JMBAG

IME I PREZIME

NUMERIČKA MATEMATIKA — 1. KOLOKVIJ

23. travnja 2018.

Upute: Na kolokviju je dozvoljeno koristiti samo pribor za pisanje i brisanje, kalkulator, te službeni šalabahter. Sva rješenja napišite isključivo na papire sa zadacima, jer jedino njih predajete. Ne zaboravite se **potpisati** na svim papirima! Skice smijete raditi i na drugim papirima koje će vam dati dežurni asistent.

Izračunata rješenja (brojevi i funkcije), **bez opisa postupka kako se do njih dolazi**, odnosno, rezultati **bez odgovarajuće ocjene pogreške** koja garantira traženu točnost — **ne vrijede**, tj. donose 0 bodova!

Rezultati: nedjelja, 29. travnja 2018., kasno navečer na webu.
Uvid u kolokvije: ponedjeljak, 30. travnja 2018., u 11 sati.

1

ZADATAK 1

(10 bodova.) Objasnite pojam greške koja se pojavljuje u numeričkoj matematici.

(a) Koje su mjere za greške, to jest, na koji način mjerimo greške?

(b) Navedite tipove grešaka, i opišite po jedan primjer za svaki od njih.

(c) Koji tip greške nastupa kada funkciju e^x aproksimiramo Taylorovim polinomom stupnja n? Kako glasi ocjena greške u tom slučaju? Ako stupanj polinoma odredimo tako da apsolutna vrijednost prvog odbačenog člana Taylorovog reda padne ispod zadane točnosti $\varepsilon > 0$, za koju mjeru greške možemo očekivati da će biti mala (reda ε)?

(d) Što po IEEE standardu vrijedi za rezultate osnovnih računskih operacija izvedenih na prikazivim operandima u računalu?

JMBAG IME I PREZIME

Numerička matematika — 1. kolokvij — Zadatak 2

23. travnja 2018.

(10 bodova.) Funkcija f zadana je sljedećim razvojem u red potencija oko nule

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-2x)^k}{(k+1)!}.$$

U zadanoj točki x, vrijednost funkcije $f(x)$ aproksimiramo tako da članove reda zbrajamo uzlazno po k, sve dok apsolutna vrijednost prvog odbačenog člana ne padne ispod zadane točnosti ε, gdje je $0 < \varepsilon \ll 1$. Ako ovo računanje provedemo u aritmetici računala, za

(a) $x_1 = -1/5$,

(b) $x_2 = 50$,

hoće li takva aproksimacija biti približno točna ili ne? Detaljno objasnite.

Ako želite naći točnu vrijednost funkcije f, preuredite zadani red u red za eksponencijalnu funkciju s odgovarajućim argumentom.

JMBAG

IME I PREZIME

Numerička matematika — 1. kolokvij — Zadatak 3

23. travnja 2018.

(10 bodova.) Zadan je linearni sustav $Ax = b$, gdje su

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 4 & -10 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 5 \\ -8 \\ 13 \end{bmatrix}.$$

Nađite LU faktorizaciju matrice A korištenjem parcijalnog pivotiranja, tj. nađite matricu permutacije P, te matrice L i U, takve da je $PA = LU$. Koristeći ovu faktorizaciju riješite zadani sustav.

JMBAG

IME I PREZIME

Numerička matematika — 1. kolokvij — Zadatak 4

23. travnja 2018.

(10 bodova.) Zadane su četiri matrice. Za svaku odredite je li ona pozitivno definitna. Detaljno obrazložite svoje odgovore. Smijete koristiti tvdnje s predavanja. Za barem jednu pozitivno definitnu matricu (od navedenih) odredite njezinu Choleskyjevu faktorizaciju.

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & -4 & 6 \\ 2 & 7 & -2 & -3 \\ -4 & -2 & 4 & -6 \\ 6 & -3 & -6 & 9 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 4 & 2 & -4 & 6 \\ 2 & 7 & -2 & -3 \\ -4 & -2 & -4 & -6 \\ 6 & -3 & -6 & 9 \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} 4 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 16 & -8 & 0 \\ -2 & -8 & 6 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 29 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 4 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 16 & -8 & 0 \\ -2 & -8 & 14 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 29 \end{bmatrix}.$$

JMBAG IME I PREZIME

Numerička matematika — 1. kolokvij — Zadatak 5

23. travnja 2018.

(10 bodova.) Funkciju

$$f(x) = (2x + 1)e^{-x}$$

aproksimiramo po dijelovima kubnom Hermiteovom interpolacijom φ na intervalu $[1, 5]$, koristeći ekvidistantnu mrežu čvorova s n podintervala. Nađite najmanji n takav da ocjena uniformne pogreške na tom intervalu ne prelazi $\varepsilon = 10^{-4}$. Za taj n, izračunajte aproksimacije za f i f' u točki $x = 2.15$ i pripadne prave pogreške.

Ocjena uniformne greške za ekvidistantnu mrežu s korakom h na $[a, b]$ ima oblik

$$\max_{x\in[a,b]} |f(x) - \varphi(x)| \leq \frac{h^4}{384} M_4, \quad M_4 = \max_{x\in[a,b]} |f^{(4)}(x)|.$$

Detaljno obrazložite tvrdnje vezane uz ocjenu greške.

JMBAG

IME I PREZIME

Numerička matematika — 1. kolokvij

23. travnja 2018.

Upute: Na kolokviju je dozvoljeno koristiti samo pribor za pisanje i brisanje, kalkulator, te službeni šalabahter. Sva rješenja napišite isključivo na papire sa zadacima, jer jedino njih predajete. Ne zaboravite se **potpisati** na svim papirima! Skice smijete raditi i na drugim papirima koje će vam dati dežurni asistent.

Izračunata rješenja (brojevi i funkcije), **bez opisa postupka kako se do njih dolazi**, odnosno, rezultati **bez odgovarajuće ocjene pogreške** koja garantira traženu točnost — **ne vrijede**, tj. donose 0 bodova!

Rezultati: nedjelja, 29. travnja 2018., kasno navečer na webu.
Uvid u kolokvije: ponedjeljak, 30. travnja 2018., u 11 sati.

1

Zadatak 1

(10 bodova.) Neka je A zadana kvadratna matrica reda n.

(a) Izračunajte složenost, to jest, broj računskih operacija za Gaussove eliminacije kod rješenja linearnog sustava $Ax = b$.

(b) Mogu li se Gaussove eliminacije provesti za svaku regularnu matricu? Zašto?

(c) Koja vrsta pivotiranja nam može pomoći u egzaktnoj aritmetici, a koja u aritmetici računala? Kako se biraju pivotni elementi u oba slučaja?

JMBAG

IME I PREZIME

Numerička matematika — 1. kolokvij — Zadatak 2

23. travnja 2018.

(10 bodova.) Funkcija f zadana je sljedećim razvojem u red potencija oko nule

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(3x)^k}{(k+2)!}.$$

U zadanoj točki x, vrijednost funkcije $f(x)$ aproksimiramo tako da članove reda zbrajamo uzlazno po k, sve dok apsolutna vrijednost prvog odbačenog člana ne padne ispod zadane točnosti ε, gdje je $0 < \varepsilon \ll 1$. Ako ovo računanje provedemo u aritmetici računala, za

(a) $x_1 = 1/10$,

(b) $x_2 = -30$,

hoće li takva aproksimacija biti približno točna ili ne? Detaljno objasnite.

Ako želite naći točnu vrijednost funkcije f, preuredite zadani red u red za eksponencijalnu funkciju s odgovarajućim argumentom.

JMBAG

IME I PREZIME

Numerička matematika — 1. kolokvij — Zadatak 3

23. travnja 2018.

(10 bodova.) Zadan je linearni sustav $Ax = b$, gdje su

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 23/2 & -2 \\ 12 & 7 & -4 \\ 3 & 23/4 & 0 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Nađite LU faktorizaciju matrice A korištenjem parcijalnog pivotiranja, tj. nađite matricu permutacije P, te matrice L i U, takve da je $PA = LU$. Koristeći ovu faktorizaciju riješite zadani sustav.

JMBAG

IME I PREZIME

Numerička matematika — 1. kolokvij — Zadatak 4

23. travnja 2018.

(10 bodova.) Zadane su četiri matrice. Za svaku odredite je li ona pozitivno definitna. Detaljno obrazložite svoje odgovore. Smijete koristiti tvdnje s predavanja. Za barem jednu pozitivno definitnu matricu (od navedenih) odredite njezinu Choleskyjevu faktorizaciju.

$$A = \begin{bmatrix} 9 & -6 & -3 & 6 \\ -6 & 4 & -2 & -4 \\ -3 & -2 & 7 & 2 \\ 6 & -4 & 2 & 4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 9 & -6 & -3 & 6 \\ -6 & -4 & -2 & -4 \\ -3 & -2 & 7 & 2 \\ 6 & -4 & 2 & 4 \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} 16 & 4 & -8 & 0 \\ 4 & 26 & -2 & -10 \\ -8 & -2 & 13 & -12 \\ 0 & -10 & -12 & 29 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 16 & 4 & -8 & 0 \\ 4 & 26 & -2 & -10 \\ -8 & -2 & 24 & -12 \\ 0 & -10 & -12 & 29 \end{bmatrix}.$$

JMBAG

IME I PREZIME

Numerička matematika — 1. kolokvij — Zadatak 5

23. travnja 2018.

(10 bodova.) Funkciju

$$f(x) = (3x - 1)e^{-x}$$

aproksimiramo po dijelovima kubnom Hermiteovom interpolacijom φ na intervalu $[2, 6]$, koristeći ekvidistantnu mrežu čvorova s n podintervala. Nađite najmanji n takav da ocjena uniformne pogreške na tom intervalu ne prelazi $\varepsilon = 10^{-4}$. Za taj n, izračunajte aproksimacije za f i f' u točki $x = 5.15$ i pripadne prave pogreške.

Ocjena uniformne greške za ekvidistantnu mrežu s korakom h na $[a, b]$ ima oblik

$$\max_{x \in [a,b]} |f(x) - \varphi(x)| \leq \frac{h^4}{384} M_4, \quad M_4 = \max_{x \in [a,b]} |f^{(4)}(x)|.$$

Detaljno obrazložite tvrdnje vezane uz ocjenu greške.

JMBAG

IME I PREZIME

NUMERIČKA MATEMATIKA — 1. KOLOKVIJ

23. travnja 2018.

Upute: Na kolokviju je dozvoljeno koristiti samo pribor za pisanje i brisanje, kalkulator, te službeni šalabahter. Sva rješenja napišite isključivo na papire sa zadacima, jer jedino njih predajete. Ne zaboravite se **potpisati** na svim papirima! Skice smijete raditi i na drugim papirima koje će vam dati dežurni asistent.

Izračunata rješenja (brojevi i funkcije), **bez opisa postupka kako se do njih dolazi**, odnosno, rezultati **bez odgovarajuće ocjene pogreške** koja garantira traženu točnost — **ne vrijede**, tj. donose 0 bodova!

Rezultati: nedjelja, 29. travnja 2018., kasno navečer na webu.
Uvid u kolokvije: ponedjeljak, 30. travnja 2018., u 11 sati.

1

ZADATAK 1

(10 bodova.) Neka je $\{x_0, \ldots, x_n\}$ zadana mreža međusobno različitih čvorova.

(a) Napišite kako izgleda Lagrangeova baza u prostoru polinoma stupnja manjeg ili jednakog n, za problem interpolacije na zadanoj mreži čvorova. Kojeg su stupnja ti bazni polinomi?

(b) Navedite osnovna svojstva te baze i njezin zapis preko polinoma čvorova. Koja je prednost tog zapisa?

(c) Opišite kako izgleda pripadna matrica linearnog sustava za problem interpolacije $p(x_i) = f_i$, za $i = 0, \ldots, n$, gdje je p polinom.

(d) Što su koeficijenti interpolacijskog polinoma zapisanog u Lagrangeovoj bazi?

(e) Navedite kardinalna svojstva odgovarajuće baze za Hermiteovu interpolaciju u tim čvorovima, slična onima za Lagrangeovu bazu kod interpolacije funkcijskih vrijednosti $p(x_i) = f_i$. Kojeg su stupnja ti bazni polinomi?

JMBAG

IME I PREZIME

Numerička matematika — 1. kolokvij — Zadatak 2

23. travnja 2018.

(10 bodova.) Funkcija f zadana je sljedećim razvojem u red potencija oko nule

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2x)^k}{(k+2)!}.$$

U zadanoj točki x, vrijednost funkcije $f(x)$ aproksimiramo tako da članove reda zbrajamo uzlazno po k, sve dok apsolutna vrijednost prvog odbačenog člana ne padne ispod zadane točnosti ε, gdje je $0 < \varepsilon \ll 1$. Ako ovo računanje provedemo u aritmetici računala, za

(a) $x_1 = 1/5$,

(b) $x_2 = -50$,

hoće li takva aproksimacija biti približno točna ili ne? Detaljno objasnite.

Ako želite naći točnu vrijednost funkcije f, preuredite zadani red u red za eksponencijalnu funkciju s odgovarajućim argumentom.

JMBAG

IME I PREZIME

Numerička matematika — 1. kolokvij — Zadatak 3

23. travnja 2018.

(10 bodova.) Zadan je linearni sustav $Ax = b$, gdje su

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 9/2 & 6 \\ 4 & 7 & 12 \\ 1 & 9/4 & 2 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Nađite LU faktorizaciju matrice A korištenjem parcijalnog pivotiranja, tj. nađite matricu permutacije P, te matrice L i U, takve da je $PA = LU$. Koristeći ovu faktorizaciju riješite zadani sustav.

JMBAG

IME I PREZIME

Numerička matematika — 1. kolokvij — Zadatak 4

23. travnja 2018.

(10 bodova.) Zadane su četiri matrice. Za svaku odredite je li ona pozitivno definitna. Detaljno obrazložite svoje odgovore. Smijete koristiti tvdnje s predavanja. Za barem jednu pozitivno definitnu matricu (od navedenih) odredite njezinu Choleskyjevu faktorizaciju.

$$A = \begin{bmatrix} 16 & 8 & -16 & 6 \\ 8 & 7 & -8 & -3 \\ -16 & -8 & 16 & -6 \\ 6 & -3 & -6 & 9 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 16 & 8 & -16 & 6 \\ 8 & 7 & -8 & -3 \\ -16 & -8 & -16 & -6 \\ 6 & -3 & -6 & 9 \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} 9 & 0 & 0 & -6 \\ 0 & 25 & -10 & 5 \\ 0 & -10 & 8 & -8 \\ -6 & 5 & -8 & 63 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 9 & 0 & 0 & -6 \\ 0 & 25 & -10 & 5 \\ 0 & -10 & 20 & -8 \\ -6 & 5 & -8 & 63 \end{bmatrix}.$$

JMBAG

IME I PREZIME

NUMERIČKA MATEMATIKA — 1. KOLOKVIJ — ZADATAK 5

23. travnja 2018.

(10 bodova.) Funkciju

$$f(x) = (3x + 1)e^{-x}$$

aproksimiramo po dijelovima kubnom Hermiteovom interpolacijom φ na intervalu $[1, 5]$, koristeći ekvidistantnu mrežu čvorova s n podintervala. Nađite najmanji n takav da ocjena uniformne pogreške na tom intervalu ne prelazi $\varepsilon = 10^{-4}$. Za taj n, izračunajte aproksimacije za f i f' u točki $x = 4.15$ i pripadne prave pogreške.

Ocjena uniformne greške za ekvidistantnu mrežu s korakom h na $[a, b]$ ima oblik

$$\max_{x\in[a,b]} |f(x) - \varphi(x)| \leq \frac{h^4}{384} M_4, \quad M_4 = \max_{x\in[a,b]} |f^{(4)}(x)|.$$

Detaljno obrazložite tvrdnje vezane uz ocjenu greške.

JMBAG

IME I PREZIME

NUMERIČKA MATEMATIKA — 1. KOLOKVIJ

23. travnja 2018.

Upute: Na kolokviju je dozvoljeno koristiti samo pribor za pisanje i brisanje, kalkulator, te službeni šalabahter. Sva rješenja napišite isključivo na papire sa zadacima, jer jedino njih predajete. Ne zaboravite se **potpisati** na svim papirima! Skice smijete raditi i na drugim papirima koje će vam dati dežurni asistent.

Izračunata rješenja (brojevi i funkcije), **bez opisa postupka kako se do njih dolazi**, odnosno, rezultati **bez odgovarajuće ocjene pogreške** koja garantira traženu točnost — **ne vrijede**, tj. donose 0 bodova!

Rezultati: nedjelja, 29. travnja 2018., kasno navečer na webu.
Uvid u kolokvije: ponedjeljak, 30. travnja 2018., u 11 sati.

1

ZADATAK 1

(10 bodova.) Neka je $x_0 < x_1 < \cdots < x_n$ zadana mreža čvorova i neka je f zadana funkcija na intervalu $[x_0, x_n]$.

(a) Što je kubična splajn interpolacija φ za funkciju f na zadanoj mreži?

(b) Koje uvjete interpolacije i glatkoće zadovoljava funkcija φ? Je li tih uvjeta dovoljno za jedinstvenost?

(c) Za svaki polinom p_k, na podintervalu $[x_{k-1}, x_k]$, napišite tablicu podijeljenih razlika i njegov Newtonov oblik.

(d) Za svaki polinom p_k izvedite njegov standardni oblik, u bazi definiranoj relativno obzirom na početnu točku podintervala.

JMBAG

IME I PREZIME

Numerička matematika — 1. kolokvij — Zadatak 2

23. travnja 2018.

(10 bodova.) Funkcija f zadana je sljedećim razvojem u red potencija oko nule

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-3x)^k}{(k+1)!}.$$

U zadanoj točki x, vrijednost funkcije $f(x)$ aproksimiramo tako da članove reda zbrajamo uzlazno po k, sve dok apsolutna vrijednost prvog odbačenog člana ne padne ispod zadane točnosti ε, gdje je $0 < \varepsilon \ll 1$. Ako ovo računanje provedemo u aritmetici računala, za

(a) $x_1 = -1/10$,

(b) $x_2 = 30$,

hoće li takva aproksimacija biti približno točna ili ne? Detaljno objasnite.

Ako želite naći točnu vrijednost funkcije f, preuredite zadani red u red za eksponencijalnu funkciju s odgovarajućim argumentom.

JMBAG

IME I PREZIME

Numerička matematika — 1. kolokvij — Zadatak 3

23. travnja 2018.

(10 bodova.) Zadan je linearni sustav $Ax = b$, gdje su

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 25/2 & 1 \\ 12 & 9 & 2 \\ 3 & 25/4 & 1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 10 \\ 20 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Nađite LU faktorizaciju matrice A korištenjem parcijalnog pivotiranja, tj. nađite matricu permutacije P, te matrice L i U, takve da je $PA = LU$. Koristeći ovu faktorizaciju riješite zadani sustav.

JMBAG

IME I PREZIME

Numerička matematika — 1. kolokvij — Zadatak 4

23. travnja 2018.

(10 bodova.) Zadane su četiri matrice. Za svaku odredite je li ona pozitivno definitna. Detaljno obrazložite svoje odgovore. Smijete koristiti tvdnje s predavanja. Za barem jednu pozitivno definitnu matricu (od navedenih) odredite njezinu Choleskyjevu faktorizaciju.

$$A = \begin{bmatrix} 9 & -6 & -3 & 6 \\ -6 & 16 & -8 & -16 \\ -3 & -8 & 7 & 8 \\ 6 & -16 & 8 & 16 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 9 & -6 & -3 & 6 \\ -6 & -16 & -8 & -16 \\ -3 & -8 & 7 & 8 \\ 6 & -16 & 8 & 16 \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} 9 & 3 & -3 & 0 \\ 3 & 17 & -1 & -8 \\ -3 & -1 & 5 & -8 \\ 0 & -8 & -8 & 36 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 9 & 3 & -3 & 0 \\ 3 & 17 & -1 & -8 \\ -3 & -1 & 15 & -8 \\ 0 & -8 & -8 & 36 \end{bmatrix}.$$

JMBAG

IME I PREZIME

Numerička matematika — 1. kolokvij — Zadatak 5

23. travnja 2018.

(10 bodova.) Funkciju

$$f(x) = (2x - 1)e^{-x}$$

aproksimiramo po dijelovima kubnom Hermiteovom interpolacijom φ na intervalu $[2, 6]$, koristeći ekvidistantnu mrežu čvorova s n podintervala. Nađite najmanji n takav da ocjena uniformne pogreške na tom intervalu ne prelazi $\varepsilon = 10^{-4}$. Za taj n, izračunajte aproksimacije za f i f' u točki $x = 3.15$ i pripadne prave pogreške.

Ocjena uniformne greške za ekvidistantnu mrežu s korakom h na $[a, b]$ ima oblik

$$\max_{x \in [a,b]} |f(x) - \varphi(x)| \leq \frac{h^4}{384} M_4, \quad M_4 = \max_{x \in [a,b]} |f^{(4)}(x)|.$$

Detaljno obrazložite tvrdnje vezane uz ocjenu greške.