JMBAG — IME I PREZIME

Numerička matematika — popravni kolokvij

30. kolovoza 2019.

Upute: Na kolokviju je dozvoljeno koristiti samo pribor za pisanje i brisanje, kalkulator, te službeni šalabahter. Sva rješenja napišite isključivo na papire sa zadacima, jer jedino njih predajete. Obavezno predajte **sve** papire sa zadacima, čak i ako neke zadatke niste rješavali. Ne zaboravite se **potpisati** na svim papirima! Skice smijete raditi i na drugim papirima koje će vam dati dežurni asistent.

Izračunata rješenja (brojevi i funkcije), **bez opisa postupka kako se do njih dolazi**, odnosno, rezultati **bez odgovarajuće ocjene pogreške** koja garantira traženu točnost — **ne vrijede**, tj. donose 0 bodova!

Rezultati: ponedjeljak, 2. rujna 2019., kasno navečer na webu.
Uvid u kolokvije: utorak, 3. rujna 2019., u 11 sati.

1

Zadatak 1

(10 + 10 = 20 bodova.)

(a) Kako definiramo simetrične pozitivno definitne matrice? Pokažite da se za svaku simetričnu pozitivno definitnu matricu uvijek može napraviti LR faktorizacija bez pivotiranja i da, pri tom, matrica R ima pozitivnu dijagonalu i regularna je. Kako glasi faktorizacija Choleskog i kako ju računamo (navedite pseudokod algoritma)?

(b) Promatramo linearan neprekidni problem najmanjih kvadrata. Kako definiramo taj problem, kako definiramo normu i skalarni produkt u tom slučaju, i kojeg je oblika aproksimacija? Kako računamo traženu aproksimaciju, tj. izvedite sustav normalnih jednadžbi. Kakva je matrica tog sustava? Pokažite to.

JMBAG

IME I PREZIME

Numerička matematika — popravni kolokvij — Zadatak 2

30. kolovoza 2019.

(15 bodova.) Zadan je linearni sustav $Ax = b$, gdje su

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 5.5 & 8 & 5.5 \\ 8 & 7 & 6 & 5 \\ -2 & 2.25 & 4 & 2.25 \\ -4 & 2.5 & 3 & -2.5 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 64 \\ 68 \\ 24 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Nađite LU faktorizaciju matrice A korištenjem parcijalnog pivotiranja, tj. nađite matricu permutacije P, te matrice L i U, tako da je $PA = LU$. Iz ove faktorizacije izračunajte rješenje zadanog sustava.

JMBAG

IME I PREZIME

Numerička matematika — popravni kolokvij — Zadatak 3

30. kolovoza 2019.

(20 bodova.) Primjenom Besselove (po dijelovima kubne) kvazihermiteove interpolacije za funkciju

$$f(x) = \frac{1}{x+1},$$

na osnovu vrijednosti $f(0)$, $f(1/2)$, $f(3/2)$, $f(2)$ i $f(5/2)$, izračunajte aproksimaciju za $f(1)$ i pripadnu grešku. Za svaku izračunatu aproksimaciju prve derivacije, nađite ocjenu lokalne apsolutne greške i pravu grešku. Formula: Ako je p_n interpolacijski polinom za f s čvorovima $x_0, \ldots, x_n$, lokalna greška za prvu derivaciju u čvoru x_0 je

$$e_n'(x_0) = f'(x_0) - p_n'(x_0) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x_0 - x_1) \cdots (x_0 - x_n),$$

gdje je $\min\{x_0, \ldots, x_n\} < \xi < \max\{x_0, \ldots, x_n\}$.

JMBAG

IME I PREZIME

Numerička matematika — popravni kolokvij — Zadatak 4

30. kolovoza 2019.

(15 bodova.) Nađite razvoj funkcije

$$f(x) = 2x^4 - x^3 + 2x^2 - 3$$

po Čebiševljevim polinomima prve vrste T_n. Koristeći taj razvoj, izračunajte polinom p_3, stupnja najviše 3, koji aproksimira funkciju f na intervalu $[-1, 1]$, u smislu neprekidne metode najmanjih kvadrata, s težinskom funkcijom $w(x) = 1/\sqrt{1 - x^2}$. Kolika je najveća apsolutna greška te aproksimacije na $[-1, 1]$?

JMBAG

IME I PREZIME

NUMERIČKA MATEMATIKA — POPRAVNI KOLOKVIJ — ZADATAK 5

30. kolovoza 2019.

(15 + 5 = 20 bodova.)

(a) Odredite težine w_1, w_2, w_3 i čvor x_2 u Gauss–Lobatto integracijskoj formuli oblika

$$\int_1^3 \frac{1}{x^2}\, f(x)\, dx \approx w_1 f(1) + w_2 f(x_2) + w_3 f(3).$$

Koliki je polinomni stupanj egzaktnosti ove formule? Pomoću ove formule izračunajte približnu vrijednost integrala za $f(x) = x^{4/3}$ i nađite pravu grešku.

(b) Može li integracijska formula

$$I(f) = \frac{3}{4}\, f(1) - \frac{1}{4}\, f(2) + \frac{3}{2}\, f(3)$$

biti **Gaussova** integracijska formula s nekom pozitivnom težinskom funkcijom w, na nekom intervalu $[a, b]$ koji sadrži čvorove 1, 2 i 3? Precizno argumentirajte odgovor!

JMBAG

IME I PREZIME

Numerička matematika — popravni kolokvij — Zadatak 6

30. kolovoza 2019.

(15 bodova.) S točnošću $\varepsilon = 10^{-4}$, odredite sva realna rješenja jednadžbe

$$\sin(x) = \frac{x}{5}\,.$$

Napomene: Duljina početnog intervala za nalaženje rješenja mora biti barem 1. Precizno argumentirajte lokaciju i broj rješenja te ocjenu greške.

JMBAG

IME I PREZIME

Numerička matematika — popravni kolokvij

30. kolovoza 2019.

Upute: Na kolokviju je dozvoljeno koristiti samo pribor za pisanje i brisanje, kalkulator, te službeni šalabahter. Sva rješenja napišite isključivo na papire sa zadacima, jer jedino njih predajete. Obavezno predajte **sve** papire sa zadacima, čak i ako neke zadatke niste rješavali. Ne zaboravite se **potpisati** na svim papirima! Skice smijete raditi i na drugim papirima koje će vam dati dežurni asistent.

Izračunata rješenja (brojevi i funkcije), **bez opisa postupka kako se do njih dolazi**, odnosno, rezultati **bez odgovarajuće ocjene pogreške** koja garantira traženu točnost — **ne vrijede**, tj. donose 0 bodova!

Rezultati: ponedjeljak, 2. rujna 2019., kasno navečer na webu.
Uvid u kolokvije: utorak, 3. rujna 2019., u 11 sati.

1

Zadatak 1

($10 + 10 = 20$ bodova.)

(a) Zbog čega polinomna interpolacija visokog stupnja nije dobra i što onda koristimo umjesto nje? Kako definiramo po dijelovima polinomnu interpolaciju i koliko ukupno koeficijenata moramo odrediti? Kako glasi aproksimacija za po dijelovima linearnu interpolaciju? Izvedite grešku po dijelovima linearne interpolacije. Što možemo zaključiti o uniformnoj konvergenciji u tom slučaju? Kako možemo odrediti minimalan broj podintervala za postizanje uniformne greške zadane točnosti ε?

(b) Izvedite integracijsku formulu dobivenu integracijom Hermiteovog interpolacijskog polinoma neke funkcije f. Kako glasi greška te formule? Izvedite ju. Kada se ova interpolacijska integracijska formula poklapa s Gaussovom integracijskom formulom i koji uvjet interpolacija mora zadovoljavati u tom slučaju?

JMBAG

IME I PREZIME

Numerička matematika — popravni kolokvij — Zadatak 2

30. kolovoza 2019.

(15 bodova.) Zadan je linearni sustav $Ax = b$, gdje su

$$A = \begin{bmatrix} -2.5 & -6 & 1 & -6.5 \\ -5 & 0 & 2.5 & -2.5 \\ 5 & 12 & 10 & 7 \\ 10 & 8 & 6 & 4 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 17.5 \\ 2.5 \\ -11 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Nađite LU faktorizaciju matrice A korištenjem parcijalnog pivotiranja, tj. nađite matricu permutacije P, te matrice L i U, tako da je $PA = LU$. Iz ove faktorizacije izračunajte rješenje zadanog sustava.

JMBAG

IME I PREZIME

Numerička matematika — popravni kolokvij — Zadatak 3

30. kolovoza 2019.

(20 bodova.) Primjenom Besselove (po dijelovima kubne) kvazihermiteove interpolacije za funkciju

$$f(x) = \frac{1}{x + 1/2},$$

na osnovu vrijednosti $f(0)$, $f(1/2)$, $f(3/2)$, $f(2)$ i $f(5/2)$, izračunajte aproksimaciju za $f(1)$ i pripadnu grešku. Za svaku izračunatu aproksimaciju prve derivacije, nađite ocjenu lokalne apsolutne greške i pravu grešku. Formula: Ako je p_n interpolacijski polinom za f s čvorovima $x_0, \ldots, x_n$, lokalna greška za prvu derivaciju u čvoru x_0 je

$$e_n'(x_0) = f'(x_0) - p_n'(x_0) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\,(x_0 - x_1) \cdots (x_0 - x_n),$$

gdje je $\min\{x_0, \ldots, x_n\} < \xi < \max\{x_0, \ldots, x_n\}$.

JMBAG

IME I PREZIME

Numerička matematika — popravni kolokvij — Zadatak 4

30. kolovoza 2019.

(15 bodova.) Nađite razvoj funkcije

$$f(x) = x^4 - 3x^3 + 2x - 2$$

po Čebiševljevim polinomima prve vrste T_n. Koristeći taj razvoj, izračunajte polinom p_3, stupnja najviše 3, koji aproksimira funkciju f na intervalu $[-1, 1]$, u smislu neprekidne metode najmanjih kvadrata, s težinskom funkcijom $w(x) = 1/\sqrt{1 - x^2}$. Kolika je najveća apsolutna greška te aproksimacije na $[-1, 1]$?

JMBAG

IME I PREZIME

Numerička matematika — popravni kolokvij — Zadatak 5

30. kolovoza 2019.

$(15 + 5 = 20$ bodova.)

(a) Odredite težine w_1, w_2, w_3 i čvor x_2 u Gauss–Lobatto integracijskoj formuli oblika

$$\int_1^2 \frac{1}{x^3} f(x)\, dx \approx w_1 f(1) + w_2 f(x_2) + w_3 f(2).$$

Koliki je polinomni stupanj egzaktnosti ove formule? Pomoću ove formule izračunajte približnu vrijednost integrala za $f(x) = x^{7/3}$ i nađite pravu grešku.

(b) Može li integracijska formula

$$I(f) = \frac{3}{4} f(1) - \frac{4}{5} f(2)$$

biti **interpolacijska** integracijska formula s nekom pozitivnom težinskom funkcijom w, na nekom intervalu $[a, b]$ koji sadrži čvorove 1 i 2? Precizno argumentirajte odgovor!

JMBAG

IME I PREZIME

Numerička matematika — popravni kolokvij — Zadatak 6

30. kolovoza 2019.

(15 bodova.) S točnošću $\varepsilon = 10^{-5}$, odredite sva realna rješenja jednadžbe

$$\sin(x) = \frac{x}{6}\,.$$

Napomene: Duljina početnog intervala za nalaženje rješenja mora biti barem 1. Precizno argumentirajte lokaciju i broj rješenja te ocjenu greške.