj mreži.

a) Dokažite da niz $(p_n)_n$ uniformno konvergira ka f na $[1, 2]$.

b) Nađite najmanji $n \in \mathbb{N}$ za koji ocjena pogreške ne prelazi 10^{-2} na čitavom $[1, 2]$.

Rješenje. Rastavimo funkciju na pracijalne razlomke

$$f(x) = \frac{4}{(3-x)^2} - \frac{1}{3-x}$$

Kako je

$$\left(\frac{1}{3-x}\right)' = \frac{1}{(3-x)^2}$$

imamo da je

$$f^{(n+1)}(x) = 4\left(\frac{1}{3-x}\right)^{(n+2)} - \left(\frac{1}{3-x}\right)^{(n+1)}$$

Indukcijom se pokaže da je

$$\left(\frac{1}{3-x}\right)^{(n)} = \frac{n!}{(3-x)^{n+1}}$$

pa je

$$f^{(n+1)}(x) = 4\frac{(n+2)!}{(3-x)^{n+3}} - \frac{(n+1)!}{(3-x)^{n+2}} = \frac{(n+1)!}{(3-x)^{n+3}}(5+4n+x)$$

pa je

$$|f^{(n+1)}(x)| = \frac{(n+1)!}{(3-x)^{n+3}}(5+4n+x) \leq (n+1)!(7+4n)$$

(najveće za $x = 2$). Koristeći formulu za ocjenu pogreške za ekvidistantnu mrežu, dobivamo

$$\max_{x\in[x_0,x_n]}|f(x)-p_n(x)| \leq \frac{h^{n+1}}{n+1}(n+1)!(7+4n) \underbrace{=}_{h=\frac{1}{n}} \frac{1}{n^{n+1}}n!(7+4n) = \frac{(n-1)!(4n+7)}{n^n}$$

Koristimo da je svaki od $(n-2)$ faktora u $(n-1)!$ (svi osim prvog) manji od odgovarajućih faktora u n^{n-2}. Zato imamo

$$\max_{x\in[x_0,x_n]}|f(x)-p_n(x)| \leq \frac{(n-1)!(4n+7)}{n^n} = \frac{1}{n}\frac{(n-1)!}{n^{n-2}}\left(4+\frac{7}{n}\right) < \frac{1}{n}\cdot 1\cdot 11 = \frac{11}{n} \to 0$$

kada n teži u ∞. Za drugi dio zadatka potrebno je riješiti nejednadžbu

$$\frac{(n-1)!(4n+7)}{n^n} \leq 10^{-2}.$$

Nema bolje strategije od uvrštavanja brojeva $n = 1, 2, \ldots$ redom dok ne naiđemo na prvi za koji je nejednakost zadovoljena. To je za $n = 9$ kada je izraz na lijevoj strani jednak 0.00447514. △

3.4 Čebiševljeva mreža

Na domeni $[-1, 1]$ definiramo Čebiševljevu mrežu kao točke $x_0, \ldots, x_n$:

$$x_k = \cos\frac{(2k+1)\pi}{2n+2}, \quad k = 0, 1, \ldots, n.$$

To su točke koje su dobivene kao nultočke Čebiševljevog polinoma prve vrste T_{n+1}.

Čebiševljevi polinomi prve vrste $(T_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ dani su rekurzivnom formulom

$$\begin{aligned} T_0(x) = 1, \quad T_1(x) &= x \\ T_{n+1}(x) &= 2xT_n(x) - T_{n-1}(x). \end{aligned}$$

Nekoliko prvih članova iznosi:

$$T_2(x) = 2x^2 - 1, \quad T_3(x) = 4x^3 - 3x, \quad T_4(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1, \quad \dots$$

Za njih vrijedi

$$T_n(\cos\varphi) = \cos(n\varphi), \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

Glavna svojstva tih polinoma su (za $n \in \mathbb{N}$):

- polinom T_n je stupnja n i vodeći koeficijent mu je 2^{n-1} (to se induktivno dokaže iz rekurzije);
- polinom T_n ima n nultočaka, koliko ih ima i jednadžba $\cos(n\varphi)$ za $\varphi \in [0, \pi]$ – to su $\cos\frac{(2k+1)\pi}{2n}$, za $k = 0, \dots, n-1$;
- prema teoremu s predavanja, za polinom $2^{-n} \cdot T_{n+1}$ se postiže najmanja vrijednost izraza $|\omega(x_0, \dots, x_n)|$ među svim normiranim polinomima stupnja $n+1$ s nultočkama $x_0, \dots, x_n$ – ona iznosi 2^{-n}.

Zbog zadnjeg svojstva za nultočke polinoma T_{n+1} dobivamo najbolju ogradu u ocjeni uniformne pogreške interpolacije, što nas motivira da na intervalu $[-1, 1]$ koristimo Čebiševljeve točke.

U slučaju da se radi o nekom drugom intervalu $[a, b]$, nultočke je potrebno pomaknuti funkcijom $l : [a, b] \to [-1, 1]$ zadanom s

$$l(x) = \frac{2}{b-a}(x-a) - 1.$$

Tada dobivamo točke

$$\tilde{x}_k = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}\cos\frac{(2k+1)\pi}{2n+2}, \quad k = 0, 1, \dots, n,$$

i ocjenu

$$\max_{x\in[a,b]}|f(x) - p(x)| \leq 2\left(\frac{b-a}{4}\right)^{n+1}\frac{M_{n+1}f}{(n+1)!}.$$

Zadatak 3.5. Za funkciju

$$f(x) = \frac{1}{1+25x^2}$$

na segmentu $[-1, 1]$ nađite interpolacijski polinom stupnja 2 na ekvidistantnoj i Čebiševljevoj mreži te uniformnu ocjenu greške.

Rješenje. Ekvidistantna mreža sastoji se od čvorova $-1, 0, 1$. Tablica podijeljenih razlika je

$x_i \setminus k$	0	1	2
-1	$\frac{1}{26}$		
		$\frac{25}{26}$	
0	1		$\frac{-25}{26}$
		$\frac{-25}{26}$	
1	$\frac{1}{26}$		

pa je interpolacijski polinom dan sa

$$p_2(x) = \frac{1}{26} + \frac{25}{26}(x+1) - \frac{25}{26}x(x+1) = 1 - \frac{25}{26}x^2.$$

Na Čebiševljevoj mreži čvorovi su dani kao nultočke polinoma $T_3(x) = \cos(3 \arccos x)$, a to su

$$x_i = \cos\frac{(2i+1)\pi}{6}, \quad i = 0, 1, 2.$$

To vidimo iz formule za Čebiševljeve točke, ili računajući nultočke polinoma $T_3(x) = 4x^3 - 3x$. Zato je

$$x_0 = \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad x_1 = 0, \quad x_2 = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Tablica podijeljenih razlika je dana sa

$$\begin{array}{c|ccc}
x_i \setminus k & 0 & 1 & 2 \\
\hline
\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{4}{79} & & \\
 & & -\frac{150}{79\sqrt{3}} & \\
0 & 1 & & -\frac{100}{79} \\
 & & \frac{150}{79\sqrt{3}} & \\
-\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{4}{79} & &
\end{array}$$

pa je interpolacijski polinom dan sa

$$r_2(x) = \frac{4}{79} - \frac{150}{79\sqrt{3}}(x - \frac{\sqrt{3}}{2}) - \frac{100}{79}x(x - \frac{\sqrt{3}}{2}) = 1 - \frac{100}{79}x^2.$$

Tražimo ocjenu pogreške, pa nam treba maksimum funkcije $|f^{(3)}(x)|$ na $[-1, 1]$. Kako je

$$\begin{aligned}
f'(x) &= -\frac{50x}{(1+25x^2)^2} \\
f''(x) &= -\frac{50(1-75x^2)}{(1+25x^2)^3} \\
f'''(x) &= -15000\frac{25x^3 - x}{(1+25x^2)^4} \\
f^{(4)} &= \frac{15000}{(1+25x^2)^5}(3125x^4 - 250x^2 + 1)
\end{aligned}$$

Stacionarne točke od f''' su

$$x_{1,2} = \pm 0.275, \quad x_{3,4} = \pm 0.06498$$

Da nađemo maksimum, pogledajmo vrijednosti od f''' u stacionarnim točkama i rubovima intervala:

$$\begin{aligned}
|f'''(x_2)| = |f'''(x_1)| &= 56.62 \\
|f'''(x_3)| = |f'''(x_4)| &= 583.57 \\
|f'''(1)| = |f'''(-1)| &= 0.787
\end{aligned}$$

Za uniformnu ocjenu greške treba naći

$$\max_{x\in[-1,1]}|(x+1)x(x-1)|.$$

Promatramo polinom $\omega_2(x) = x^3 - x$. On svoje ekstreme postiže u točkama $\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$ i po apsolutnoj vrijednosti oni iznose $\frac{2\sqrt{3}}{9}$ pa je uniformna ocjena greške za ekvidistantnu mrežu jednaka

$$\max_{x\in[-1,1]}|f(x) - p_2(x)| \leq 37.436.$$

Za interpolacijski polinom na Čebiševljevoj mreži koristimo da je

$$\max_{x\in[-1,1]}|2^{-2}T_3| = \frac{1}{4},$$

pa je uniformna ocjena pogreške dana sa

$$\max_{x\in[-1,1]}|f(x) - r_2(x)| \leq 24.315.$$

△

U prošlom zadatku, prave maksimalne pogreške su:

- 0.646229 za ekvidistantnu mrežu (postiže se u $x = 0.404921$),
- 0.6005977 za čebiševljevu mrežu (postiže se u $x = 0.371166$).

3.5 Hermiteova interpolacija

Neka su zadane točke (x_i, y_i) i (x_i, y_i'), $i = 0, 1, \ldots, n$. Tražimo interpolacijski polinom h takav da

$$h(x_i) = y_i, \quad h'(x_i) = y_i', \quad i = 0, 1, \ldots, n.$$

U ovom slučaju govorimo o **Hermiteovoj** interpolaciji. Takav polinom postoji i jedinstven je.

Ako ovakav interpolacijski problem rješavamo pomoću Newtonovog interpolacijskog polinoma, uočavamo da ne znamo izračunati $f[x_i, x_i]$, jer dobivamo $0/0$. No vrijedi:

$$f[x_i, x_i] = \lim_{h\to 0} f[x_i, x_i + h] = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_i + h) - f(x_i)}{x_i + h - x_i} = f'(x_i).$$

Vrijedi i općenitiji rezultat:

$$f\,\underbrace{[x_i, \ldots, x_i]}_{k+1} = \frac{f^{(k)}(x_i)}{k!}.$$

Zadatak 3.6. Konstruirajte interpolacijski polinom koji zadovoljava sljedeće uvjete:

x_i	$f(x_i)$	$f'(x_i)$
1	2	3
2	6	7

Rješenje. Tablica podijeljenih razlika je

x_i \ k	0	1	2	3
1	2			
		3		
1	2		1	
		4		2
2	6		3	
		7		
2	6			

Interpolacijski polinom je

$$p(x) = 2 + 3(x-1) + (x-1)^2 + 2(x-1)^2(x-2).$$

$\triangle$

Neka je $h_{2n+1}(x)$ Hermiteov interpolacijski polinom za funkciju f na mreži čvorova $x_0, \ldots, x_n$. Ako na $[x_0, x_n]$ postoji $f^{(2n+2)}$ tada je ocjena greške interpolacije za $x \in [x_0, x_n]$ jednaka

$$|f(x) - h_{2n+1}(x)| \leq \omega^2(x) \frac{M_{2n+2}f}{(2n+2)!}.$$

Zadatak 3.7. Funkciju $f(x) = \ln(x)$ aproksimiramo Hermiteovim interpolacijskim polinomom stupnja 3 na čvorovima $x_0 = 1$ i $x_1 = 2$. Nađite $h_3(1.5)$ i izračunajte pravu grešku te ocjenu greške interpolacije.

Rješenje. Pravimo tablicu podijeljenih razlika pa je

x_i \ k	0	1	2	3
1	0			
		1		
1	0		$\ln 2 - 1$	
		$\ln 2$		$3/2 - 2\ln 2$
2	$\ln 2$		$1/2 - \ln 2$	
		$1/2$		
2	$\ln 2$			

$$h_3(x) = (x-1) - 0.306853(x-1)^2 + 0.113706(x-1)^2(x-2).$$

$h_3(1.5) = 0.409074$, pa je prava greška $|ln(1.5) - h_3(1.5)| = 0.00361$.

Kako je $f^{(4)} = -\frac{6}{x^4}$ imamo da je $M_4 f = 6$. S druge strane, $\omega(1.5)^2 = 0.5^4 = 1/16$. Dakle, ukupno imamo

$$|\ln(1.5) - h_3(1.5)| \le \frac{1}{16} \cdot \frac{6}{4!} = 0.015624.$$

△

3.6 Po dijelovima linearna interpolacija

Neka je dana mreža

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$$

na $[a, b]$. **LINEARNI SPLINE** na toj mreži, za funkciju f je ona funkcija čija je restrikcija na $[x_{i-1}, x_i]$ linearni polinom:

$$\ell_i(x) = \frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} f(x_i) + \frac{x_i - x}{x_i - x_{i-1}} f(x_{i-1}), \quad \text{za } x \in [x_{i-1}, x_i].$$

Ako je funkcija $f \in C^2([a, b])$ tada je ocjena uniformne pogreške interpolacije

$$\max_{x \in [a,b]} |f(x) - \ell(x)| \le \frac{1}{8} \max_{i=1,2,\ldots,n} (x_i - x_{i-1})^2 M_2 f.$$

Zadatak 3.8. Aproksimiramo funkciju $f(x) = \ln x$ na $[1, 100]$ po dijelovima linearnom interpolacijom. Fiksiramo traženu točnost $\varepsilon = 10^{-4}$ koju zahtijevamo na čitavom intervalu. Nađite broj čvorova da se postigne tražena točnost uz

a) ekvidistantnu mrežu s korakom h na čitavom $[1, 100]$,

b) podijelimo interval na tri dijela : $[1, 2], [2, 7], [7, 100]$ te napravimo ekvidistantnu mrežu na svakom od njih s koracima h_1, h_2 i h_3.

Rješenje.

$$f(x) = \ln x, \quad f'(x) = \frac{1}{x}, \quad f''(x) = -\frac{1}{x^2}.$$

Vidimo da na intervalu $[a, b]$, funkcija $|f''|$ postiže svoj maksimum u lijevom rubu intervala (strogo padajuća).

a) Koristeći ocjenu pogreške dobivamo da je na $[1, 100]$, uz ekvidistantnu mrežu s korakom h, pogreška interpolacije

$$\max_{x \in [1,100]} |f(x) - l(x)| \le \frac{1}{8} h^2 |f''(1)| = \frac{h^2}{8}.$$

Tražimo h tako da je

$$\frac{h^2}{8} < \varepsilon = 10^{-4}.$$

To znači da mora biti

$$h < 10^{-2}\sqrt{8} = 0.028284.$$

$$h = \frac{b-a}{n} \implies n = \frac{b-a}{h} > \frac{99}{10^{-2}\sqrt{8}} = 3500.17$$

Prema tome broj podsegmenata mora biti $n = 3501$, tj. broj čvorova je 3502.

b) 1. interval [1,2]: $M_2 f = |f''(1)| = 1$, dakle

$$h_1^2 < 8 \cdot 10^{-4} \implies h_1 < 0.02828427.$$

$$h_1 = \frac{2-1}{n_1} \implies n_1 > \frac{1}{h_1} = 35.35$$

Dakle $n_1 = 36$

2. interval [2,7]: $M_2 f = |f''(2)| = \frac{1}{4}$, dakle

$$h_2^2 < 32 \cdot 10^{-4} \implies h_2 < 0.05656824.$$

$$h_2 = \frac{7-2}{n_2} \implies n_2 > \frac{5}{h_2} = 88.38$$

Dakle $n_2 = 89$

3. interval [7,100]: $M_2 f = |f''(7)| = \frac{1}{49}$, dakle

$$h_3^2 < 392 \cdot 10^{-4} \implies h_3 < 0.197989.$$

$$h_3 = \frac{100-7}{n_3} \implies n_3 > \frac{93}{h_3} = 469.72$$

Dakle $n_3 = 470$

Dakle ukupno nam treba $(n_1 + 1) + (n_2 + 1) + (n_3 + 1) - 2 = 596$ čvorova.

$\triangle$

Zadatak 3.9. Funkciju $f(x) = \frac{1}{1+2x}$ aproksimiramo na ekvidistantnoj mreži $[0, 1]$ s 13 čvorova.

- polinomom stupnja 12;
- po dijelovima linearnom interpolacijom.

Izračunajte ocjenu uniformne pogreške u oba slučaja. Izračunajte vrijednost funkcije u $x_0 = 0.7$ i jedne od aproksimacija u istoj točki, te pravu pogrešku.

Rješenje. • Kako je $n = 12$, $h = 1/12$. Koristimo ocjenu

$$\max_{x\in[0,1]} |f(x) - p(x)| \leq \frac{h^{n+1}}{n+1} M_{n+1} f.$$

Ovdje nam treba maksimum 13. derivacije. Pogledajmo prvih nekoliko derivacija funkcije f:

$$f'(x) = \frac{-2}{(1+2x)^2}, \quad f''(x) = \frac{8}{(1+2x)^3}, \quad f'''(x) = \frac{-48}{(1+2x)^4}.$$

Zaključujemo da derivacija općenito izgleda (može se dokazati indukcijom)

$$f^{(n)} = \frac{(-1)^n 2^n n!}{(1+2x)^{(n+1)}}.$$

Na $[0,1]$ je $|f^{(13)}(x)| = f^{(13)}(x) = \frac{2^{13}13!}{(1+2x)^{14}}$. $f^{(13)}$ je na tom intervalu padajuća, pa se maksimum postiže u lijevom rubu intervala, tj. $M_{13} f = 2^{13} 13!$. Uvrštavanjem u ocjenu greške dobivamo

$$\max_{x\in[0,1]} |f(x) - p(x)| \leq \frac{\frac{1}{12^{13}}}{13} 2^{13} 13! = 0.036675.$$

- Za ocjenu uniformne pogreške koristimo formulu

$$\max_{x\in[a,b]} |f(x) - \ell(x)| \leq \frac{1}{8} \max_{i=1,2,\ldots,n} (x_i - x_{i-1})^2 M_2 f.$$

Kako smo na ekvidistantnoj mreži, vrijedi da je $\max_{i=1,2,\ldots,n}(x_i - x_{i-1})^2 = 1/12^2$. Kako je $|f''(x)| = f''(x)$ na $[0,1]$ i kako je $f''(x)$ padajuća na tom intervalu, zaključujemo da se maksimum postiže u lijevom rubu intervala, tj. $M_2 f = 8$. Ukupno imamo:

$$\max_{x\in[a,b]} |f(x) - \ell(x)| \leq \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{12^2} \cdot 8 = 0.0069444.$$

Aproksimaciju ćemo izračunati koristeći linearni spline. Kako je $0.7 \in [x_8, x_9] = [8/12, 9/12] = [2/3, 3/4]$ računamo $\ell_9(0.7)$

$$\ell_9(x) = -\frac{12}{35}x + \frac{23}{35}, \quad \ell_9(0.7) = 0.41714286.$$

Kako je $f(0.7) = 0.4166666$, prava greška je $|f(0.7) - \ell_9(0.7)| = 4.7619 \cdot 10^{-4}$. △

3.7 Po dijelovima kubična interpolacija

Funkciju f aproksimiramo funkcijom φ koja je na svakom podintervalu $[x_{i-1}, x_i]$ kubični polinom, tj.

$$\varphi\big|_{[x_{i-1},x_i]} = p_i,$$

gdje je svaki polinom p_i stupnja 3 i zapisujemo ga relativno s obzirom na lijevu točku intervala:

$$p_i(x) = c_{0,i} + c_{1,i}(x - x_{i-1}) + c_{2,i}(x - x_{i-1})^2 + c_{3,i}(x - x_{i-1})^3.$$

Za svaki polinom p_i treba odrediti 4 koeficijenta. Uvjeti su sljedeći

$$\begin{aligned} p_k(x_{k-1}) &= f(x_{k-1}) \\ p_k(x_k) &= f(x_k) \\ p_k'(x_{k-1}) &= s_{k-1} \\ p_k'(x_k) &= s_k \end{aligned}$$

Ako je $s_k = f'(x_k)$ tada govorimo o **kubičnoj Hermiteovoj interpolaciji.**

Ako je funkcija $f \in C^4([a,b])$ i $h = \max_{k=1,\dots,n} |x_k - x_{k-1}|$ tada vrijedi sljedeća ocjena pogreške interpolacije

$$|f(x) - \varphi(x)| \le \frac{1}{384} h^4 M_4,$$

dok za ocjenu uniformne pogreške vrijedi

$$\max_{x \in [a,b]} |f(x) - \varphi(x)| \le \frac{(b-a)^4 M_4}{384 n^4}.$$

Zadatak 3.10. Funkciju $f(x) = \sqrt{1+x}$ aproksimiramo na intervalu $[0,4]$.

a) Odredi najmanji broj podintervala n tako da ocjena uniformne pogreške na $[0,4]$ ne prelazi $\varepsilon = 10^{-2}$ ako funkciju aproksimiramo po dijelovima kubnom Hermiteovom interpolacijom.

b) Za n iz podzadatka a) odredite aproksimaciju u toči $x = 0.1$ i nađite pravu pogrešku u toj točki.

Detaljno obrazložite tvrdnje vezane uz ocjenu greške.

Rješenje. a) Ekvidistantna mreža sa n podintervala u intervalu $[a,b]$ ima korak $h = (b-a)/n$. Iz zahtjeva da je ocjena manja ili jednaka ε dobivamo ocjenu za broj podintervala n

$$n \ge (b-a) \sqrt[4]{\frac{M_4}{384\varepsilon}}.$$

Funkcija f i njene derivacije su redom

$$\begin{aligned} f(x) &= \sqrt{1+x}, \\ f'(x) &= \frac{1}{2\sqrt{1+x}}, \\ f''(x) &= -\frac{1}{4(1+x)^{3/2}}, \\ f'''(x) &= \frac{3}{8(1+x)^{5/2}}, \\ f^{(4)} &= -\frac{15}{16(x+1)^{7/2}}. \end{aligned}$$

Na intervalu [0,4] $|f^{(4)}(x)| = \frac{15}{16(x+1)^{7/2}}$ je padajuća funkcija pa se maksimum postiže u lijevom rubu, tj. $M_4 = |f^{(4)}(0)| = 15/16$.

Uz traženu točnost $\varepsilon = 10^{-2}$, za broj podintervala n mora vrijediti

$$n \geq 4\sqrt[4]{\frac{15/16}{384 \cdot 10^{-2}}} = 2.81,$$

tj. potrebno nam je $n = 3$ podintervala, odnosno 4 čvora.

b) Kako je $0.1 \in [0, 4/3]$ računamo kubni polinom na prvom podintervalu. Računamo podijeljene razlike Dakle, polinom $p_1(x)$ je

x_i \ k	0	1	2	3
0	1			
		0.5		
0	1		−0.07826706	
		0.39564392		0.02027193
$4/3$	$\sqrt{21}/3$		−0.05123782	
		0.32732683		
$4/3$	$\sqrt{21}/3$			

$$p_1(x) = 1 + 0.5x - 0.07826706x^2 + 0.02027193x^2\left(x - \frac{4}{3}\right).$$

Prava greška u točki 0.1 je

$$|f(0.1) - p(0.1)| = |1.048808848 - 1.048967309| = 1.584613 \cdot 10^{-4}.$$

△

3.8 Kubični spline

Brojeve $s_0, \ldots, s_n$ određujemo iz zahtjeva da φ ima neprekidnu drugu derivaciju

$$\begin{aligned} \varphi(x_{k-1}) &= f(x_{k-1}) \\ \varphi(x_k) &= f(x_k) \\ p_k'(x_k) &= p_{k+1}'(x_k) \\ p_k''(x_k) &= p_{k+1}''(x_k) \end{aligned}$$

Uvrštavanjem i sređivanjem dobivamo sustav jednadžbi u nepoznanicama s_k:

$$h_{k+1}s_{k-1} + 2(h_k + h_{k+1})s_k + h_k s_{k+1} = 3(h_{k+1}f[x_{k-1}, x_k] + h_k f[x_k, x_{k+1}]), \quad k = 1, \ldots, n-1$$

Dakle, imamo $n-1$ jednadžbi i $n+1$ nepoznanica. Jedinstvenost rješenja ćemo imati ako su zadani s_0 i s_n.

Zadatak 3.11. Funkciju $f(x) = (x+1)\sin x$ interpoliramo potpunim kubičnim splajnom na ekvidistantnoj mreži s $n = 4$ podintervala na intervalu $[0, \pi/2]$. Potpuni kubični spline definira $s_0 = f'(x_0)$ i $s_4 = f'(x_4)$. Dodatno su zadani $s_2 = 1.9689828101$ i $s_3 = 1.7564789686$. Izračunajte vrijednost tog splajna u točki $x = \pi/6$ i pripadnu pravu pogrešku.

Rješenje. Kako je $\frac{\pi}{6} \in [x_1, x_2] = \left[\frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{4}\right]$ potrebno je izračunati s_1. To možemo koristeći npr. prvu jednadžbu (uzeli smo u obzir da smo na ekvidistantnoj mreži pa su svi $h_i = h = \pi/8$):

$$4s_1 + s_2 = 3(f[x_0, x_1] + f[x_1, x_2]) - s_0.$$

Kako je $f'(x) = \sin x + (x+1)\cos x$ možemo izračunati $s_0 = f'(0) = 1$. Podijeljenje razlike su redom

$$f[x_0, x_1] = \frac{f(\pi/8) - f(0)}{\frac{\pi}{8}} = 1.3571787908,$$
$$f[x_1, x_2] = \frac{f(\pi/4) - f(\pi/8)}{\frac{\pi}{8}} = 1.8576674039.$$

Uvrštavanjem izračunamo $s_1 = 1.6688889435$. Sada računamo podijeljene razlike za polinom p_2 na drugom podintervalu Interpolacijski polinom onda glasi

x_i \ k	0	1	2	3
$\pi/8$	0.5329628648			
		1.6688889435		
$\pi/8$	0.5329628648		0.4807204020	
		1.8576674039		−0.5023134940
$\pi/4$	1.2624671485		0.2834623542	
		1.9689828101		
$\pi/4$	1.2624671485			

$$p_2(x) = 0.5329628648 + 1.6688889435(x - \pi/8) + 0.4807204020(x - \pi/8)^2 - 0.5023134940(x - \pi/8)^2(x - \pi/4).$$

$p_2(\pi/6) = 0.7619102398$ pa je prava pogreška $|f(\pi/6) - p_2(\pi/6)| = 0.0001108520$. △

Zadatak 3.12. Nađite kubični splajn s koji interpolira sljedeći skup podataka (točaka): Za nalaženje splajna iskoristite "not-a-knot" rubni uvjet, tj. uvjet $p_1 = p_2$ i $p_{n-1} = p_n$.

x_i	-3	-2	2	3
y_i	1	2	2	1

Izračunajte vrijednost interpolacijskog splajna u točki $x = 0$.

Rješenje. U zadatku imamo $n = 3$ podintervala, pa slijedi da mora biti

$$p_1 = p_2 = p_3.$$

Dakle, s je obični interpolacijski polinom za zadane 4 točke. Računamo tablicu podijeljenih razlika Dakle, $s(x)$ je

x_i \ k	0	1	2	3
-3	1			
		1		
-2	2		$-1/5$	
		0		0
2	2		$-1/5$	
		-1		
3	1			

$$\begin{aligned} s(x) &= 1 + (x+3) - \frac{1}{5}(x+3)(x+2) + 0 \cdot (x+3)(x+2)(x-2) \\ &= -\frac{1}{5}x^2 + \frac{14}{5}. \end{aligned}$$

U točki $x = 0$ je $s(0) = 2.8$.

DZ. Riješite zadatak koristeći sustav. △