JMBAG

IME I PREZIME

Numerička matematika — 1. kolokvij

23. travnja 2019.

Upute: Na kolokviju je dozvoljeno koristiti samo pribor za pisanje i brisanje, kalkulator, te službeni šalabahter. Sva rješenja napišite isključivo na papire sa zadacima, jer jedino njih predajete. Obavezno predajte **sve** papire sa zadacima, čak i ako neke zadatke niste rješavali. Ne zaboravite se **potpisati** na svim papirima! Skice smijete raditi i na drugim papirima koje će vam dati dežurni asistent.

Izračunata rješenja (brojevi i funkcije), **bez opisa postupka kako se do njih dolazi**, odnosno, rezultati **bez odgovarajuće ocjene pogreške** koja garantira traženu točnost — **ne vrijede**, tj. donose 0 bodova!

Rezultati: nedjelja, 28. travnja 2019., kasno navečer na webu.
Uvid u kolokvije: ponedjeljak, 29. travnja 2019., u 12 sati.

1

Zadatak 1

(10 bodova.) Objasnite interpretaciju širenja grešaka u aritmetici računala.

(a) Kako interpretiramo izračunati rezultat svake pojedine računske operacije izvedene na računalu?

(b) Koja vrsta analize grešaka se najčešće izvodi kod analize izvršavanja algoritama na računalu? Što je rezultat te analize?

(c) Kako tada nalazimo grešku u izračunatom rezultatu?

(d) Što je rezultat takve analize za računanje sume od n brojeva $s_n = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$? Objasnite sve korake.

JMBAG IME I PREZIME

Numerička matematika — 1. kolokvij — Zadatak 2

23. travnja 2019.

(10 bodova.) Zadan je linearni sustav $Ax = b$, s matricom A reda 2,

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}.$$

U tom sustavu, element a_{11} varira kao realni parametar, a ostali elementi matrice A i vektor b su fiksni (ne variraju). Promatramo uvjetovanost komponenti rješenja x_1 i x_2, za **male** promjene varijabilnog elementa matrice A, oko neke konkretne vrijednosti a_{11}.

(a) Kad je relativna uvjetovanost komponente x_k (po a_{11}) korektno definirana, tj. ima smisla? Koje oblike uvjetovanosti ima smisla gledati kad to nije slučaj? Precizno objasnite.

(b) Uz odgovarajuće pretpostavke iz (a), nađite relativnu uvjetovanost komponenti x_1 i x_2 po parametru a_{11}. Kad je računanje x_1, x_2 stabilno u relativnom smislu? Pokažite da relativna uvjetovanost x_1 ne ovisi o vektoru b, a relativna uvjetovanost x_2 ovisi samo o A i omjeru x_1/x_2. Ako je $a_{22} = 0$, što se događa s x_1?

(c) Izračunajte relativne uvjetovanosti komponenti x_1 i x_2, po parametru $a_{11} = c$, za sustav u kojem je

$$A = \begin{bmatrix} c & 3 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

JMBAG

IME I PREZIME

Numerička matematika — 1. kolokvij — Zadatak 3

23. travnja 2019.

(10 bodova.) Zadan je linearni sustav $Ax = b$, gdje su

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 0 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 14 \\ 32 \\ 23 \end{bmatrix}.$$

Nađite LU faktorizaciju matrice A korištenjem parcijalnog pivotiranja, tj. nađite matricu permutacije P, te matrice L i U, tako da je $PA = LU$. Koristeći ovu faktorizaciju riješite zadani sustav.

JMBAG

IME I PREZIME

Numerička matematika — 1. kolokvij — Zadatak 4

23. travnja 2019.

(10 bodova.) Zadana je simetrična matrica

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 4 & 0 \\ -4 & 11 & -8 & -6 \\ 4 & -8 & 9 & -2 \\ 0 & -6 & -2 & 18 \end{bmatrix}.$$

(a) Izračunajte, ako je to moguće, LDL^T faktorizaciju bez pivotiranja matrice A.

(b) Je li A pozitivno definitna? Zašto? Ako je, nađite joj faktorizaciju Choleskog.

JMBAG

IME I PREZIME

Numerička matematika — 1. kolokvij — Zadatak 5

23. travnja 2019.

(10 bodova.) Funkciju $f(x) = e^{-2x^2/5}$ interpoliramo polinomom na Čebiševljevoj mreži s 3 čvora u intervalu $[-1, 1]$.

(a) Izračunajte (u decimalnim brojevima) Newtonov oblik tog polinoma i nađite uniformnu ocjenu greške na intervalu $[-1, 1]$. Detaljno obrazložite tvrdnje vezane uz ocjenu greške.

(b) Je li dobiveni interpolacijski polinom parna funkcija? U slučaju da nema grešaka zaokruživanja u računanju koeficijenata polinoma i njegove vrijednosti u točki, hoće li onda biti paran?

JMBAG | IME I PREZIME

Numerička matematika — 1. kolokvij

23. travnja 2019.

Upute: Na kolokviju je dozvoljeno koristiti samo pribor za pisanje i brisanje, kalkulator, te službeni šalabahter. Sva rješenja napišite isključivo na papire sa zadacima, jer jedino njih predajete. Obavezno predajte **sve** papire sa zadacima, čak i ako neke zadatke niste rješavali. Ne zaboravite se **potpisati** na svim papirima! Skice smijete raditi i na drugim papirima koje će vam dati dežurni asistent.

Izračunata rješenja (brojevi i funkcije), **bez opisa postupka kako se do njih dolazi**, odnosno, rezultati **bez odgovarajuće ocjene pogreške** koja garantira traženu točnost — **ne vrijede**, tj. donose 0 bodova!

Rezultati: nedjelja, 28. travnja 2019., kasno navečer na webu.
Uvid u kolokvije: ponedjeljak, 29. travnja 2019., u 12 sati.

1

Zadatak 1

(10 bodova.) Objasnite vezu pivotnog rasta, pivotiranja kod Gaussovih eliminacija i točnosti izračunatog rješenja sustava.

(a) Kako se definira pivotni rast u procesu Gaussovih eliminacija za rješenje linearnog sustava $Ax = b$, gdje je A regularna kvadratna matrica reda n? Objasnite sve pojmove u definiciji.

(b) Kako glasi rezultat o povratnoj grešci računanja rješenja linearnog sustava $Ax = b$ pomoću Gaussovih eliminacija (ili, ekvivalentno, LR faktorizacije), po komponentama? Prema tom rezultatu, o čemu ovisi stabilnost LR faktorizacije i točnost rješenja linearnog sustava?

(c) Koja je uloga pivotnog rasta u prethodno opisanom rezultatu?

(d) Što znamo reći o pivotnom rastu za Gaussove eliminacije bez pivotiranja, s parcijalnim pivotiranjem, i s potpunim pivotiranjem?

JMBAG IME I PREZIME

NUMERIČKA MATEMATIKA — 1. KOLOKVIJ — ZADATAK 2

23. travnja 2019.

(10 bodova.) Zadan je linearni sustav $Ax = b$, s matricom A reda 2,

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}.$$

U tom sustavu, element a_{12} varira kao realni parametar, a ostali elementi matrice A i vektor b su fiksni (ne variraju). Promatramo uvjetovanost komponenti rješenja x_1 i x_2, za **male** promjene varijabilnog elementa matrice A, oko neke konkretne vrijednosti a_{12}.

(a) Kad je relativna uvjetovanost komponente x_k (po a_{12}) korektno definirana, tj. ima smisla? Koje oblike uvjetovanosti ima smisla gledati kad to nije slučaj? Precizno objasnite.

(b) Uz odgovarajuće pretpostavke iz (a), nađite relativnu uvjetovanost komponenti x_1 i x_2 po parametru a_{12}. Kad je računanje x_1, x_2 stabilno u relativnom smislu? Pokažite da relativna uvjetovanost x_2 ne ovisi o vektoru b, a relativna uvjetovanost x_1 ovisi samo o A i omjeru x_2/x_1. Ako je $a_{21} = 0$, što se događa s x_2?

(c) Izračunajte relativne uvjetovanosti komponenti x_1 i x_2, po parametru $a_{12} = c$, za sustav u kojem je

$$A = \begin{bmatrix} 1 & c \\ 2 & 6 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \end{bmatrix}.$$

JMBAG

IME I PREZIME

Numerička matematika — 1. kolokvij — Zadatak 3

23. travnja 2019.

(10 bodova.) Zadan je linearni sustav $Ax = b$, gdje su

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 5 \\ 4 & 5 & 0 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 19 \\ 20 \\ 14 \end{bmatrix}.$$

Nađite LU faktorizaciju matrice A korištenjem parcijalnog pivotiranja, tj. nađite matricu permutacije P, te matrice L i U, tako da je $PA = LU$. Koristeći ovu faktorizaciju riješite zadani sustav.

JMBAG

IME I PREZIME

Numerička matematika — 1. kolokvij — Zadatak 4

23. travnja 2019.

(10 bodova.) Zadana je simetrična matrica

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -6 & 6 & 0 \\ -6 & 13 & -12 & -2 \\ 6 & -12 & 14 & -4 \\ 0 & -2 & -4 & 14 \end{bmatrix}.$$

(a) Izračunajte, ako je to moguće, LDL^T faktorizaciju bez pivotiranja matrice A.

(b) Je li A pozitivno definitna? Zašto? Ako je, nađite joj faktorizaciju Choleskog.

JMBAG

IME I PREZIME

Numerička matematika — 1. kolokvij — Zadatak 5

23. travnja 2019.

(10 bodova.) Funkciju $f(x) = e^{-3x^2/4}$ interpoliramo polinomom na Čebiševljevoj mreži s 3 čvora u intervalu $[-1, 1]$.

(a) Izračunajte (u decimalnim brojevima) Newtonov oblik tog polinoma i nađite uniformnu ocjenu greške na intervalu $[-1, 1]$. Detaljno obrazložite tvrdnje vezane uz ocjenu greške.

(b) Je li dobiveni interpolacijski polinom parna funkcija? U slučaju da nema grešaka zaokruživanja u računanju koeficijenata polinoma i njegove vrijednosti u točki, hoće li onda biti paran?

JMBAG IME I PREZIME

Numerička matematika — 1. kolokvij

23. travnja 2019.

Upute: Na kolokviju je dozvoljeno koristiti samo pribor za pisanje i brisanje, kalkulator, te službeni šalabahter. Sva rješenja napišite isključivo na papire sa zadacima, jer jedino njih predajete. Obavezno predajte **sve** papire sa zadacima, čak i ako neke zadatke niste rješavali. Ne zaboravite se **potpisati** na svim papirima! Skice smijete raditi i na drugim papirima koje će vam dati dežurni asistent.

Izračunata rješenja (brojevi i funkcije), **bez opisa postupka kako se do njih dolazi**, odnosno, rezultati **bez odgovarajuće ocjene pogreške** koja garantira traženu točnost — **ne vrijede**, tj. donose 0 bodova!

Rezultati: nedjelja, 28. travnja 2019., kasno navečer na webu.
Uvid u kolokvije: ponedjeljak, 29. travnja 2019., u 12 sati.

1

Zadatak 1

(10 bodova.) Neka je $\{x_0, \ldots, x_n\}$ zadana mreža međusobno različitih čvorova.

(a) Napišite kako izgleda Newtonova baza u prostoru polinoma stupnja manjeg ili jednakog n, za problem interpolacije na zadanoj mreži čvorova. Što predstavljaju podijeljene razlike $f[x_0, \ldots, x_k]$, $k = 0, 1, \ldots, n$, za interpolacijski polinom u Newtonovom obliku?

(b) Dokažite da podijeljene razlike ne ovise o permutaciji čvorova, tj. da vrijedi $f[x_0, \ldots, x_n] = f[x_{\sigma(0)}, \ldots, x_{\sigma(n)}]$, gdje je σ bilo koja permutacija skupa indeksa $\{0, \ldots, n\}$.

(c) Koja rekurzija vrijedi za podijeljene razlike i kako, pomoću nje, možemo izračunati koeficijente interpolacijskog polinoma u Newtonovom obliku?

(d) Kako definiramo podijeljene razlike za dvostruki čvor? Koje uvjete mora zadovoljavati funkcija f, čije vrijednosti interpoliramo na mreži čvorova, da bi prva podijeljena razlika bila svagdje dobro definirana?

JMBAG IME I PREZIME

Numerička matematika — 1. kolokvij — Zadatak 2

23. travnja 2019.

(10 bodova.) Zadan je linearni sustav $Ax = b$, s matricom A reda 2,

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}.$$

U tom sustavu, element a_{21} varira kao realni parametar, a ostali elementi matrice A i vektor b su fiksni (ne variraju). Promatramo uvjetovanost komponenti rješenja x_1 i x_2, za **male** promjene varijabilnog elementa matrice A, oko neke konkretne vrijednosti a_{21}.

(a) Kad je relativna uvjetovanost komponente x_k (po a_{21}) korektno definirana, tj. ima smisla? Koje oblike uvjetovanosti ima smisla gledati kad to nije slučaj? Precizno objasnite.

(b) Uz odgovarajuće pretpostavke iz (a), nađite relativnu uvjetovanost komponenti x_1 i x_2 po parametru a_{21}. Kad je računanje x_1, x_2 stabilno u relativnom smislu? Pokažite da relativna uvjetovanost x_1 ne ovisi o vektoru b, a relativna uvjetovanost x_2 ovisi samo o A i omjeru x_1/x_2. Ako je $a_{12} = 0$, što se događa s x_1?

(c) Izračunajte relativne uvjetovanosti komponenti x_1 i x_2, po parametru $a_{21} = c$, za sustav u kojem je

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ c & 6 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 2 \\ 7 \end{bmatrix}.$$

JMBAG

IME I PREZIME

Numerička matematika — 1. kolokvij — Zadatak 3

23. travnja 2019.

(10 bodova.) Zadan je linearni sustav $Ax = b$, gdje su

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 8 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \\ 5 & 8 & 0 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 29 \\ 36 \\ 21 \end{bmatrix}.$$

Nađite LU faktorizaciju matrice A korištenjem parcijalnog pivotiranja, tj. nađite matricu permutacije P, te matrice L i U, tako da je $PA = LU$. Koristeći ovu faktorizaciju riješite zadani sustav.

JMBAG

IME I PREZIME

NUMERIČKA MATEMATIKA — 1. KOLOKVIJ — ZADATAK 4

23. travnja 2019.

(10 bodova.) Zadana je simetrična matrica

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 4 & 0 \\ -4 & 9 & -8 & -2 \\ 4 & -8 & 11 & -6 \\ 0 & -2 & -6 & 18 \end{bmatrix}.$$

(a) Izračunajte, ako je to moguće, LDL^T faktorizaciju bez pivotiranja matrice A.

(b) Je li A pozitivno definitna? Zašto? Ako je, nađite joj faktorizaciju Choleskog.

JMBAG

IME I PREZIME

Numerička matematika — 1. kolokvij — Zadatak 5

23. travnja 2019.

(10 bodova.) Funkciju $f(x) = e^{-3x^2/5}$ interpoliramo polinomom na Čebiševljevoj mreži s 3 čvora u intervalu $[-1, 1]$.

(a) Izračunajte (u decimalnim brojevima) Newtonov oblik tog polinoma i nađite uniformnu ocjenu greške na intervalu $[-1, 1]$. Detaljno obrazložite tvrdnje vezane uz ocjenu greške.

(b) Je li dobiveni interpolacijski polinom parna funkcija? U slučaju da nema grešaka zaokruživanja u računanju koeficijenata polinoma i njegove vrijednosti u točki, hoće li onda biti paran?

JMBAG

IME I PREZIME

Numerička matematika — 1. kolokvij

23. travnja 2019.

Upute: Na kolokviju je dozvoljeno koristiti samo pribor za pisanje i brisanje, kalkulator, te službeni šalabahter. Sva rješenja napišite isključivo na papire sa zadacima, jer jedino njih predajete. Obavezno predajte **sve** papire sa zadacima, čak i ako neke zadatke niste rješavali. Ne zaboravite se **potpisati** na svim papirima! Skice smijete raditi i na drugim papirima koje će vam dati dežurni asistent.

Izračunata rješenja (brojevi i funkcije), **bez opisa postupka kako se do njih dolazi**, odnosno, rezultati **bez odgovarajuće ocjene pogreške** koja garantira traženu točnost — **ne vrijede**, tj. donose 0 bodova!

Rezultati: nedjelja, 28. travnja 2019., kasno navečer na webu.
Uvid u kolokvije: ponedjeljak, 29. travnja 2019., u 12 sati.

1

Zadatak 1

(10 bodova.) Neka je $x_0 < x_1 < \cdots < x_n$ zadana mreža čvorova i neka je f zadana funkcija na intervalu $[x_0, x_n]$.

(a) Što je po dijelovima kubična kvazihermiteova interpolacija φ za funkciju f na zadanoj mreži i koje uvjete interpolacije i glatkoće zadovoljava?

(b) Opišite kako možemo naći dobre vrijednosti za nagibe u čvorovima, koristeći samo funkcijske vrijednosti u čvorovima. Koja je veza između kvalitete izbora nagiba i kvalitete aproksimacije funkcije?

(c) Navedite izraz za grešku prve derivacije interpolacijskog polinoma stupnja k, i kako ga možemo izvesti iz greške interpolacije funkcijskih vrijednosti. Koliko glatka funkcija f tada mora biti?

(d) Kako možemo izvesti formulu za simetričnu podijeljenu razliku? U tom slučaju, kako glasi greška prve derivacije?

JMBAG

IME I PREZIME

Numerička matematika — 1. kolokvij — Zadatak 2

23. travnja 2019.

(10 bodova.) Zadan je linearni sustav $Ax = b$, s matricom A reda 2,

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}.$$

U tom sustavu, element a_{22} varira kao realni parametar, a ostali elementi matrice A i vektor b su fiksni (ne variraju). Promatramo uvjetovanost komponenti rješenja x_1 i x_2, za **male** promjene varijabilnog elementa matrice A, oko neke konkretne vrijednosti a_{22}.

(a) Kad je relativna uvjetovanost komponente x_k (po a_{22}) korektno definirana, tj. ima smisla? Koje oblike uvjetovanosti ima smisla gledati kad to nije slučaj? Precizno objasnite.

(b) Uz odgovarajuće pretpostavke iz (a), nađite relativnu uvjetovanost komponenti x_1 i x_2 po parametru a_{22}. Kad je računanje x_1, x_2 stabilno u relativnom smislu? Pokažite da relativna uvjetovanost x_2 ne ovisi o vektoru b, a relativna uvjetovanost x_1 ovisi samo o A i omjeru x_2/x_1. Ako je $a_{11} = 0$, što se događa s x_2?

(c) Izračunajte relativne uvjetovanosti komponenti x_1 i x_2, po parametru $a_{22} = c$, za sustav u kojem je

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & c \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

JMBAG

IME I PREZIME

Numerička matematika — 1. kolokvij — Zadatak 3

23. travnja 2019.

(10 bodova.) Zadan je linearni sustav $Ax = b$, gdje su

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 5 \\ 3 & 5 & 0 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 19 \\ 20 \\ 13 \end{bmatrix}.$$

Nađite LU faktorizaciju matrice A korištenjem parcijalnog pivotiranja, tj. nađite matricu permutacije P, te matrice L i U, tako da je $PA = LU$. Koristeći ovu faktorizaciju riješite zadani sustav.

JMBAG

IME I PREZIME

Numerička matematika — 1. kolokvij — Zadatak 4

23. travnja 2019.

(10 bodova.) Zadana je simetrična matrica

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -6 & 6 & 0 \\ -6 & 14 & -12 & -4 \\ 6 & -12 & 13 & -2 \\ 0 & -4 & -2 & 14 \end{bmatrix}.$$

(a) Izračunajte, ako je to moguće, LDL^T faktorizaciju bez pivotiranja matrice A.

(b) Je li A pozitivno definitna? Zašto? Ako je, nađite joj faktorizaciju Choleskog.

JMBAG

IME I PREZIME

Numerička matematika — 1. kolokvij — Zadatak 5

23. travnja 2019.

(10 bodova.) Funkciju $f(x) = e^{-2x^2/3}$ interpoliramo polinomom na Čebiševljevoj mreži s 3 čvora u intervalu $[-1, 1]$.

(a) Izračunajte (u decimalnim brojevima) Newtonov oblik tog polinoma i nađite uniformnu ocjenu greške na intervalu $[-1, 1]$. Detaljno obrazložite tvrdnje vezane uz ocjenu greške.

(b) Je li dobiveni interpolacijski polinom parna funkcija? U slučaju da nema grešaka zaokruživanja u računanju koeficijenata polinoma i njegove vrijednosti u točki, hoće li onda biti paran?