JMBAG

IME I PREZIME

Numerička matematika — 2. kolokvij

18. lipnja 2018.

Upute: Na kolokviju je dozvoljeno koristiti samo pribor za pisanje i brisanje, kalkulator, te službeni šalabahter. Sva rješenja napišite isključivo na papire sa zadacima, jer jedino njih predajete. Obavezno predajte **sve** papire sa zadacima, čak i ako neke zadatke niste rješavali. Ne zaboravite se **potpisati** na svim papirima! Skice smijete raditi i na drugim papirima koje će vam dati dežurni asistent.

Izračunata rješenja (brojevi i funkcije), **bez opisa postupka kako se do njih dolazi**, odnosno, rezultati **bez odgovarajuće ocjene pogreške** koja garantira traženu točnost — **ne vrijede**, tj. donose 0 bodova!

Rezultati: nedjelja, 1. srpnja 2018., kasno navečer na webu.
Uvid u kolokvije: ponedjeljak, 2. srpnja 2018., u 11 sati.

1

Zadatak 1

(15 bodova.) Opišite oblik i osnovna svojstva Householderovog reflektora reda n.

(a) Napišite točno kako se definira reflektor H i pokažite da je on ortogonalan.

(b) Navedite kako se računaju osnovni parametri iz definicije reflektora H, iz uvjeta da je $Hx = ce_1$, za zadani vektor x.

(c) Neka je $G \in \mathbb{R}^{m\times n}$, uz $m \geq n$, pravokutna matrica koja ima puni rang po stupcima, tj. $\mathrm{rang}(G) = n$. Opišite kako se primjenom reflektora računa QR faktorizacija matrice G — svođenje matrice G na trokutasti oblik i računanje matrice Q.

(d) Objasnite kako se može pivotirati u QR faktorizaciji i koja je svrha pivotiranja.

JMBAG

IME I PREZIME

Numerička matematika — 2. kolokvij — Zadatak 2

18. lipnja 2018.

(15 bodova.) Zadana je funkcija

$$f(x) = \sqrt{2x-2}$$

na intervalu $[1,2]$. Neprekidnom metodom najmanjih kvadrata nađite kvadratni polinom φ koji aproksimira funkciju f na zadanom intervalu s težinskom funkcijom

$$w(x) = \frac{1}{\sqrt{1-(2x-3)^2}}.$$

Napomena: Čebiševljevi polinomi prve vrste T_n su ortogonalni na $[-1,1]$ s težinskom funkcijom $w(x) = 1/\sqrt{1-x^2}$ i vrijedi

$$\int_{-1}^{1} \frac{T_m(x)\,T_n(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \begin{cases} 0, & \text{za } m \neq n, \\ \pi, & \text{za } m = n = 0, \\ \pi/2, & \text{za } m = n \neq 0. \end{cases}$$

JMBAG

IME I PREZIME

NUMERIČKA MATEMATIKA — 2. KOLOKVIJ — ZADATAK 3

18. lipnja 2018.

(10 bodova.) Zadan je integral

$$\int_0^1 x^2 \operatorname{ch}(x^2)\, dx$$

i tražena točnost $\varepsilon = 0.002$. Nađite potrebne brojeve podintervala n_T i n_S za garantiranu točnost ε u produljenoj trapeznoj i produljenoj Simpsonovoj formuli. Jednom od ovih formula izračunajte približnu vrijednost zadanog integrala s točnošću ε.

Napomena: Detaljno obrazložite sve tvrdnje vezane za ocjenu greške!

JMBAG

IME I PREZIME

Numerička matematika — 2. kolokvij — Zadatak 4

18. lipnja 2018.

(15 bodova.) Legendreovi polinomi P_n su ortogonalni na intervalu $[-1, 1]$ s težinskom funkcijom $w(x) = 1$. U relaciji ortogonalnosti za njih vrijedi $\|P_n\|_2^2 = 2/(2n + 1)$ i zadovoljavaju rekurziju

$$(n + 1)P_{n+1}(x) - (2n + 1)xP_n(x) + nP_{n-1}(x) = 0, \quad n \geq 1,$$

uz start $P_0(x) = 1$, $P_1(x) = x$. Neka je $I_n(f) = \sum_{k=1}^{n} w_k f(x_k)$ pripadna Gaussova integracijska formula. Za $n \geq 0$ definiramo funkcije $q_n(y) := P_{2n+1}(\sqrt{y})/\sqrt{y}$.

(a) Pokažite da je q_n polinom stupnja n. Izvedite relaciju ortogonalnosti za polinome q_n, tj. nađite interval $[a, b]$ i težinsku funkciju w_q u pripadnom skalarnom produktu.

(b) Izvedite tročlanu rekurziju za polinome q_n.

(c) Neka je $I_n^q(f) = \sum_{k=1}^{n} v_k f(y_k)$ pripadna Gaussova integracijska formula. Izrazite čvorove y_k i težine v_k preko čvorova i težina formule I_{2n+1}.

Uputa: iskoristite parnost/neparnost.

JMBAG

IME I PREZIME

Numerička matematika — 2. kolokvij — Zadatak 5

18. lipnja 2018.

(10 bodova.) Nađite sve nultočke funkcije

$$f(x) = \ln(x) + \sqrt{x+6} - 3,$$

s točnošću $\varepsilon = 10^{-5}$.

Napomene: Duljina početnog intervala za nalaženje rješenja mora biti barem 1. Detaljno obrazložite sve tvrdnje vezane za lokaciju nultočke i ocjenu greške!

JMBAG IME I PREZIME

Numerička matematika — 2. kolokvij

18. lipnja 2018.

Upute: Na kolokviju je dozvoljeno koristiti samo pribor za pisanje i brisanje, kalkulator, te službeni šalabahter. Sva rješenja napišite isključivo na papire sa zadacima, jer jedino njih predajete. Obavezno predajte **sve** papire sa zadacima, čak i ako neke zadatke niste rješavali. Ne zaboravite se **potpisati** na svim papirima! Skice smijete raditi i na drugim papirima koje će vam dati dežurni asistent.

Izračunata rješenja (brojevi i funkcije), **bez opisa postupka kako se do njih dolazi**, odnosno, rezultati **bez odgovarajuće ocjene pogreške** koja garantira traženu točnost — **ne vrijede**, tj. donose 0 bodova!

Rezultati: nedjelja, 1. srpnja 2018., kasno navečer na webu.
Uvid u kolokvije: ponedjeljak, 2. srpnja 2018., u 11 sati.

1

Zadatak 1

(15 bodova.) Opišite ulogu ortogonalnih funkcija kod rješavanja neprekidnog problema najmanjih kvadrata.

(a) Kako definiramo težinsku L_2-normu i težinski skalarni produkt za funkcije na $[a, b]$?

(b) Kada kažemo da su dvije funkcije ortogonalne i koje svojstvo (poučak) za njih onda vrijedi?

(c) Kako iz prethodnog svojstva možemo pokazati da je ortogonalni sustav funkcija linearno nezavisan?

(d) Kakav je sustav normalnih jednadžbi za neprekidni problem najmanjih kvadrata, u slučaju kad funkcije φ_j tvore ortogonalan sustav funkcija? Kako izgleda njegovo rješenje, tj. kako glase koeficijenti a_j u aproksimaciji zadane funkcije f?

(e) U kakvom je odnosu greška $f - \varphi^{(m)}$, pri čemu je $\varphi^{(m)}(x) = \sum_{j=0}^{m} a_j \varphi_j(x)$, sa svim funkcijama φ_k? Dokažite svoju tvrdnju.

(f) Koji je nužan i dovoljan uvjet da bi greška konvergirala u nulu, kada m teži u beskonačno? Kako to vidimo iz prethodne tvrdnje?

JMBAG

IME I PREZIME

Numerička matematika — 2. kolokvij — Zadatak 2

18. lipnja 2018.

(15 bodova.) Zadana je funkcija

$$f(x) = \sqrt{2x-4}$$

na intervalu $[2, 3]$. Neprekidnom metodom najmanjih kvadrata nađite kvadratni polinom φ koji aproksimira funkciju f na zadanom intervalu s težinskom funkcijom

$$w(x) = \frac{1}{\sqrt{1-(2x-5)^2}}.$$

Napomena: Čebiševljevi polinomi prve vrste T_n su ortogonalni na $[-1, 1]$ s težinskom funkcijom $w(x) = 1/\sqrt{1-x^2}$ i vrijedi

$$\int_{-1}^{1} \frac{T_m(x)\,T_n(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \begin{cases} 0, & \text{za } m \neq n, \\ \pi, & \text{za } m = n = 0, \\ \pi/2, & \text{za } m = n \neq 0. \end{cases}$$

JMBAG

IME I PREZIME

Numerička matematika — 2. kolokvij — Zadatak 3

18. lipnja 2018.

(10 bodova.) Zadan je integral

$$\int_0^1 x^2 \operatorname{sh}(x^2)\, dx$$

i tražena točnost $\varepsilon = 0.002$. Nađite potrebne brojeve podintervala n_T i n_S za garantiranu točnost ε u produljenoj trapeznoj i produljenoj Simpsonovoj formuli. Jednom od ovih formula izračunajte približnu vrijednost zadanog integrala s točnošću ε.

Napomena: Detaljno obrazložite sve tvrdnje vezane za ocjenu greške!

JMBAG IME I PREZIME

Numerička matematika — 2. kolokvij — Zadatak 4

18. lipnja 2018.

(15 bodova.) Legendreovi polinomi P_n su ortogonalni na intervalu $[-1, 1]$ s težinskom funkcijom $w(x) = 1$. U relaciji ortogonalnosti za njih vrijedi $\|P_n\|_2^2 = 2/(2n+1)$ i zadovoljavaju rekurziju

$$(n+1)P_{n+1}(x) - (2n+1)xP_n(x) + nP_{n-1}(x) = 0, \quad n \geq 1,$$

uz start $P_0(x) = 1$, $P_1(x) = x$. Neka je $I_n(f) = \sum_{k=1}^{n} w_k f(x_k)$ pripadna Gaussova integracijska formula. Za $n \geq 0$ definiramo funkcije $r_n(y) := P_{2n}(\sqrt{y})$.

(a) Pokažite da je r_n polinom stupnja n. Izvedite relaciju ortogonalnosti za polinome r_n, tj. nađite interval $[a, b]$ i težinsku funkciju w_r u pripadnom skalarnom produktu.

(b) Izvedite tročlanu rekurziju za polinome r_n.

(c) Neka je $I_n^r(f) = \sum_{k=1}^{n} v_k f(y_k)$ pripadna Gaussova integracijska formula. Izrazite čvorove y_k i težine v_k preko čvorova i težina formule I_{2n}.

Uputa: iskoristite parnost/neparnost.

JMBAG

IME I PREZIME

Numerička matematika — 2. kolokvij — Zadatak 5

18. lipnja 2018.

(10 bodova.) Nađite sve nultočke funkcije

$$f(x) = \ln(x) + \sqrt{x + 10} - 4,$$

s točnošću $\varepsilon = 10^{-5}$.

Napomene: Duljina početnog intervala za nalaženje rješenja mora biti barem 1. Detaljno obrazložite sve tvrdnje vezane za lokaciju nultočke i ocjenu greške!

JMBAG

IME I PREZIME

NUMERIČKA MATEMATIKA — 2. KOLOKVIJ

18. lipnja 2018.

Upute: Na kolokviju je dozvoljeno koristiti samo pribor za pisanje i brisanje, kalkulator, te službeni šalabahter. Sva rješenja napišite isključivo na papire sa zadacima, jer jedino njih predajete. Obavezno predajte **sve** papire sa zadacima, čak i ako neke zadatke niste rješavali. Ne zaboravite se **potpisati** na svim papirima! Skice smijete raditi i na drugim papirima koje će vam dati dežurni asistent.

Izračunata rješenja (brojevi i funkcije), **bez opisa postupka kako se do njih dolazi**, odnosno, rezultati **bez odgovarajuće ocjene pogreške** koja garantira traženu točnost — **ne vrijede**, tj. donose 0 bodova!

Rezultati: nedjelja, 1. srpnja 2018., kasno navečer na webu.
Uvid u kolokvije: ponedjeljak, 2. srpnja 2018., u 11 sati.

1

ZADATAK 1

(15 bodova.) Opišite generaliziranu Hornerovu shemu.

(a) Za što se koristi generalizirana Hornerova shema?

(b) Što nam sve mora biti poznato da bismo mogli koristiti generaliziranu Hornerovu shemu? Detaljno navedite oblik tih potrebnih parametara.

(c) Definirajte rekurziju za koeficijente na kojoj se bazira generalizirana Hornerova shema.

(d) Temeljem rekurzije izvedite na koji način se onda može jednostavno izračunati vrijednost funkcije $f_N(x)$.

(e) Napišite oblik generalizirane Hornerove sheme za parni trigonometrijski polinom $f_N(x) = \sum_{n=0}^{N} a_n \cos(nx)$.

JMBAG IME I PREZIME

Numerička matematika — 2. kolokvij — Zadatak 2

18. lipnja 2018.

(15 bodova.) Zadana je funkcija

$$f(x) = \sqrt{2x-6}$$

na intervalu $[3, 4]$. Neprekidnom metodom najmanjih kvadrata nađite kvadratni polinom φ koji aproksimira funkciju f na zadanom intervalu s težinskom funkcijom

$$w(x) = \frac{1}{\sqrt{1-(2x-7)^2}}.$$

Napomena: Čebiševljevi polinomi prve vrste T_n su ortogonalni na $[-1, 1]$ s težinskom funkcijom $w(x) = 1/\sqrt{1-x^2}$ i vrijedi

$$\int_{-1}^{1} \frac{T_m(x)\,T_n(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \begin{cases} 0, & \text{za } m \neq n, \\ \pi, & \text{za } m = n = 0, \\ \pi/2, & \text{za } m = n \neq 0. \end{cases}$$

JMBAG IME I PREZIME

Numerička matematika — 2. kolokvij — Zadatak 3

18. lipnja 2018.

(10 bodova.) Zadan je integral

$$\int_0^1 x \operatorname{ch}(x^3)\, dx$$

i tražena točnost $\varepsilon = 0.01$. Nađite potrebne brojeve podintervala n_T i n_S za garantiranu točnost ε u produljenoj trapeznoj i produljenoj Simpsonovoj formuli. Jednom od ovih formula izračunajte približnu vrijednost zadanog integrala s točnošću ε.

Napomena: Detaljno obrazložite sve tvrdnje vezane za ocjenu greške!

JMBAG

IME I PREZIME

Numerička matematika — 2. kolokvij — Zadatak 4

18. lipnja 2018.

(15 bodova.) Čebiševljevi polinomi druge vrste U_n su ortogonalni na intervalu $[-1, 1]$ s težinskom funkcijom $w(x) = \sqrt{1-x^2}$. U relaciji ortogonalnosti za njih vrijedi $\|U_n\|_2^2 = \pi/2$ i zadovoljavaju rekurziju

$$U_{n+1}(x) - 2xU_n(x) + U_{n-1}(x) = 0, \quad n \geq 1,$$

uz start $U_0(x) = 1$, $U_1(x) = 2x$. Neka je $I_n(f) = \sum_{k=1}^{n} w_k f(x_k)$ pripadna Gaussova integracijska formula. Za $n \geq 0$ definiramo funkcije $q_n(y) := U_{2n+1}(\sqrt{y})/\sqrt{y}$.

(a) Pokažite da je q_n polinom stupnja n. Izvedite relaciju ortogonalnosti za polinome q_n, tj. nađite interval $[a, b]$ i težinsku funkciju w_q u pripadnom skalarnom produktu.

(b) Izvedite tročlanu rekurziju za polinome q_n.

(c) Neka je $I_n^q(f) = \sum_{k=1}^{n} v_k f(y_k)$ pripadna Gaussova integracijska formula. Izrazite čvorove y_k i težine v_k preko čvorova i težina formule I_{2n+1}.

Uputa: iskoristite parnost/neparnost.

JMBAG

IME I PREZIME

Numerička matematika — 2. kolokvij — Zadatak 5

18. lipnja 2018.

(10 bodova.) Nađite sve nultočke funkcije

$$f(x) = \ln(x+1) + \sqrt{x} - 2,$$

s točnošću $\varepsilon = 10^{-5}$.

Napomene: Duljina početnog intervala za nalaženje rješenja mora biti barem 1. Detaljno obrazložite sve tvrdnje vezane za lokaciju nultočke i ocjenu greške!

JMBAG

IME I PREZIME

Numerička matematika — 2. kolokvij

18. lipnja 2018.

Upute: Na kolokviju je dozvoljeno koristiti samo pribor za pisanje i brisanje, kalkulator, te službeni šalabahter. Sva rješenja napišite isključivo na papire sa zadacima, jer jedino njih predajete. Obavezno predajte **sve** papire sa zadacima, čak i ako neke zadatke niste rješavali. Ne zaboravite se **potpisati** na svim papirima! Skice smijete raditi i na drugim papirima koje će vam dati dežurni asistent.

Izračunata rješenja (brojevi i funkcije), **bez opisa postupka kako se do njih dolazi**, odnosno, rezultati **bez odgovarajuće ocjene pogreške** koja garantira traženu točnost — **ne vrijede**, tj. donose 0 bodova!

Rezultati: nedjelja, 1. srpnja 2018., kasno navečer na webu.
Uvid u kolokvije: ponedjeljak, 2. srpnja 2018., u 11 sati.

1

Zadatak 1

(15 bodova.) Opišite metodu bisekcije (raspolavljanja).

(a) Definirajte pojam reda konvergencije niza iteracija $(x_n \in \mathbb{R} \mid n \geq 0)$, koji konvergira prema broju α (nultočki neke funkcije f).

(b) Koje su startne pretpostavke za početak algoritma raspolavljanja i koje je njihovo značenje?

(c) Opišite izvođenje algoritma raspolavljanja. Pokažite da je dovoljno ispitati samo uvjet za jedan polovični interval.

(d) Izvedite ocjenu greške za metodu raspolavljanja. Koji je njezin red konvergencije? Izvedite kako možemo unaprijed odrediti koliko je koraka raspolavljanja potrebno za postizanje zadane točnosti ε? Kako glasi dinamička ocjena greške?

(e) Je li moguće naći nultočke parnog reda pomoću metode raspolavljanja? Kako se može modificirati metoda tako da može pronaći i višestruku nultočku?

JMBAG

IME I PREZIME

Numerička matematika — 2. kolokvij — Zadatak 2

18. lipnja 2018.

(15 bodova.) Zadana je funkcija

$$f(x) = \sqrt{2x-8}$$

na intervalu $[4, 5]$. Neprekidnom metodom najmanjih kvadrata nađite kvadratni polinom φ koji aproksimira funkciju f na zadanom intervalu s težinskom funkcijom

$$w(x) = \frac{1}{\sqrt{1-(2x-9)^2}}.$$

Napomena: Čebiševljevi polinomi prve vrste T_n su ortogonalni na $[-1, 1]$ s težinskom funkcijom $w(x) = 1/\sqrt{1-x^2}$ i vrijedi

$$\int_{-1}^{1} \frac{T_m(x)\, T_n(x)}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = \begin{cases} 0, & \text{za } m \neq n, \\ \pi, & \text{za } m = n = 0, \\ \pi/2, & \text{za } m = n \neq 0. \end{cases}$$

JMBAG

IME I PREZIME

Numerička matematika — 2. kolokvij — Zadatak 3

18. lipnja 2018.

(10 bodova.) Zadan je integral

$$\int_0^1 x \,\mathrm{sh}(x^3)\, dx$$

i tražena točnost $\varepsilon = 0.01$. Nađite potrebne brojeve podintervala n_T i n_S za garantiranu točnost ε u produljenoj trapeznoj i produljenoj Simpsonovoj formuli. Jednom od ovih formula izračunajte približnu vrijednost zadanog integrala s točnošću ε.

Napomena: Detaljno obrazložite sve tvrdnje vezane za ocjenu greške!

JMBAG

IME I PREZIME

Numerička matematika — 2. kolokvij — Zadatak 4

18. lipnja 2018.

(15 bodova.) Čebiševljevi polinomi druge vrste U_n su ortogonalni na intervalu $[-1, 1]$ s težinskom funkcijom $w(x) = \sqrt{1 - x^2}$. U relaciji ortogonalnosti za njih vrijedi $\|U_n\|_2^2 = \pi/2$ i zadovoljavaju rekurziju

$$U_{n+1}(x) - 2xU_n(x) + U_{n-1}(x) = 0, \quad n \geq 1,$$

uz start $U_0(x) = 1$, $U_1(x) = 2x$. Neka je $I_n(f) = \sum_{k=1}^n w_k f(x_k)$ pripadna Gaussova integracijska formula. Za $n \geq 0$ definiramo funkcije $r_n(y) := U_{2n}(\sqrt{y})$.

(a) Pokažite da je r_n polinom stupnja n. Izvedite relaciju ortogonalnosti za polinome r_n, tj. nađite interval $[a, b]$ i težinsku funkciju w_r u pripadnom skalarnom produktu.

(b) Izvedite tročlanu rekurziju za polinome r_n.

(c) Neka je $I_n^r(f) = \sum_{k=1}^n v_k f(y_k)$ pripadna Gaussova integracijska formula. Izrazite čvorove y_k i težine v_k preko čvorova i težina formule I_{2n}.

Uputa: iskoristite parnost/neparnost.

JMBAG

IME I PREZIME

Numerička matematika — 2. kolokvij — Zadatak 5

18. lipnja 2018.

(10 bodova.) Nađite sve nultočke funkcije

$$f(x) = \ln(x+4) + \sqrt{x} - 3,$$

s točnošću $\varepsilon = 10^{-5}$.

Napomene: Duljina početnog intervala za nalaženje rješenja mora biti barem 1. Detaljno obrazložite sve tvrdnje vezane za lokaciju nultočke i ocjenu greške!