JMBAG IME I PREZIME

Numerička matematika — 1. kolokvij

26. travnja 2022.

Upute: Na kolokviju je dozvoljeno koristiti samo pribor za pisanje i brisanje, kalkulator, te službeni šalabahter. Sva rješenja napišite isključivo na papire sa zadacima, jer jedino njih predajete. Obavezno predajte **sve** papire sa zadacima, čak i ako neke zadatke niste rješavali. Ne zaboravite se **potpisati** na svim papirima! Skice smijete raditi i na drugim papirima koje će vam dati dežurni asistent.

Izračunata rješenja (brojevi i funkcije), **bez opisa postupka kako se do njih dolazi**, odnosno, rezultati **bez odgovarajuće ocjene pogreške** koja garantira traženu točnost — **ne vrijede**, tj. donose 0 bodova!

Rezultati: petak, 29. travnja 2022., u 9.00 na webu.
Uvid u kolokvije: petak, 29. travnja 2022., u 12.00 sati.

1

Zadatak 1

(10 bodova.)

(a) Izvedite matricu brojeva uvjetovanosti $\Gamma(x_1, x_2)$ višedimenzionalnog problema računanja vrijednosti funkcije $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x_1, x_2) = x_1 + x_2$.

(b) Navedite iskaz teorema o egzistenciji LU faktorizacije. Da li prema tom teoremu postoji LU faktorizacija simetrične pozitivno definitne matrice i zašto?

(c) Navedite iskaz teorema o ocjeni greške interpolacijskog polinoma stupnja n u odnosu na danu funkciju f, koji uključuje više derivacije funkcije f.

(d) Kod po dijelovima kubične interpolacije na $[a, b]$ sa čvorovima interpolacije $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ aproksimacijska funkcija φ je oblika

$$\varphi\Big|_{[x_{k-1},x_k]} = p_k, \quad k = 1, \ldots, n, \quad p_k \in \mathcal{P}_3.$$

Polinome p_k zapisujemo u obliku

$$p_k = c_{0,k} + c_{1,k}(x - x_{k-1}) + c_{2,k}(x - x_{k-1})^2 + c_{3,k}(x - x_{k-1})^3, \quad x \in [x_{k-1}, x_k].$$

Izvedite izraze za koeficijente $c_{i,k}$ $i = 0, 1, 2, 3$ iz interpolacijskih uvjeta

$$\begin{aligned} p_k(x_{k-1}) &= f_{k-1} & p_k(x_k) &= f_k & & \\ p'_k(x_{k-1}) &= s_{k-1} & p'_k(x_k) &= s_k & & k = 1, \ldots, n, \end{aligned}$$

gdje su $f_k = f(x_k)$, a s_k su neke aproksimacije derivacije funkcije f u čvorovima.

JMBAG IME I PREZIME

Numerička matematika — 1. kolokvij — Zadatak 2

26. travnja 2022.

(10 bodova.) Promotrimo 2×2 sustav $Ax = b$ za

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{bmatrix}, \; b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}, \; x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}.$$

(a) Pretpostavimo da sustav rješavamo supstitucijom unatrag u aritmetici računala, te da tako dobijemo rješenje $\hat{x}$. Izvedite izraze za $\hat{x}_1$ i $\hat{x}_2$ koji uključuju odgovarajuće greške računanja u aritmetici računala.

(b) Dokažite da je postupak rješavanja sustava kao u (a) stabilan unatrag, odnosno, da postoji gornje trokutasta matrica $\hat{A}$ čiji je svaki element nastao malom relativnom perturbacijom pripadnog elementa matrice A takva da u egzaktnoj aritmetici vrijedi $\hat{A}\hat{x} = b$.

(c) Dokažite da algoritam rješavanja sustava supstitucijom unatrag u aritmetici računala nije nužno stabilan unaprijed: za $a_{11} = a_{22} = 1$ odredite relativnu grešku unaprijed prilikom računanja x_1, te pokažite da je moguće odabrati a_{12}, b_1 i b_2 takve da ta greška bude po volji velika.

JMBAG

IME I PREZIME

Numerička matematika — 1. kolokvij — Zadatak 3

26. travnja 2022.

(10 bodova.) Pomoću LU faktorizacije, odnosno Gaussovih eliminacija, izračunajte inverz A^{-1} matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & 7 & -4 \\ -1 & 8 & 1.00001 \end{bmatrix}$$

(a) Izračunajte uvjetovanost $\kappa_\infty(A)$ matrice A u ∞-normi $\|\ \|_\infty$.

(b) Ako sustav $Ax = b$ za proizvoljni vektor b rješavamo na računalu u jednostrukoj preciznosti za koju je jedinična greška zaokruživanja jednaka $u = 5.96 \cdot 10^{-8}$, kakvu točnost rješenja možemo očekivati?

JMBAG

IME I PREZIME

Numerička matematika — 1. kolokvij — Zadatak 4

26. travnja 2022.

(10 bodova.) Zadana je matrica

$$A(x) = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & x & 0 \\ 0 & x & 16 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

gdje je x realni parametar. Nađite sve vrijednosti x za koje je matrica $A(x)$ pozitivno definitna matrica i izračunajte faktorizaciju Choleskog matrice $A(x)$.

JMBAG

IME I PREZIME

Numerička matematika — 1. kolokvij — Zadatak 5

26. travnja 2022.

(10 bodova.) Funkciju $f(x) = \ln(1 + x)$ aproksimiramo na intervalu $[0, 2]$.

(a) Odredi najmanji broj podintervala n tako da ocjena uniformne pogreške na $[0, 2]$ ne prelazi $\varepsilon = 10^{-3}$ ako funkciju aproksimiramo po dijelovima kubnom Hermiteovom interpolacijom φ.

(b) Nađite interpolacijski polinom za funkciju f na Čebiševljevoj mreži sa 4 čvora na intervalu $[0, 2]$. Ocijenite grešku interpolacije u točki $x = 0.1$ i nađite pravu grešku u toj točki.

Ocjena uniformne greške za ekvidistantnu mrežu s korakom h na $[a, b]$ ima oblik

$$\max_{x\in[a,b]} |f(x) - \varphi(x)| \leq \frac{h^4}{384} M_4, \quad M_4 = \max_{x\in[a,b]} \left| f^{(4)}(x) \right|.$$

Detaljno obrazložite tvrdnje vezane uz ocjenu greške.

JMBAG | IME I PREZIME

NUMERIČKA MATEMATIKA — 1. KOLOKVIJ

26. travnja 2022.

Upute: Na kolokviju je dozvoljeno koristiti samo pribor za pisanje i brisanje, kalkulator, te službeni šalabahter. Sva rješenja napišite isključivo na papire sa zadacima, jer jedino njih predajete. Obavezno predajte **sve** papire sa zadacima, čak i ako neke zadatke niste rješavali. Ne zaboravite se **potpisati** na svim papirima! Skice smijete raditi i na drugim papirima koje će vam dati dežurni asistent.

Izračunata rješenja (brojevi i funkcije), **bez opisa postupka kako se do njih dolazi**, odnosno, rezultati **bez odgovarajuće ocjene pogreške** koja garantira traženu točnost — **ne vrijede**, tj. donose 0 bodova!

Rezultati: petak, 29. travnja 2022., u 9.00 na webu.
Uvid u kolokvije: petak, 29. travnja 2022., u 12.00 sati.

ZADATAK 1

1

(10 bodova.)

(a) Izvedite matricu brojeva uvjetovanosti $\Gamma(x_1, x_2)$ višedimenzionalnog problema računanja vrijednosti funkcije $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x_1, x_2) = x_1 \cdot x_2$.

(b) Ako definiramo funkciju problema $f_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ sa $x = F_A(b) = A^{-1}b$, gdje je $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ regularna matrica, izvedite kako glasi relativna uvjetovanost problema rješavanja linearnih sustava "po normi" $\kappa_{f_A}(b)$? Odredite maksimalnu moguću relativnu uvjetovanost ovog problema po svim vektorima b u bilo kojoj operatorskoj normi $\|\ \|$?

(c) Navedite iskaz teorema o ocjeni greške interpolacijskog polinoma stupnja n u odnosu na danu funkciju f, koji ne uključuje derivacije funkcije f.

(d) Kod po dijelovima kubične interpolacije na $[a, b]$ sa čvorovima interpolacije $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ aproksimacijska funkcija φ je oblika

$$\varphi\Big|_{[x_{k-1},x_k]} = p_k, \quad k = 1, \ldots, n, \quad p_k \in \mathcal{P}_3.$$

Koeficijente polinoma p_k dobivamo iz interpolacijskih uvjeta

$$\begin{aligned} p_k(x_{k-1}) &= f_{k-1} & p_k(x_k) &= f_k & \\ p_k'(x_{k-1}) &= s_{k-1} & p_k'(x_k) &= s_k & k &= 1, \ldots, n, \end{aligned}$$

gdje su $f_k = f(x_k)$, a s_k su neke aproksimacije derivacije funkcije f u čvorovima. Izvedite jednadžbe za parametre $s_0, \ldots, s_n$ u unutarnjim čvorovima $x_1, \ldots, x_{n-1}$ kod kubične splajn interpolacije. Koji uvjet zahtijevamo da funkcija φ zadovoljava u tim unutarnjim čvorovima?

JMBAG

IME I PREZIME

Numerička matematika — 1. kolokvij — Zadatak 2

26. travnja 2022.

(10 bodova.) Promotrimo 2×2 sustav $Ax = b$ za

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, \; b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}, \; x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}.$$

(a) Pretpostavimo da sustav rješavamo supstitucijom unaprijed u aritmetici računala, te da tako dobijemo rješenje $\hat{x}$. Izvedite izraze za $\hat{x}_1$ i $\hat{x}_2$ koji uključuju odgovarajuće greške računanja u aritmetici računala.

(b) Dokažite da je postupak rješavanja sustava kao u (a) stabilan unatrag, odnosno, da postoji donje trokutasta matrica $\hat{A}$ čiji je svaki element nastao malom relativnom perturbacijom pripadnog elementa matrice A takva da u egzaktnoj aritmetici vrijedi $\hat{A}\hat{x} = b$.

(c) Dokažite da algoritam rješavanja sustava supstitucijom unaprijed u aritmetici računala nije nužno stabilan unaprijed: za $a_{11} = a_{22} = 1$ odredite relativnu grešku unaprijed prilikom računanja x_2, te pokažite da je moguće odabrati a_{21}, b_1 i b_2 takve da ta greška bude po volji velika.

JMBAG

IME I PREZIME

Numerička matematika — 1. kolokvij — Zadatak 3

26. travnja 2022.

(10 bodova.) Za matricu

$$A = \begin{bmatrix} 10^{-7} & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

izračunajte sve matrice $A^{(k)}$ u svim koracima Gaussovih eliminacija i Gaussovih eliminacija sa parcijalnim pivotiranjem.

(a) Izračunajte pivotni rast $\rho(A)$ za obje metode.

(b) Ako sustav $Ax = b$ za proizvoljni vektor b rješavamo na računalu u jednostrukoj preciznosti za koju je jedinična greška zaokruživanja jednaka $u = 5.96 \cdot 10^{-8}$, kakvu točnost rješenja možemo očekivati za metodu bez pivotiranja, a koju za metodu sa pivotiranjem?

JMBAG

IME I PREZIME

Numerička matematika — 1. kolokvij — Zadatak 4

26. travnja 2022.

(10 bodova.) Zadana je matrica

$$A(x) = \begin{bmatrix} 9 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & x & 0 \\ 0 & x & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

gdje je x realni parametar. Nađite sve vrijednosti x za koje je matrica $A(x)$ pozitivno definitna matrica i izračunajte faktorizaciju Choleskog matrice $A(x)$.

JMBAG

IME I PREZIME

Numerička matematika — 1. kolokvij — Zadatak 5

26. travnja 2022.

(10 bodova.) Funkciju $f(x) = \sqrt{1+x}$ aproksimiramo na intervalu $[0, 4]$.

(a) Odredi najmanji broj podintervala n tako da ocjena uniformne pogreške na $[0, 4]$ ne prelazi $\varepsilon = 10^{-2}$ ako funkciju aproksimiramo po dijelovima kubnom Hermiteovom interpolacijom.

(b) Nađite interpolacijski polinom za funkciju f na Čebiševljevoj mreži sa 4 čvora na intervalu $[0, 4]$. Ocijenite grešku interpolacije u točki $x = 0.1$ i nađite pravu grešku u toj točki.

Ocjena uniformne greške za ekvidistantnu mrežu s korakom h na $[a, b]$ ima oblik

$$\max_{x\in[a,b]} |f(x) - \varphi(x)| \leq \frac{h^4}{384} M_4, \quad M_4 = \max_{x\in[a,b]} \left| f^{(4)}(x) \right|.$$

Detaljno obrazložite tvrdnje vezane uz ocjenu greške.