JMBAG IME I PREZIME

Numerička matematika — popravni kolokvij

31. kolovoza 2018.

Upute: Na kolokviju je dozvoljeno koristiti samo pribor za pisanje i brisanje, kalkulator, te službeni šalabahter. Sva rješenja napišite isključivo na papire sa zadacima, jer jedino njih predajete. Obavezno predajte **sve** papire sa zadacima, čak i ako neke zadatke niste rješavali. Ne zaboravite se **potpisati** na svim papirima! Skice smijete raditi i na drugim papirima koje će vam dati dežurni asistent.

Izračunata rješenja (brojevi i funkcije), **bez opisa postupka kako se do njih dolazi**, odnosno, rezultati **bez odgovarajuće ocjene pogreške** koja garantira traženu točnost — **ne vrijede**, tj. donose 0 bodova!

Rezultati: Rezultati će biti poslani na objavljivanje najkasnije u nedjelju, 2. rujna 2018., navečer. Gdje, kada i kako će biti objavljeni **nije** nam poznato. Rezultate možete saznati osobno na početku uvida (tamo gdje su uvidi).
Uvid u kolokvije: ponedjeljak, 3. rujna 2018., u 10:30 sati.

1

Zadatak 1

($10 + 10 = 20$ bodova.)

(a) Kako definiramo apsolutnu i relativnu uvjetovanost? Izvedite kako se one mogu izračunati za dva puta neprekidno derivabilnu funkciju $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Što radimo u slučaju kad je jedan od podataka, bilo ulazni x ili izlazni y, jednak nuli? Kako izgleda relativna uvjetovanost po normi za funkciju $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$?

(b) Dokažite sljedeću tvrdnju: Ako x zadovoljava normalne jednadžbe $A^T r = 0$, $r = b - Ax$, tada je x rješenje problema najmanjih kvadrata $\min\limits_x ||r||_2$. Kada problem najmanjih kvadrata ima jedinstveno rješenje? Koja je geometrijska interpretacija rješenja?

JMBAG

IME I PREZIME

Numerička matematika — popravni kolokvij — Zadatak 2

31. kolovoza 2018.

(15 bodova.) Zadan je linearni sustav $Ax = b$, gdje su

$$A = \begin{bmatrix} 1.2 & 1.5 & -5.6 & -2.1 \\ -12 & 3 & 4 & 1 \\ -1.2 & 9.3 & 4.4 & 5.1 \\ -2.4 & -3 & -2 & -0.4 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} -3.8 \\ -12 \\ -11.2 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Nađite LU faktorizaciju matrice A korištenjem parcijalnog pivotiranja, tj. nađite matricu permutacije P, te matrice L i U, tako da je $PA = LU$. Iz ove faktorizacije izračunajte rješenje zadanog sustava.

JMBAG

IME I PREZIME

Numerička matematika — popravni kolokvij — Zadatak 3

31. kolovoza 2018.

(20 bodova.) Funkciju

$$f(x) = 3e^x + \sin(x)$$

interpoliramo s točnošću $\varepsilon = 0.01$ po dijelovima linearnom interpolacijom, tako da odaberemo točku x_0 iz domene $[-1, 4]$, pa napravimo ekvidistantnu mrežu na svakom od intervala $[-1, x_0]$ i $[x_0, 4]$, s ne nužno jednakim koracima h_1 i h_2. Poznato je da je x_0 najmanji broj takav da je $[x_0, 4]$ podijeljen na 60 podintervala. Odredite x_0 i broj podintervala na domeni $[-1, x_0]$.

JMBAG

IME I PREZIME

Numerička matematika — popravni kolokvij — Zadatak 4

31. kolovoza 2018.

(15 bodova.) Zadana je funkcija

$$f(x) = \sin(\pi x)$$

na intervalu $[0, 1]$. Neprekidnom metodom najmanjih kvadrata nađite funkciju φ oblika

$$\varphi(x) = a_1 x(1-x) + a_2(x(1-x))^2$$

koja aproksimira funkciju f na zadanom intervalu.

JMBAG

IME I PREZIME

Numerička matematika — popravni kolokvij — Zadatak 5

31. kolovoza 2018.

(20 bodova.) Tražimo integracijsku formulu oblika

$$\int_0^1 f(x)\,dx \approx w_1 f(x_1) + w_2 f(x_2),$$

s nepoznatim čvorovima x_1, x_2 i težinama w_1, w_2, tako da ova formula bude egzaktna na vektorskom prostoru razapetom funkcijama

$$x^3,\ x^4,\ x^5,\ x^6.$$

Pokažite da postoje jedinstveni čvorovi i težine u takvoj formuli i odredite ih. Pomoću te formule izračunajte približnu vrijednost integrala za $f(x) = x^{16/3}$ i nađite pravu grešku.

JMBAG

IME I PREZIME

Numerička matematika — popravni kolokvij — Zadatak 6

31. kolovoza 2018.

(15 + 5 = 20 bodova.)

(a) Koliko rješenja ima jednadžba

$$2x \ln(x/4) + 1 = 0\,?$$

Odredite najveće rješenje s točnošću $\varepsilon = 10^{-5}$ (ako postoji samo jedno rješenje, odredite upravo to rješenje).

Napomene: Duljina početnog intervala za nalaženje rješenja mora biti barem 1. Detaljno obrazložite sve tvrdnje vezane za lokaciju nultočke i ocjenu greške.

(b) Nađite primjer funkcije f na domeni $[-2, 4]$, takve da funkcija f ima bar jednu fiksnu točku na toj domeni, no primjena metode jednostavne iteracije, počevši s polovištem intervala, tvori niz iteracija koji ima ciklus duljine tri te zato nikad ne pronalazi fiksnu točku funkcije f.

JMBAG

IME I PREZIME

Numerička matematika — popravni kolokvij

31. kolovoza 2018.

Upute: Na kolokviju je dozvoljeno koristiti samo pribor za pisanje i brisanje, kalkulator, te službeni šalabahter. Sva rješenja napišite isključivo na papire sa zadacima, jer jedino njih predajete. Obavezno predajte **sve** papire sa zadacima, čak i ako neke zadatke niste rješavali. Ne zaboravite se **potpisati** na svim papirima! Skice smijete raditi i na drugim papirima koje će vam dati dežurni asistent.

Izračunata rješenja (brojevi i funkcije), **bez opisa postupka kako se do njih dolazi**, odnosno, rezultati **bez odgovarajuće ocjene pogreške** koja garantira traženu točnost — **ne vrijede**, tj. donose 0 bodova!

Rezultati: Rezultati će biti poslani na objavljivanje najkasnije u nedjelju, 2. rujna 2018., navečer. Gdje, kada i kako će biti objavljeni **nije** nam poznato. Rezultate možete saznati osobno na početku uvida (tamo gdje su uvidi). **Uvid u kolokvije**: ponedjeljak, 3. rujna 2018., u 10:30 sati.

1

Zadatak 1

$(10 + 10 = 20$ bodova.)

(a) Pokažite sljedeću tvrdnju: Ako su vodeće glavne podmatrice $A_k = A(1:k, 1:k)$ matrice A regularne, za $k = 1, \ldots, n-1$, tada postoji jedinstvena LR faktorizacija od A. Kako glasi teorem koji govori o rješenju sustava $Ax = b$ izračunatom pomoću LR faktorizacije u aritmetici računala, odnosno, koji daje ogradu na grešku unatrag ΔA? Komentirajte taj rezultat.

(b) Dokažite sljedeću tvrdnju: Neka je ℓ zadani cijeli broj, takav da je $0 \leq \ell \leq n$. Ako težinska integracijska formula

$$\int_a^b w(x) f(x)\, dx = I_n(f) + E_n(f), \quad I_n(f) = \sum_{k=1}^{n} w_k f(x_k),$$

ima polinomni stupanj egzaktnosti $d = n - 1 - \ell$, onda je formula interpolacijska i vrijedi da je polinom čvorova ω_n ortogonalan na sve polinome $p \in P_{\ell-1}$ s težinskom funkcijom w. Koliki je maksimalni stupanj egzaktnosti i kako tada nazivamo tu integracijsku formulu? Iz kojeg oblika izraza za težine vidimo da su one uvijek pozitivne u tom slučaju?

JMBAG

IME I PREZIME

Numerička matematika — popravni kolokvij — Zadatak 2

31. kolovoza 2018.

(15 bodova.) Zadan je linearni sustav $Ax = b$, gdje su

$$A = \begin{bmatrix} 5.2 & 8.2 & 6 & -0.8 \\ -1.3 & 2.9 & 1.4 & 2.2 \\ 2.6 & -0.3 & -7.2 & -0.6 \\ 13 & -7 & -5 & 3 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 37.2 \\ 10.4 \\ -11 \\ 8 \end{bmatrix}.$$

Nađite LU faktorizaciju matrice A korištenjem parcijalnog pivotiranja, tj. nađite matricu permutacije P, te matrice L i U, tako da je $PA = LU$. Iz ove faktorizacije izračunajte rješenje zadanog sustava.

JMBAG

IME I PREZIME

Numerička matematika — popravni kolokvij — Zadatak 3

31. kolovoza 2018.

(20 bodova.) Funkciju

$$f(x) = 3e^x - \cos(x)$$

interpoliramo s točnošću $\varepsilon = 0.01$ po dijelovima linearnom interpolacijom, tako da odaberemo točku x_0 iz domene $[-1, 4]$, pa napravimo ekvidistantnu mrežu na svakom od intervala $[-1, x_0]$ i $[x_0, 4]$, s ne nužno jednakim koracima h_1 i h_2. Poznato je da je x_0 najmanji broj takav da je $[x_0, 4]$ podijeljen na 60 podintervala. Odredite x_0 i broj podintervala na domeni $[-1, x_0]$.

JMBAG

IME I PREZIME

Numerička matematika — popravni kolokvij — Zadatak 4

31. kolovoza 2018.

(15 bodova.) Zadana je funkcija

$$f(x) = \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)$$

na intervalu $[-1, 1]$. Neprekidnom metodom najmanjih kvadrata nađite funkciju φ oblika

$$\varphi(x) = a_1(1 - x^2) + a_2(1 - x^2)^2$$

koja aproksimira funkciju f na zadanom intervalu.

JMBAG

IME I PREZIME

Numerička matematika — popravni kolokvij — Zadatak 5

31. kolovoza 2018.

(20 bodova.) Tražimo integracijsku formulu oblika

$$\int_0^1 f(x)\,dx \approx w_1 f(x_1) + w_2 f(x_2),$$

s nepoznatim čvorovima x_1, x_2 i težinama w_1, w_2, tako da ova formula bude egzaktna na vektorskom prostoru razapetom funkcijama

$$x^2,\ x^3,\ x^4,\ x^5.$$

Pokažite da postoje jedinstveni čvorovi i težine u takvoj formuli i odredite ih. Pomoću te formule izračunajte približnu vrijednost integrala za $f(x) = x^{8/3}$ i nađite pravu grešku.

JMBAG

IME I PREZIME

NUMERIČKA MATEMATIKA — POPRAVNI KOLOKVIJ — ZADATAK 6

31. kolovoza 2018.

($15 + 5 = 20$ bodova.)

(a) Koliko rješenja ima jednadžba

$$x \ln(x/5) + 1 = 0\,?$$

Odredite najveće rješenje s točnošću $\varepsilon = 10^{-5}$ (ako postoji samo jedno rješenje, odredite upravo to rješenje).

Napomene: Duljina početnog intervala za nalaženje rješenja mora biti barem 1. Detaljno obrazložite sve tvrdnje vezane za lokaciju nultočke i ocjenu greške.

(b) Nađite primjer funkcije f na domeni $[-4, 2]$, takve da funkcija f ima bar jednu fiksnu točku na toj domeni, no primjena metode jednostavne iteracije, počevši s polovištem intervala, tvori niz iteracija koji ima ciklus duljine tri te zato nikad ne pronalazi fiksnu točku funkcije f.