JMBAG IME I PREZIME

NUMERIČKA MATEMATIKA — 2. KOLOKVIJ

19. lipnja 2023.

Upute: Na kolokviju je dozvoljeno koristiti samo pribor za pisanje i brisanje, kalkulator, te službeni šalabahter. Sva rješenja napišite isključivo na papire sa zadacima, jer jedino njih predajete. Obavezno predajte **sve** papire sa zadacima, čak i ako neke zadatke niste rješavali. Ne zaboravite se **potpisati** na svim papirima! Skice smijete raditi i na drugim papirima koje će vam dati dežurni asistent.

Izračunata rješenja (brojevi i funkcije), **bez opisa postupka kako se do njih dolazi**, odnosno, rezultati **bez odgovarajuće ocjene pogreške** koja garantira traženu točnost — **ne vrijede**, tj. donose 0 bodova!

Rezultati: petak, 23. lipnja 2023., kasno navečer na webu.
Uvid u kolokvije: ponedjeljak, 26. lipnja 2023., u 14 sati.

ZADATAK 1

1

(15 = 4 + 4 + 4 + 3 bodova.)

(a) Definirajte diskretni problem najmanjih kvadrata u najopćenitijem obliku. Točno opišite što su ulazni podaci problema, što izlazni i koje uvjete moraju zadovoljavati izlazni parametri da bi ih smatrali rješenjem. Koji je standardni postupak kod rješavanja ovog problema, i kako se zovu jednadžbe koje dobijemo tim postupkom? Izvedite taj postupak za aproksimaciju ulaznih podataka pomoću pravca.

(b) Pretpostavimo da rješavamo neprekidni problem najmanjih kvadrata. Definirajte težinsku L_2-normu i težinski skalarni produkt za funkcije na $[a, b]$. Točno navedite svojstva svih pojmova uključenih u definiciju. Kako definiramo ortogonalnost dviju funkcija i koje svojstvo (poučak) za njih onda vrijedi? Kakav je sustav normalnih jednadžbi za linearni neprekidni problem najmanjih kvadrata, u slučaju kad funkcije φ_j tvore ortogonalan sustav funkcija? Kako izgleda njegovo rješenje, tj. kako glase koeficijenti a_j u aproksimaciji zadane funkcije f? Opišite postupak ortogonalizacije linearno nezavisnog skupa funkcija $\hat{\varphi}_j$.

(c) Promatramo Newton–Cotesovu integracijsku formulu

$$\int_a^b w(x)f(x)\,dx = I_m(f) + E_m(f), \quad I_m(f) = \sum_{k=0}^{m} w_k f(x_k).$$

Definirajte polinomni stupanj egzaktnosti ove formule. Kada kažemo da je ona interpolacijska? Precizno iskažite teorem koji povezuje Newton–Cotesovu integracijsku formulu s integralom interpolacijskog polinoma za funkciju f. Dokažite dio tvrdnje teorema koji govori o tome da ako je integracijska formula jednaka integralu odgovarajućeg interpolacijskog polinoma, da tada formula ima i odgovarajući stupanj egzaktnosti.

(d) Koja je veza između Newtonove metode za nalaženje nultočke funkcije f i jednostavnih iteracijskih funkcija φ? Iskažite teorem koji govori o tome kada možemo zaključiti da niz iteracija $x_{n+1} = \varphi(x_n)$, $n \geq 0$, konvergira prema fiksnoj točki α s redom konvergencije p? Ovaj rezultat primijenite na Newtonovu metodu za računanje jednostruke nultočke i dokažite da ona ima red konvergencije barem 2.

JMBAG IME I PREZIME

NUMERIČKA MATEMATIKA — 2. KOLOKVIJ — ZADATAK 2

19. lipnja 2023.

(14 = 4 + 4 + 3 + 3 bodova.) Matrica A je zadana faktorizacijom, pri čemu su elementi $\alpha, \beta, \gamma, \sigma, \tau \in \mathbb{R}$ nepoznati:

$$A = \underbrace{\begin{bmatrix} 0.08 & 0.76 & 0.08 & 0.64 \\ \alpha & \beta & 0.52 & 0.56 \\ 0.56 & \gamma & 0.56 & -0.52 \\ 0.76 & -0.08 & -0.64 & 0.08 \end{bmatrix}}_{U} \underbrace{\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma & 0 \\ 0 & 0 & \tau \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\Sigma} \underbrace{\begin{bmatrix} 0.48 & 0.60 & 0.64 \\ -0.768 & 0.64 & -0.024 \\ 0.424 & 0.48 & -0.768 \end{bmatrix}}_{V^*}.$$

(a) Odredite $\alpha, \beta, \gamma, \sigma, \tau$ tako da gornja faktorizacija predstavlja SVD matrice A, te da A ima rang 2 i Frobeniusovu normu 5. Možete pretpostaviti da takvi parametri postoje.

(b) Odredite jezgru matrice A koju ste dobili u (a). Odredite matricu B ranga 1 takvu da je $\|A - B\|_2$ najmanje moguće; B možete prikazati u faktoriziranom obliku. (Ako niste riješili podzadatak (a), navedite rješenje koristeći $\alpha, \beta, \gamma, \sigma, \tau$.)

(c) Neka je $b = e_1$ (prvi vektor kanonske baze). Odredite rješenje problema najmanjih kvadrata $\min_x \|Ax - b\|_2$ za matricu koju ste dobili u (a); rješenje možete prikazati u faktoriziranom obliku. Koliko ukupno rješenja ima taj problem? (Ako niste riješili podzadatak (a), navedite rješenje koristeći $\alpha, \beta, \gamma, \sigma, \tau$.)

(d) Koristeći SVD, dokažite da za svaku matricu $X \in \mathbb{R}^{m \times n}$ vrijedi: slika matrice X^T je ortogonalna na jezgru matrice X, a ti potprostori u sumi daju $\mathbb{R}^n$.

Sve svoje tvrdnje i odgovore detaljno obrazložite.

JMBAG

IME I PREZIME

Numerička matematika — 2. kolokvij — Zadatak 3

19. lipnja 2023.

(14 = 10 + 2 + 2 bodova.)

(a) Odredite čvorove i težine u integracijskoj formuli oblika

$$\int_{-1}^{1} (1-x) f(x) dx = w_1 f(-1) + w_2 f(x_2) + w_3 f(x_3) + R_3(f)$$

tako da ima najveći mogući red egzaktnosti. Čvorove formule nađite kao nultočke odgovarajućih ortogonalnih polinoma (ostali načini se neće bodovati). Koliki je red egzaktnosti dobivene formule?

(b) Za sljedeće integracijske formule odredite postoji li težinska funkcija w tako da za neki izbor čvorova i težina red egzaktnosti formule bude jednak 5 (podzadaci su neovisni). Ako takva težinska funkcija postoji odredite jednu, a ako ne postoji detaljno obrazložite zašto.

(i) $\int_{-1}^{1} f(x) w(x) dx = w_1 f(-1) + w_2 f(x_2) + w_3 f(x_3) + R_3(f)$,

(ii) $\int_{-1}^{1} f(x) w(x) dx = w_1 f(x_1) + w_2 f(0) + w_3 f(x_3) + R_3(f)$.

JMBAG

IME I PREZIME

Numerička matematika — 2. kolokvij — Zadatak 4

19. lipnja 2023.

(12 bodova.) Odredite sva rješenja jednadžbe

$$\ln x + \sqrt{x} = 2$$

s točnošću $\varepsilon = 10^{-6}$. Duljina početnog intervala za nalaženje rješenja mora biti barem $1/2$. Detaljno obrazložite sve tvrdnje vezane za broj i lokaciju rješenja i ocjenu greške!

JMBAG

IME I PREZIME

Numerička matematika — 2. kolokvij

19. lipnja 2023.

Upute: Na kolokviju je dozvoljeno koristiti samo pribor za pisanje i brisanje, kalkulator, te službeni šalabahter. Sva rješenja napišite isključivo na papire sa zadacima, jer jedino njih predajete. Obavezno predajte **sve** papire sa zadacima, čak i ako neke zadatke niste rješavali. Ne zaboravite se **potpisati** na svim papirima! Skice smijete raditi i na drugim papirima koje će vam dati dežurni asistent.

Izračunata rješenja (brojevi i funkcije), **bez opisa postupka kako se do njih dolazi**, odnosno, rezultati **bez odgovarajuće ocjene pogreške** koja garantira traženu točnost — **ne vrijede**, tj. donose 0 bodova!

Rezultati: petak, 23. lipnja 2023., kasno navečer na webu.
Uvid u kolokvije: ponedjeljak, 26. lipnja 2023., u 14 sati.

Zadatak 1

1

(15 = 4 + 4 + 4 + 3 bodova.)

(a) Definirajte linearni problem diskretnih najmanjih kvadrata. Točno opišite što su ulazni podaci problema, što izlazni i koje uvjete moraju zadovoljavati izlazni parametri da bi ih smatrali rješenjem. Izvedite matričnu formulaciju linearnog problema najmanjih kvadrata, i iskažite teorem o jedinstvenosti njegovog rješenja kroz zadovoljavanje jedne od tri ekvivalentnih tvrdnji.

(b) Pretpostavimo da rješavamo neprekidni problem najmanjih kvadrata. Definirajte težinsku L_2-normu i težinski skalarni produkt za funkcije na $[a, b]$. Točno navedite svojstva svih pojmova uključenih u definiciju. Definirajte sam neprekidni problem najmanjih kvadrata. Koji je standardni postupak kod rješavanja linearnog neprekidnog problema najmanjih kvadrata, kako izgledaju i kako se zovu jednadžbe koje dobijemo tim postupkom? Izvedite taj postupak.

(c) Promatramo integracijsku formulu oblika

$$\int_a^b w(x)f(x)\,dx = I_n'(f) + E_n'(f), \quad I_n'(f) = \sum_{k=1}^{n}(w_k f(x_k) + w_k' f'(x_k)).$$

Precizno opišite kako možemo dobiti ovu formulu preko interpolacije. Dokažite sljedeću tvrdnju: ako u integracijskoj formuli $I_n'(f)$ vrijedi da je $w_k' = 0$ za $k = 1, \ldots, n$ tada je polinom čvorova $\omega_n(x) = (x - x_1)\cdots(x - x_n)$ ortogonalan na sve polinome nižeg stupnja. Kako još u ovom slučaju nazivamo ovu integracijsku formulu?
Uputa: Za n različitih čvorova interpolacije $x_1, \ldots, x_n$ polinomi Lagrangeove baze su oblika

$$\ell_k(x) = \prod_{\substack{j=1 \\ j\neq k}}^{n} \frac{x - x_j}{x_k - x_j}, \quad k = 1, \ldots, n,$$

a polinomi Hermiteove baze su

$$h_{k,0}(x) = [1 - 2(x - x_k)\ell_k'(x_k)]\,\ell_k^2(x) \quad h_{k,1}(x) = (x - x_k)\,\ell_k^2(x), \quad k = 1, \ldots, n.$$

(d) Koja je veza između Newtonove metode za nalaženje nultočke funkcije f i jednostavnih iteracijskih funkcija φ? U slučaju da je α rješenje jednadžbe $x = \varphi(x)$, da je φ neprekidno diferencijabilna na nekoj okolini od α, i ako je $|\varphi'(\alpha)| < 1$ što možemo zaključiti o nizu jednostavnih iteracija $x_{n+1} = \varphi(x_n)$, $n \geq 0$, za x_0 dovoljno blizu α? Ovaj rezultat primijenite na Newtonovu metodu za računanje jednostruke nultočke. Što možete zaključiti?

JMBAG IME I PREZIME

NUMERIČKA MATEMATIKA — 2. KOLOKVIJ — ZADATAK 2

19. lipnja 2023.

(14 = 4 + 4 + 3 + 3 bodova.) Matrica A je zadana faktorizacijom, pri čemu su elementi $\alpha, \beta, \gamma, \sigma, \tau \in \mathbb{R}$ nepoznati:

$$A = \underbrace{\begin{bmatrix} 0.1 & 0.1 & 0.7 & 0.7 \\ \alpha & 0.5 & \beta & 0.5 \\ 0.62 & 0.5 & \gamma & -0.5 \\ 0.7 & -0.7 & -0.1 & 0.1 \end{bmatrix}}_{U} \underbrace{\begin{bmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma & 0 \\ 0 & 0 & \tau \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\Sigma} \underbrace{\begin{bmatrix} 0.352 & 0.36 & 0.864 \\ -0.864 & 0.48 & 0.152 \\ 0.36 & 0.8 & -0.48 \end{bmatrix}}_{V^*}.$$

(a) Odredite $\alpha, \beta, \gamma, \sigma, \tau$ tako da gornja faktorizacija predstavlja SVD matrice A, te da A ima rang 2 i Frobeniusovu normu 10. Možete pretpostaviti da takvi parametri postoje.

(b) Odredite jezgru matrice A koju ste dobili u (a). Odredite matricu B ranga 1 takvu da je $\|A - B\|_2$ najmanje moguće; B možete prikazati u faktoriziranom obliku. (Ako niste riješili podzadatak (a), navedite rješenje koristeći $\alpha, \beta, \gamma, \sigma, \tau$.)

(c) Neka je $b = e_1$ (prvi vektor kanonske baze). Odredite rješenje problema najmanjih kvadrata $\min_x \|Ax - b\|_2$ za matricu koju ste dobili u (a); rješenje možete prikazati u faktoriziranom obliku. Koliko ukupno rješenja ima taj problem? (Ako niste riješili podzadatak (a), navedite rješenje koristeći $\alpha, \beta, \gamma, \sigma, \tau$.)

(d) Koristeći SVD, dokažite da za svaku matricu $X \in \mathbb{R}^{m \times n}$ vrijedi: slika matrice X je ortogonalna na jezgru matrice X^T, a ti potprostori u sumi daju $\mathbb{R}^m$.

Sve svoje tvrdnje i odgovore detaljno obrazložite.

JMBAG

IME I PREZIME

Numerička matematika — 2. kolokvij — Zadatak 3

19. lipnja 2023.

($14 = 10 + 2 + 2$ bodova.)

(a) Odredite čvorove i težine u integracijskoj formuli oblika

$$\int_{-1}^{1} (1+x) f(x) dx = w_1 f(x_1) + w_2 f(x_2) + w_3 f(1) + R_3(f)$$

tako da ima najveći mogući red egzaktnosti. Čvorove formule nađite kao nultočke odgovarajućih ortogonalnih polinoma (ostali načini se neće bodovati). Koliki je red egzaktnosti dobivene formule?

(b) Za sljedeće integracijske formule odredite postoji li težinska funkcija w tako da za neki izbor čvorova i težina red egzaktnosti formule bude jednak 5 (podzadaci su neovisni). Ako takva težinska funkcija postoji odredite jednu, a ako ne postoji detaljno obrazložite zašto.

(i) $\int_{-1}^{1} f(x) w(x) dx = w_1 f(x_1) + w_2 f(0) + w_3 f(x_3) + R_3(f),$

(ii) $\int_{-1}^{1} f(x) w(x) dx = w_1 f(x_1) + w_2 f(x_2) + w_3 f(1) + R_3(f).$

JMBAG

IME I PREZIME

Numerička matematika — 2. kolokvij — Zadatak 4

19. lipnja 2023.

(12 bodova.) Odredite sva rješenja jednadžbe

$$\ln x + \sqrt{x} = 3$$

s točnošću $\varepsilon = 10^{-6}$. Duljina početnog intervala za nalaženje rješenja mora biti barem $1/2$. Detaljno obrazložite sve tvrdnje vezane za broj i lokaciju rješenja i ocjenu greške!