JMBAG

IME I PREZIME

# Numerička matematika — 2. kolokvij

20. lipnja 2022.

**Upute**: Na kolokviju je dozvoljeno koristiti samo pribor za pisanje i brisanje, kalkulator, te službeni šalabahter. Sva rješenja napišite isključivo na papire sa zadacima, jer jedino njih predajete. Obavezno predajte **sve** papire sa zadacima, čak i ako neke zadatke niste rješavali. Ne zaboravite se **potpisati** na svim papirima! Skice smijete raditi i na drugim papirima koje će vam dati dežurni asistent.

Izračunata rješenja (brojevi i funkcije), **bez opisa postupka kako se do njih dolazi**, odnosno, rezultati **bez odgovarajuće ocjene pogreške** koja garantira traženu točnost — **ne vrijede**, tj. donose 0 bodova!

**Rezultati**: četvrtak, 23. lipnja 2022., u 11.00 sati na webu.
**Uvid u kolokvije**: četvrtak, 23. lipnja 2022., u 12.00 sati.

1

## Zadatak 1

(10 bodova.)

(a) Kako glasi izraz za rješenje diskretnog linearnog problema najmanjih kvadrata sa matricom punog stupčanog ranga, izračunato pomoću QR faktorizacije? Precizno definirajte sve pomoćne varijable i izraze, te izvedite izraz za rješenje.

(b) Neka je $\Phi_m$ prostor razapet ortogonalnim sustavom funkcija $\varphi_0,\ldots,\varphi_m$ uz zadani skalarni produkt $\langle\ ,\ \rangle$, i neka je $\varphi^{[m]}$ aproksimacija zadane funkcije $f$ po pripadnoj metodi najmanjih kvadrata u prostoru $\Phi_m$. Dokažite da je greška aproksimacije $f - \varphi^{[m]}$ okomita na prostor $\Phi_m$.

(c) Dokažite sljedeću tvrdnju: u integracijskoj formuli

$$\int_a^b w(x)f(x)\,dx = I_m(f) + E_m(f), \quad I_m(f) = \sum_{k=0}^{m} w_k f(x_k),$$

ako za težinske koeficijente $w_k$ vrijedi

$$w_k = \int_a^b w(x)\ell_k(x)dx, \quad k = 0,\ldots,m,$$

gdje je $\ell_k$ $k$-ti polinom Lagrangeove baze za čvorove $x_0,\ldots,x_m$, tada je formula $I_m(f)$ jednaka integralu interpolacijskog polinoma $p_m$ za funkciju $f$ u danim čvorovima.

(d) Iskažite teorem o lokalnoj konvergenciji Newtonove metode za rješavanje nelinearne jednadžbe.

JMBAG

IME I PREZIME

# Numerička matematika — 2. kolokvij — Zadatak 2

20. lipnja 2022.

(10 bodova.) Na intervalu $[0, +\infty\rangle$ zadana je težinska funkcija $w(x) = e^{-x}$, te pripadni skalarni umnožak i norma. Nađite najbolju aproksimaciju funkcije $f : [0, +\infty\rangle \to \mathbb{R}$ zadane s $f(x) = e^{-5x}$ oblika

$$\varphi(x) = a\cos(x) + b\cos(3x), \quad a, b \in \mathbb{R}$$

u smislu neprekidne metode najmanjih kvadrata. Uputa: $\cos\alpha \cdot \cos\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)]$.

JMBAG IME I PREZIME

# NUMERIČKA MATEMATIKA — 2. KOLOKVIJ — ZADATAK 3

20. lipnja 2022.

(10 bodova.)

(a) Odredite težine $w_0$, $w_1$, te čvor $x_2$ u integracijskoj formuli oblika

$$\int_{-1}^{1} |x|^{1/8} f(x)dx \approx w_0 f\left(\frac{3}{5}\right) + w_1 f(0) + \frac{8}{9} f(x_2)$$

iz uvjeta egzaktnosti ove formule na vektorskom prostoru polinoma što je moguće većeg stupnja. Koliki je polinomni stupanj egzaktnosti formule? Pomoću ove formule izračunajte približnu vrijednost integrala za $f(x) = |x|^{7/8}$ i nađite pravu grešku.

(b) Je li formula dobivena u (a) dijelu zadatka Gaussova, Gauss–Radau, Gauss–Lobatto? Detaljno obrazložite. Napišite polinom čvorova $\omega_n(x)$ za formulu dobivenu u (a). Odredite najveći $k$ takav da za sve polinome $p$ stupnja manjeg ili jednakog $k$ vrijedi

$$\int_{-1}^{1} |x|^{1/8} \omega_n(x) p(x) dx = 0.$$

JMBAG

IME I PREZIME

# Numerička matematika — 2. kolokvij — Zadatak 4

20. lipnja 2022.

(10 bodova.) Odredite sva rješenja jednadžbe

$$3\cos x = x^2 + 2|x|$$

s točnošću $\varepsilon = 10^{-6}$. Duljina početnog intervala za nalaženje rješenja mora biti barem $1/2$. Detaljno obrazložite sve tvrdnje vezane za broj i lokaciju rješenja i ocjenu greške!

JMBAG | IME I PREZIME

# Numerička matematika — 2. kolokvij — Zadatak 5

20. lipnja 2022.

(10 bodova.) Dane su matrice

$$\tilde{U} = \begin{bmatrix} 0.6 & 0.48 & 0.64 & 0 \\ -0.8 & 0.36 & 0.48 & 0 \\ 0 & -0.48 & 0.36 & 0.8 \\ 0 & 0.64 & -0.48 & 0.6 \end{bmatrix}, \quad \tilde{\Sigma} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 100 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \tilde{V} = \begin{bmatrix} 0.6 & 0.8 & 0 \\ -0.48 & 0.36 & 0.8 \\ 0.64 & -0.48 & 0.6 \end{bmatrix},$$

te matrica $A = \tilde{U}\tilde{\Sigma}\tilde{V}^*$. Poznato je da su matrice $\tilde{U}$ i $\tilde{V}$ unitarne.

1. Je li $A = \tilde{U}\tilde{\Sigma}\tilde{V}^*$ singularna dekompozicija matrice $A$? Ako da, obrazložite; ako ne, odredite ju.
2. Odredite Frobeniusovu normu matrice, sliku matrice $A$, te generalizirani (Moore-Penroseov) inverz matrice $A$.
3. Dokažite sljedeću tvrdnju: ako je za $m, n \geq 2$ matrica $X \in \mathbb{R}^{n\times m}$ ranga 2, tada postoje vektori $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^n$ i vektori $w_1, w_2 \in \mathbb{R}^m$, svi različiti od nul-vektora, takvi da je $X = v_1 w_1^T + v_2 w_2^T$. Vrijedi li obrat te tvrdnje?

JMBAG

IME I PREZIME

# NUMERIČKA MATEMATIKA — 2. KOLOKVIJ

20. lipnja 2022.

**Upute**: Na kolokviju je dozvoljeno koristiti samo pribor za pisanje i brisanje, kalkulator, te službeni šalabahter. Sva rješenja napišite isključivo na papire sa zadacima, jer jedino njih predajete. Obavezno predajte **sve** papire sa zadacima, čak i ako neke zadatke niste rješavali. Ne zaboravite se **potpisati** na svim papirima! Skice smijete raditi i na drugim papirima koje će vam dati dežurni asistent.

Izračunata rješenja (brojevi i funkcije), **bez opisa postupka kako se do njih dolazi**, odnosno, rezultati **bez odgovarajuće ocjene pogreške** koja garantira traženu točnost — **ne vrijede**, tj. donose 0 bodova!

**Rezultati**: četvrtak, 23. lipnja 2022., u 11.00 sati na webu.
**Uvid u kolokvije**: četvrtak, 23. lipnja 2022., u 12.00 sati.

## ZADATAK 1

1

(10 bodova.)

(a) Kako glasi izraz za rješenje diskretnog linearnog problema najmanjih kvadrata sa matricom proizvoljnog stupčanog ranga, izračunato pomoću dekompozicije singularnih vrijednosti? Precizno definirajte sve pomoćne varijable i izraze, te izvedite izraz za rješenje.

(b) Neka je $\{p_n \mid n \geq 0\}$ familija ortogonalnih polinoma na intervalu $[a, b]$ s težinskom funkcijom $w$. Kako glasi rekurzija koju zadovoljavaju ti polinomi? Točne izraze za koeficijente rekurzije ne trebate navoditi. Kako glasi Hornerova shema za takve polinome i kako se ona izvodi iz rekurzije polinoma?

(c) Dokažite sljedeću tvrdnju: neka je $\ell$ zadani cijeli broj, takav da je $0 \leq \ell \leq n$; ako težinska integracijska formula

$$\int_a^b w(x) f(x)\, dx = I_n(f) + E_n(f), \quad I_n(f) = \sum_{k=1}^{n} w_k f(x_k),$$

ima polinomni stupanj egzaktnosti $d = n - 1 + \ell$, tada je polinom čvorova $\omega_n$ ortogonolan na sve polinome $p \in \mathcal{P}_{\ell-1}$ s težinskom funkcijom $w$,

$$\int_a^b w(x) \omega_n(x) p(x) dx = 0, \quad \text{za svaki } p \in \mathcal{P}_{\ell-1}.$$

(d) Iskažite teorem o globalnoj konvergenciji Newtonove metode za rješavanje nelinearne jednadžbe.

JMBAG

IME I PREZIME

# Numerička matematika — 2. kolokvij — Zadatak 2

20. lipnja 2022.

(10 bodova.) Na intervalu $[0, +\infty\rangle$ zadana je težinska funkcija $w(x) = e^{-x}$, te pripadni skalarni umnožak i norma. Nađite najbolju aproksimaciju funkcije $f : [0, +\infty\rangle \to \mathbb{R}$ zadane s $f(x) = e^{-2x}$ oblika

$$\varphi(x) = a\cos(x) + b\cos(4x), \quad a, b \in \mathbb{R}$$

u smislu neprekidne metode najmanjih kvadrata. Uputa: $\cos\alpha \cdot \cos\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)]$.

JMBAG

IME I PREZIME

# NUMERIČKA MATEMATIKA — 2. KOLOKVIJ — ZADATAK 3

20. lipnja 2022.

(10 bodova.)

(a) Odredite težine $w_0$, $w_1$, te čvor $x_2$ u integracijskoj formuli oblika

$$\int_{-1}^{1} |x|^{3/5} f(x)dx \approx w_0 f\left(\frac{2}{3}\right) + w_1 f(0) + \frac{5}{8} f(x_2)$$

iz uvjeta egzaktnosti ove formule na vektorskom prostoru polinoma što je moguće većeg stupnja. Koliki je polinomni stupanj egzaktnosti formule? Pomoću ove formule izračunajte približnu vrijednost integrala za $f(x) = |x|^{2/5}$ i nađite pravu grešku.

(b) Je li formula dobivena u (a) dijelu zadatka Gaussova, Gauss–Radau, Gauss–Lobatto? Detaljno obrazložite. Napišite polinom čvorova $\omega_n(x)$ za formulu dobivenu u (a). Odredite najveći $k$ takav da za sve polinome $p$ stupnja manjeg ili jednakog $k$ vrijedi

$$\int_{-1}^{1} |x|^{3/5} \omega_n(x) p(x) dx = 0.$$

JMBAG

IME I PREZIME

# Numerička matematika — 2. kolokvij — Zadatak 4

20. lipnja 2022.

(10 bodova.) Odredite sva rješenja jednadžbe

$$3\cos x = 2x^2 + |x|$$

s točnošću $\varepsilon = 10^{-6}$. Duljina početnog intervala za nalaženje rješenja mora biti barem $1/2$. Detaljno obrazložite sve tvrdnje vezane za broj i lokaciju rješenja i ocjenu greške!

JMBAG IME I PREZIME

# NUMERIČKA MATEMATIKA — 2. KOLOKVIJ — ZADATAK 5

20. lipnja 2022.

(10 bodova.) Dane su matrice

$$\tilde{U} = \begin{bmatrix} 0 & 0.64 & -0.48 & 0.6 \\ 0.6 & 0.48 & 0.64 & 0 \\ 0 & -0.48 & 0.36 & 0.8 \\ -0.8 & 0.36 & 0.48 & 0 \end{bmatrix}, \quad \tilde{\Sigma} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 100 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \tilde{V} = \begin{bmatrix} 0.6 & 0.8 & 0 \\ 0.64 & -0.48 & 0.6 \\ -0.48 & 0.36 & 0.8 \end{bmatrix},$$

te matrica $A = \tilde{U}\tilde{\Sigma}\tilde{V}^*$. Poznato je da su matrice $\tilde{U}$ i $\tilde{V}$ unitarne.

1. Je li $A = \tilde{U}\tilde{\Sigma}\tilde{V}^*$ singularna dekompozicija matrice $A$? Ako da, obrazložite; ako ne, odredite ju.
2. Odredite Frobeniusovu normu matrice, sliku matrice $A$, te generalizirani (Moore-Penroseov) inverz matrice $A$.
3. Dokažite sljedeću tvrdnju: ako je za $m, n \geq 2$ matrica $X \in \mathbb{R}^{n\times m}$ ranga 2, tada postoje vektori $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^n$ i vektori $w_1, w_2 \in \mathbb{R}^m$, svi različiti od nul-vektora, takvi da je $X = v_1 w_1^T + v_2 w_2^T$. Vrijedi li obrat te tvrdnje?