JMBAG

IME I PREZIME

BROJ BODOVA

NUMERIČKA MATEMATIKA

Prvi kolokvij – 26. travnja 2024.

Na kolokviju nije dozvoljeno koristiti ništa osim kalkulatora i službenog šalabahtera.

Zadatak 1. (10 bodova)

(a) Definirajte uvjetovanost matrice $A \in \mathbb{M}_n$.

(b) Označimo s $M_\varepsilon = \begin{bmatrix} 1 & \varepsilon \\ -\varepsilon & 5 \end{bmatrix}$. Je li M_ε loše uvjetovana matrica za neku vrijednost $\varepsilon \in \langle -10, 10 \rangle$?

(c) Iskažite i dokažite teorem o ocjeni $\|\Delta x\|/\|x\|$ pomoću uvjetovanosti proizvoljne regularne kvadratne matrice $A \in \mathbb{M}_n$, gdje je matrica ΔA reda n te vektori x, Δx, b i Δb duljine n takvi da je

$$Ax = b \quad \text{i} \quad (A + \Delta A)(x + \Delta x) = b + \Delta b.$$

JMBAG | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

NUMERIČKA MATEMATIKA

Prvi kolokvij – 26. travnja 2024.

Zadatak 2. (10 bodova)

(a) Neka su dani međusobno različiti čvorovi interpolacije $x_0, x_1, \ldots, x_n \in [a, b]$. Navedite elemente baze vektorskog prostora polinoma kada interpolacijski polinom prikazujemo (i) u Lagrangeovom obliku; (ii) u Newtonovom obliku; (iii) u Newtonovom obliku kod Hermiteove interpolacije.

(b) Odredite koliko je čvorova potrebno u interpolaciji funkcije $f(x) = e^{2x}$ na intervalu $[-1, 1]$ da bi greška u svakoj točki bila $< 10^{-8}$, u slučaju da koristimo interpolaciju polinomima na Čebiševljevoj mreži.

(c) Neka je φ po dijelovima kubična Hermiteova interpolacija funkcije $f \in C^4([a, b])$ na ekvidistantnoj mreži čvorova $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$. Koristeći se rezultatima o interpolaciji polinomima, izvedite ocjenu greške za $\|f - \varphi\|_\infty$, pri čemu je norma definirana za funkcije na segmentu $[a, b]$.

Sve svoje tvrdnje precizno navedite i obrazložite!

JMBAG | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

NUMERIČKA MATEMATIKA

Prvi kolokvij – 26. travnja 2024.

Zadatak 3. (10 bodova)
Promotrimo funkciju

$$f(x) = 1 - \operatorname{ch}(x).$$

Pretpostavimo da želimo izračunati vrijednost $f(x)$ u realnoj aritmetici računala, uz dodatnu pretpostavku da za sve y postoje neki $|\alpha_y| < \varepsilon$ takvi da vrijedi $fl(\operatorname{ch}(y)) = \operatorname{ch}(y) \cdot (1 + \alpha_y)$, pri čemu je ε jedinična greška zaokruživanja.

(a) Detaljno objasnite što će se dogoditi ako računamo $f(x)$ po gornjoj formuli za vrlo male (po modulu) vrijednosti x. Izvedite izraz za relativnu grešku izračunate vrijednosti $fl(f(x))$ u odnosu na egzaktnu vrijednost $f(x)$, te odredite čemu ona teži kada $x \to 0$.

(b) Odredite relativnu uvjetovanost funkcije f u točki x i nađite kako se ona ponaša kada $x \to 0$. Je li problem računanja vrijednost funkcije f u točki x stabilan u relativnom smislu za (po modulu) male vrijednosti od x?

(c) Predložite, ukoliko je to moguće, alternativni izraz za računanje $f(x)$ u aritmetici računala, tako da ono bude stabilno za male vrijednosti od x. Ovdje možete pretpostaviti da se $\operatorname{sh}(x)$ i e^x računaju sa malom relativnom greškom za sve vrijednosti x.

Rješenje. (a) Kako je za male x vrijednost $\operatorname{ch}(x)$ blizu 1 doći će do katastrofalnog kraćenja. To vidimo i iz oblika relativne greške. Neka su $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ po apsolutnoj vrijednosti manji od ε:

$$\begin{aligned} fl(f(x)) &= (1 - \operatorname{ch}(x)(1+\varepsilon_1))\,(1+\varepsilon_2) \\ &= f(x)\left(1 - 1 + \frac{1 - \operatorname{ch}(x)(1+\varepsilon_1)}{1 - \operatorname{ch}(x)}\right)(1+\varepsilon_2) \\ &= f(x)\left(1 + \frac{-\operatorname{ch}(x)}{1-\operatorname{ch}(x)}\varepsilon_1\right)(1+\varepsilon_2). \end{aligned}$$

Kako je $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{-\operatorname{ch}(x)}{1-\operatorname{ch}(x)} = \infty$, zaključujemo da za male x relativna greška nekontrolirano raste.

(b) Kako je $f'(x) = \operatorname{sh}(x)$, relativna uvjetovanost je

$$\kappa_f^{\mathrm{rel}}(x) = \left|\frac{x f'(x)}{f(x)}\right| = \left|\frac{x \operatorname{sh}(x)}{1 - \operatorname{ch}(x)}\right|,$$

pa je $\lim\limits_{x\to 0} \kappa_f^{\mathrm{rel}} = 2$ (limes se dobije tako da se dva puta primijeni L'Hospitalovo pravilo). Dakle, krivac velike relativne greške je način izračuna funkcije.

(c) Npr. $f(x) = -2\operatorname{sh}^2(x/2)$ ili $f(x) = (1 - \operatorname{ch}(x))\dfrac{1 + \operatorname{ch}(x)}{1 + \operatorname{ch}(x)} = \dfrac{-\operatorname{sh}^2(x)}{1 + \operatorname{ch}(x)}$.

△

JMBAG	IME I PREZIME	BROJ BODOVA

NUMERIČKA MATEMATIKA

Prvi kolokvij – 26. travnja 2024.

Zadatak 4. (10 bodova)
Za neki prirodan broj n neka je A_n matrica reda n dana s

$$A_n = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 & \dots & 2 & 2 \\ -1 & 2-2^0 & 0 & & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2-2^{-1} & 0 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & 0 & -1 & 2-2^{-n+3} & 0 \\ 0 & & \dots & 0 & -1 & 2-2^{-n+2} \end{bmatrix},$$

(u prvom retku se nalaze brojevi 2; neposredno ispod dijagonale se nalaze -1; na mjestu (k,k), $k \geq 2$ je broj $2-2^{-k+2}$; sve su ostalo nule).

(a) Za $n = 5$ odredite LU faktorizaciju s parcijalnim pivotiranjem. Razlikuje li se od LU faktorizacije bez parcijalnog pivotiranja?

(b) Za $n = 5$ odredite pivotni rast u slučaju parcijalnog pivotiranja. Zaključite kako bi se pivotni rast ponašao za velike n.

(c) Za proizvoljan n odredite $\|A_n\|_1$. Ako znamo da je $\|A_n^{-1}\|_1 \approx 2$, pronađite uvjetovanost matrice A_n za velike n u normi 1.

(d) Koliko je elemenata matrice A_n različito od nule, a koliko elemenata matrice U jednako nula?

(e) Zaključite zašto nije dobro rješavati sustav dan ovom matricom LU faktorizacijom (sa ili bez parcijalnog pivotiranja) u računalu za jako velike n.

Rješenje. Za $n = 5$:

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.5 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0.5 & 1 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0.5 & 0.5 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0.25 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Općenito, za matricu L na dijagonali su 1, točno ispod dijagonale su $-\frac{1}{2}$. U matrici U su na dijagonali 2, a iznad dijagonale u retku k piše broj 2^{-k+1}. $P = I$, pa je to ujedno i LU faktorizacija bez parcijalnog pivotiranja.

Pivotni rast je jednak $\frac{2}{2} = 1$ za svaki n. Nadalje, $\|\cdot\|_1$ je najveća stupčana norma pa je

$$\|A_n\|_1 = \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^{n} |a_{i,j}| = \max\{3, 5-2^0, 5-2^{-1}, \dots, 5-2^{-n+3}, 4-2^{-n+2}\} = 5-2^{-n+3}$$

odakle je $\kappa(A_n) \approx (5-2^{-n+3}) \cdot 2 = 10 - 2^{-n+4}$.

U matrici A_n je $n + 2(n-1) = 3n-2$ elemenata različito od nule, a u matrici U nijedan element u gornjetrokutastom dijelu nije jednak nuli.

Nije dobro rješavati ovaj sustav LU faktorizacijom za velike n budući da faktor U nije rijetko popunjen za razliku od matrice A_n, što povećava potrošnju memorije i vremena. △

JMBAG | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

NUMERIČKA MATEMATIKA

Prvi kolokvij – 26. travnja 2024.

Zadatak 5. (10 bodova)
Funkciju $f(x) = x + \sin(2x)$ aproksimiramo na intervalu $[0, 2\pi]$.

1. Odredite najmanji broj podintervala n tako da ocjena uniformne pogreške na $[0, 2\pi]$ ne prelazi $\varepsilon = 10^{-2}$ ako funkciju aproksimiramo po dijelovima kubnom Hermiteovom interpolacijom φ na ekvidistantnoj mreži.

2. Za $n = 4$ podintervala, odredite aproksimaciju po dijelovima kubnom Hermiteovom interpolacijom u točki $x_0 = \frac{\pi}{4}$ i pravu pogrešku u toj točki.

Ocjena uniformne greške za ekvidistantnu mrežu s korakom h na $[a, b]$ ima oblik

$$\max_{x\in[a,b]} |f(x) - \varphi(x)| \leq \frac{h^4}{384} M_4, \quad M_4 = \max_{x\in[a,b]} |f^{(4)}(x)|.$$

Rješenje. 1. Iz ocjene unifromne pogreške čitamo da za broj pointervala n mora vrijediti:

$$n \geq \sqrt[4]{\frac{(b-a)^4 M_f}{384\varepsilon}}.$$

Kako je $f^{(4)}(x) = 16\sin(2x)$, zaključujemo da je $M_4 = 16$ (postiže se za $x = k\pi/4$, $k = 1, 3, 5, 7$).

Uvršatavanjem u izraz za n dobivamo $n \geq 8.9769$ pa je traženi $n = 9$.

2. Kako je $\pi/4 \in [0, \pi/2]$ za traženu aproksimaciju tražimo interpolacijski polinom p_1 uz uvjete ($f'(x) = 2\cos(2x) + 1$)

$$\begin{aligned} p_1(0) &= f(0) = 0 \\ p_1(\pi/2) &= f(\pi/2) = \pi/2 \\ p_1'(0) &= f'(0) = 3 \\ p_1'(\pi/2) &= f'(\pi/2) = -1 \end{aligned}$$

Tablica podijeljenih razlika je sljedeća

x_i \ k	0	1	2	3
0	0			
		3		
0	0		$-4/\pi$	
		1		0
$\pi/2$	$\pi/2$		$-4/\pi$	
		-1		
$\pi/2$	$\pi/2$			

pa je $p_1(x) = 3x - \frac{4}{\pi}x^2$. Prava greška je $|p_1(\pi/4) - f(\pi/4)| = 0.214602$.

△