JMBAG | IME I PREZIME

NUMERIČKA MATEMATIKA — POPRAVNI KOLOKVIJ

1. rujna 2017.

Upute: Na kolokviju je dozvoljeno koristiti samo pribor za pisanje i brisanje, kalkulator, te službeni šalabahter. Sva rješenja napišite isključivo na papire sa zadacima, jer jedino njih predajete. Ne zaboravite se **potpisati** na svim papirima! Skice smijete raditi i na drugim papirima koje će vam dati dežurni asistent.

Izračunata rješenja (brojevi i funkcije), **bez opisa postupka kako se do njih dolazi**, odnosno, rezultati **bez odgovarajuće ocjene pogreške** koja garantira traženu točnost — **ne vrijede**, tj. donose 0 bodova!

Rezultati: ponedjeljak, 4. rujna 2017., kasno navečer na webu.
Uvid u kolokvije: utorak, 5. rujna 2017., u 11 sati.

1

ZADATAK 1

$(10 + 10 = 20$ bodova.)

(a) Pokažite u kakvoj su vezi matrica R dobivena LR faktorizacijom i matrica R dobivena Gaussovim eliminacijama. Kako izgledaju elementi matrice L? Dokažite tvrdnju. Kako se zapisuju Gaussove eliminacije s parcijalnim pivotiranjem preko LR faktorizacije i kako se tada rješava sustav $Ax = b$? Objasnite sve matrice koje se pojavljuju u tom izrazu.

(b) Kako se određuju Newton–Cotesove formule za numeričku integraciju i iz kojih uvjeta? Koji je alternativni način njihova dobivanja? Izvedite trapeznu formulu i njezin produljeni oblik.

JMBAG

IME I PREZIME

Numerička matematika — popravni kolokvij — Zadatak 2

1. rujna 2017.

(15 bodova.) Zadan je linearni sustav $Ax = b$, gdje su

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 4.7 & -1.2 & 2.2 \\ 10 & 3 & 4 & -5 \\ -5 & 6.5 & 3 & 8.5 \\ 2.5 & -5.25 & -9.75 & -4.75 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 33.7 \\ -54 \\ 47 \\ -13.5 \end{bmatrix}.$$

Nađite LU faktorizaciju matrice A korištenjem parcijalnog pivotiranja, tj. nađite matricu permutacije P, te matrice L i U, tako da je $PA = LU$. Iz ove faktorizacije izračunajte rješenje zadanog sustava.

JMBAG

IME I PREZIME

Numerička matematika — popravni kolokvij — Zadatak 3

1. rujna 2017.

(20 bodova.)

(a) Odredite vrijednosti a, b, c i d, tako da funkcija

$$\varphi(x) = \begin{cases} -x^3 + 2x + 1, & 0 \leq x \leq 1, \\ a(x-1)^3 + b(x-1)^2 + c(x-1) + d, & 1 \leq x \leq 2, \end{cases}$$

bude prirodni kubični splajn na intervalu $[0, 2]$.

(b) Potpunim kubičnim splajnom interpoliramo funkciju

$$f(x) = \frac{1}{x+1}$$

na mreži čvorova $x_k = k + 1$, za $k = 0, \ldots, 3$. Izračunajte vrijednost tog splajna u točki $c = 2.5$ i nađite pripadnu pravu pogrešku.

JMBAG

IME I PREZIME

Numerička matematika — popravni kolokvij — Zadatak 4

1. rujna 2017.

(20 bodova.) Na vektorskom prostoru svih realnih funkcija definiranih na skupu $\{-1, -1/3, 1/3, 1\}$ zadan je diskretni težinski skalarni produkt

$$\langle f, g\rangle = f(-1)\cdot g(-1) + 2f\left(-\frac{1}{3}\right)\cdot g\left(-\frac{1}{3}\right) + 2f\left(\frac{1}{3}\right)\cdot g\left(\frac{1}{3}\right) + f(1)\cdot g(1).$$

Nađite ortogonalne polinome stupnja 0, 1 i 2, s vodećim koeficijentom jednakim 1, obzirom na ovaj skalarni produkt. **Bez računanja**, objasnite kako bi izgledao ortogonalni polinom stupnja 4 i kolika je njegova norma u ovom skalarnom produktu.

Metodom najmanjih kvadrata, uz zadani skalarni produkt, nađite najbolju aproksimaciju funkcije

$$f(x) = \sin x$$

kvadratnim polinomom oblika $\varphi(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$.

JMBAG

IME I PREZIME

Numerička matematika — popravni kolokvij — Zadatak 5

1. rujna 2017.

(20 bodova.) Zadana je težinska funkcija $w(x) = x$ i čvorovi integracije a, b, tako da je $0 \leq a < b$. Neka je $c = (a+b)/2$ polovište intervala $[a, b]$. Odredite težine w_1 i w_2 u integracijskoj formuli oblika

$$\int_a^c x f(x)\, dx \approx w_1 f(a) + w_2 f(b),$$

iz uvjeta egzaktnosti ove formule na vektorskom prostoru polinoma što je moguće većeg stupnja. Koliki je polinomni stupanj egzaktnosti ove formule? Izračunajte i izraz za grešku ove integracijske formule u terminima zadanih vrijednosti a i b.

Pomoću ove formule s čvorovima $a = 1$ i $b = 3$, izračunajte približnu vrijednost integrala

$$\int_1^2 x(x-2)^3\, dx,$$

pripadni izraz za grešku i pravu grešku.

Napomena: Bilo koji rezultati = brojevi i funkcije, prepisani s kalkulatora, bez opisa postupka kako se do njih dolazi, ne priznaju se, tj. kao da ih nema.

JMBAG IME I PREZIME

NUMERIČKA MATEMATIKA — POPRAVNI KOLOKVIJ — ZADATAK 6

1. rujna 2017.

(15 bodova.) Odredite broj nultočaka funkcije

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \operatorname{arcctg}(x) - x^3 + 7x^2 - 14x + 9.$$

Za svaku od nultočaka odredite interval duljine najviše 1/2 u kojem se ta nultočka nalazi. Tvrdnje o lokaciji nultočaka obrazložite. Izračunajte najveću od tih nultočaka s točnošću $\varepsilon = 10^{-4}$. Detaljno obrazložite ocjenu greške.

JMBAG

IME I PREZIME

Numerička matematika — popravni kolokvij

1. rujna 2017.

Upute: Na kolokviju je dozvoljeno koristiti samo pribor za pisanje i brisanje, kalkulator, te službeni šalabahter. Sva rješenja napišite isključivo na papire sa zadacima, jer jedino njih predajete. Ne zaboravite se **potpisati** na svim papirima! Skice smijete raditi i na drugim papirima koje će vam dati dežurni asistent.

Izračunata rješenja (brojevi i funkcije), **bez opisa postupka kako se do njih dolazi**, odnosno, rezultati **bez odgovarajuće ocjene pogreške** koja garantira traženu točnost — **ne vrijede**, tj. donose 0 bodova!

Rezultati: ponedjeljak, 4. rujna 2017., kasno navečer na webu.
Uvid u kolokvije: utorak, 5. rujna 2017., u 11 sati.

1

Zadatak 1

$(10 + 10 = 20$ bodova.)

(a) Objasnite kako se QR faktorizacija koristi kod rješavanja diskretnog problema najmanjih kvadrata. Izvedite cijeli postupak, od definicije matrične formulacije problema pa do zaključka za slučaj kad matrica ima puni stupčani rang. Na koja dva načina možemo izračunati QR faktorizaciju, koje elementarne ortogonalne matrice pri tome koristimo, kako se one definiraju i kako djeluju?

(b) Objasnite za što i kako se koristi generalizirana Hornerova shema. Koje svojstvo funkcija se ovdje koristi i kako? Objasnite kako se generalizirana Hornerova shema primjenjuje na trigonometrijske polinome.

JMBAG

IME I PREZIME

NUMERIČKA MATEMATIKA — POPRAVNI KOLOKVIJ — ZADATAK 2

1. rujna 2017.

(15 bodova.) Zadan je linearni sustav $Ax = b$, gdje su

$$A = \begin{bmatrix} -1.4 & -3.6 & -5.8 & -0.6 \\ -3.5 & -6 & -1.6 & -2.1 \\ 0.7 & -5.4 & 3.5 & -1.6 \\ 7 & 6 & 5 & 4 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} -0.6 \\ 15.6 \\ 4.3 \\ -7 \end{bmatrix}.$$

Nađite LU faktorizaciju matrice A korištenjem parcijalnog pivotiranja, tj. nađite matricu permutacije P, te matrice L i U, tako da je $PA = LU$. Iz ove faktorizacije izračunajte rješenje zadanog sustava.

JMBAG

IME I PREZIME

Numerička matematika — popravni kolokvij — Zadatak 3

1. rujna 2017.

(20 bodova.)

(a) Odredite vrijednosti a, b, c i d, tako da funkcija

$$\varphi(x) = \begin{cases} -x^3 - 3x^2 - x + 2, & -1 \leq x \leq 0, \\ ax^3 + bx^2 + cx + d, & 0 \leq x \leq 1, \end{cases}$$

bude prirodni kubični splajn na intervalu $[-1, 1]$.

(b) Potpunim kubičnim splajnom interpoliramo funkciju

$$f(x) = \frac{1}{2x}$$

na mreži čvorova $x_k = k + 1$, za $k = 0, \ldots, 3$. Izračunajte vrijednost tog splajna u točki $c = 2.5$ i nađite pripadnu pravu pogrešku.

JMBAG

IME I PREZIME

Numerička matematika — popravni kolokvij — Zadatak 4

1. rujna 2017.

(20 bodova.) Na vektorskom prostoru svih realnih funkcija definiranih na skupu $\{-1, -2/3, 2/3, 1\}$ zadan je diskretni težinski skalarni produkt

$$\langle f, g\rangle = 2f(-1)\cdot g(-1) + f\left(-\frac{2}{3}\right)\cdot g\left(-\frac{2}{3}\right) + f\left(\frac{2}{3}\right)\cdot g\left(\frac{2}{3}\right) + 2f(1)\cdot g(1).$$

Nađite ortogonalne polinome stupnja 0, 1 i 2, s vodećim koeficijentom jednakim 1, obzirom na ovaj skalarni produkt. **Bez računanja**, objasnite kako bi izgledao ortogonalni polinom stupnja 4 i kolika je njegova norma u ovom skalarnom produktu.

Metodom najmanjih kvadrata, uz zadani skalarni produkt, nađite najbolju aproksimaciju funkcije

$$f(x) = \operatorname{tg} x$$

kvadratnim polinomom oblika $\varphi(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$.

JMBAG

IME I PREZIME

Numerička matematika — popravni kolokvij — Zadatak 5

1. rujna 2017.

(20 bodova.) Zadana je težinska funkcija $w(x) = x$ i čvorovi integracije a, b, tako da je $0 \leq a < b$. Neka je $c = (a+b)/2$ polovište intervala $[a, b]$. Odredite težine w_1 i w_2 u integracijskoj formuli oblika

$$\int_c^b x f(x)\, dx \approx w_1 f(a) + w_2 f(b),$$

iz uvjeta egzaktnosti ove formule na vektorskom prostoru polinoma što je moguće većeg stupnja. Koliki je polinomni stupanj egzaktnosti ove formule? Izračunajte i izraz za grešku ove integracijske formule u terminima zadanih vrijednosti a i b.

Pomoću ove formule s čvorovima $a = 1$ i $b = 3$, izračunajte približnu vrijednost integrala

$$\int_2^3 x(x-3)^3\, dx,$$

pripadni izraz za grešku i pravu grešku.

Napomena: Bilo koji rezultati = brojevi i funkcije, prepisani s kalkulatora, bez opisa postupka kako se do njih dolazi, ne priznaju se, tj. kao da ih nema.

JMBAG

IME I PREZIME

NUMERIČKA MATEMATIKA — POPRAVNI KOLOKVIJ — ZADATAK 6

1. rujna 2017.

(15 bodova.) Odredite broj nultočaka funkcije

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg}(x) + x^3 + 6x^2 + 11x + 6.$$

Za svaku od nultočaka odredite interval duljine najviše 1/2 u kojem se ta nultočka nalazi. Tvrdnje o lokaciji nultočaka obrazložite. Izračunajte najveću od tih nultočaka s točnošću $\varepsilon = 10^{-4}$. Detaljno obrazložite ocjenu greške.