

NUMERIČKA MATEMATIKA — 2. KOLOKVIJ

19. lipnja 2017.

Upute: Na kolokviju je dozvoljeno koristiti samo pribor za pisanje i brisanje, kalkulator, te službeni šalabahter. Sva rješenja napišite isključivo na papire sa zadacima, jer jedino njih predajete. Ne zaboravite se **potpisati** na svim papirima! Skice smijete raditi i na drugim papirima koje će vam dati dežurni asistent.

Izračunata rješenja (brojevi i funkcije), **bez opisa postupka kako se do njih dolazi**, odnosno, rezultati **bez odgovarajuće ocjene pogreške** koja garantira traženu točnost — **ne vrijede**, tj. donose 0 bodova!

Rezultati: nedjelja, 25. lipnja 2017., kasno navečer na webu.

Uvid u kolokvije: ponedjeljak, 26. lipnja 2017., u 10 sati.

ZADATAK 1

1

(15 bodova.) Izvedite sustav normalnih jednadžbi za aproksimaciju pravcem po diskretnoj metodi najmanjih kvadrata.

- (a) Kako izgleda matrična formulacija tog problema?
- (b) Kada je matrica tog sustava regularna?
- (c) Kako znamo da se doista radi o minimalnom rješenju?
- (d) Kako znamo da smo dobro odabrali oblik aproksimacijske funkcije?

NUMERIČKA MATEMATIKA — 2. KOLOKVIJ — ZADATAK 2

19. lipnja 2017.

(15 bodova.) Zadana je funkcija

$$f(x) = 1 - |x|$$

na intervalu $[-1, 1]$. Neprekidnom metodom najmanjih kvadrata nađite funkciju oblika

$$\varphi(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$$

koja aproksimira funkciju f na zadanom intervalu s težinskom funkcijom

$$w(x) = |x|(1 - x^2).$$

Nađite maksimalnu apsolutnu pogrešku ove aproksimacije na zadanom intervalu.

NUMERIČKA MATEMATIKA — 2. KOLOKVIJ — ZADATAK 3

19. lipnja 2017.

(10 bodova.) Zadan je integral

$$\int_0^1 x \sqrt{4 - x^2} dx$$

i tražena točnost $\varepsilon = 10^{-4}$. Nađite potrebne brojeve podintervala n_T i n_S za garantiranu točnost ε u produljenoj trapeznoj i produljenoj Simpsonovoj formuli. Jednom od ovih formula izračunajte približnu vrijednost zadanog integrala s točnošću ε . Izračunajte egzaktnu vrijednost integrala i pripadnu pogrešku.

Napomena: Detaljno obrazložite sve tvrdnje vezane za ocjenu greške!

NUMERIČKA MATEMATIKA — 2. KOLOKVIJ — ZADATAK 4

19. lipnja 2017.

(10 + 5 = 15 bodova.)

- (a) Odredite čvor
- x_0
- i težinu
- w_0
- u Gaussovoj integracijskoj formuli reda 1

$$\int_0^1 e^x f(x) dx \approx w_0 f(x_0),$$

te čvor x_1 i težine w_1, w_2 u Gauss–Radauovoj integracijskoj formuli reda 2, oblika

$$\int_0^1 e^x f(x) dx \approx w_1 f(x_1) + w_2 f(1).$$

Koliki je polinomni stupanj egzaktnosti ovih formula?

Pomoću ovih formula izračunajte približne vrijednosti integrala za $f(x) = \sin x$ i nađite prave greške.

- (b) Što mora zadovoljavati polinom čvorova i što vrijedi za težinske koeficijente u Gaussovima integracijskim formulama? Što se zna o konvergenciji Gaussovih formula?

NUMERIČKA MATEMATIKA — 2. KOLOKVIJ — ZADATAK 5

19. lipnja 2017.

(10 bodova.) Nađite sva pozitivna rješenja jednadžbe

$$\cos^2 x - x^2 + x = 0,$$

s točnošću $\varepsilon = 10^{-6}$.

Napomene: Duljina početnog intervala za nalaženje rješenja mora biti barem $1/2$. Detaljno obrazložite sve tvrdnje vezane za lokaciju nultočke i ocjenu greške!

NUMERIČKA MATEMATIKA — 2. KOLOKVIJ

19. lipnja 2017.

Upute: Na kolokviju je dozvoljeno koristiti samo pribor za pisanje i brisanje, kalkulator, te službeni šalabahter. Sva rješenja napišite isključivo na papire sa zadacima, jer jedino njih predajete. Ne zaboravite se **potpisati** na svim papirima! Skice smijete raditi i na drugim papirima koje će vam dati dežurni asistent.

Izračunata rješenja (brojevi i funkcije), **bez opisa postupka kako se do njih dolazi**, odnosno, rezultati **bez odgovarajuće ocjene pogreške** koja garantira traženu točnost — **ne vrijede**, tj. donose 0 bodova!

Rezultati: nedjelja, 25. lipnja 2017., kasno navečer na webu.

Uvid u kolokvije: ponedjeljak, 26. lipnja 2017., u 10 sati.

ZADATAK 1

1

(15 bodova.) Izvedite sustav normalnih jednadžbi za linearnu neprekidnu metodu najmanjih kvadrata.

- Kako izgleda matrična formulacija tog problema?
- Koje svojstvo ima matrica tog sustava? Dokažite to svojstvo.
- Kako znamo da se doista radi o minimalnom rješenju?
- Ako funkciju f na intervalu $[0, 1]$, uz težinsku funkciju $w(x) = 1$, aproksimiramo polinomom stupnja n u standardnoj bazi, kakvu matricu sustava normalnih jednadžbi ćemo dobiti? Na kakve probleme nailazimo u tom slučaju?

NUMERIČKA MATEMATIKA — 2. KOLOKVIJ — ZADATAK 2

19. lipnja 2017.

(15 bodova.) Zadana je funkcija

$$f(x) = 1 + |x|$$

na intervalu $[-1, 1]$. Neprekidnom metodom najmanjih kvadrata nađite funkciju oblika

$$\varphi(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$$

koja aproksimira funkciju f na zadanom intervalu s težinskom funkcijom

$$w(x) = |x|(1 - x^2).$$

Nađite maksimalnu apsolutnu pogrešku ove aproksimacije na zadanom intervalu.

NUMERIČKA MATEMATIKA — 2. KOLOKVIJ — ZADATAK 3

19. lipnja 2017.

(10 bodova.) Zadan je integral

$$\int_0^1 2x \sqrt{x^2 + 3} dx$$

i tražena točnost $\varepsilon = 10^{-4}$. Nađite potrebne brojeve podintervala n_T i n_S za garantiranu točnost ε u produljenoj trapeznoj i produljenoj Simpsonovoj formuli. Jednom od ovih formula izračunajte približnu vrijednost zadanog integrala s točnošću ε . Izračunajte egzaktnu vrijednost integrala i pripadnu pogrešku.

Napomena: Detaljno obrazložite sve tvrdnje vezane za ocjenu greške!

NUMERIČKA MATEMATIKA — 2. KOLOKVIJ — ZADATAK 4

19. lipnja 2017.

(10 + 5 = 15 bodova.)

- (a) Odredite čvor
- x_0
- i težinu
- w_0
- u Gaussovoj integracijskoj formuli reda 1

$$\int_0^1 e^{-x} f(x) dx \approx w_0 f(x_0),$$

te čvor x_1 i težine w_1, w_2 u Gauss–Radauovoj integracijskoj formuli reda 2, oblika

$$\int_0^1 e^{-x} f(x) dx \approx w_1 f(x_1) + w_2 f(1).$$

Koliki je polinomni stupanj egzaktnosti ovih formula?

Pomoću ovih formula izračunajte približne vrijednosti integrala za $f(x) = \sin x$ i nađite prave greške.

- (b) Napišite iskaz teorema o karakterizaciji integracijskih formula “visokog” stupnja egzaktnosti, kad se čvorovi određuju tako da se poveća stupanj egzaktnosti formule. Koliki je maksimalni stupanj egzaktnosti? Što vrijedi za težinske koeficijente u Gaussovima integracijskim formulama?

NUMERIČKA MATEMATIKA — 2. KOLOKVIJ — ZADATAK 5

19. lipnja 2017.

(10 bodova.) Nađite sva negativna rješenja jednadžbe

$$2 \sin^2 x - x^2 - x + 2 = 0,$$

s točnošću $\varepsilon = 10^{-6}$.

Napomene: Duljina početnog intervala za nalaženje rješenja mora biti barem $1/2$. Detaljno obrazložite sve tvrdnje vezane za lokaciju nultočke i ocjenu greške!

NUMERIČKA MATEMATIKA — 2. KOLOKVIJ

19. lipnja 2017.

Upute: Na kolokviju je dozvoljeno koristiti samo pribor za pisanje i brisanje, kalkulator, te službeni šalabahter. Sva rješenja napišite isključivo na papire sa zadacima, jer jedino njih predajete. Ne zaboravite se **potpisati** na svim papirima! Skice smijete raditi i na drugim papirima koje će vam dati dežurni asistent.

Izračunata rješenja (brojevi i funkcije), **bez opisa postupka kako se do njih dolazi**, odnosno, rezultati **bez odgovarajuće ocjene pogreške** koja garantira traženu točnost — **ne vrijede**, tj. donose 0 bodova!

Rezultati: nedjelja, 25. lipnja 2017., kasno navečer na webu.

Uvid u kolokvije: ponedjeljak, 26. lipnja 2017., u 10 sati.

ZADATAK 1

1

(15 bodova.) Težinska integracijska formula ima oblik

$$\int_a^b w(x)f(x) dx = I_n(f) + E_n(f), \quad I_n(f) = \sum_{k=1}^n w_k f(x_k),$$

gdje su x_k čvorovi integracije, a w_k su težinski koeficijenti.

- Koje uvjete moraju zadovoljavati čvorovi i težinski koeficijenti da bi se radilo o Gaussovima integracijskim formulama?
- Kakvi su čvorovi, gdje su smješteni i zašto?
- Kakvi su težinski koeficijenti u tom slučaju? Za težinske koeficijente napišite izraz iz kojeg se vidi to njihovo svojstvo.
- Koji stupanj polinomne egzaktnosti postiže ova formula?
- Koja je veza Gaussove integracijske formule i interpolacije? O kojoj vrsti interpolacije se radi?

NUMERIČKA MATEMATIKA — 2. KOLOKVIJ — ZADATAK 2

19. lipnja 2017.

(15 bodova.) Zadana je funkcija

$$f(x) = 1 - |x|$$

na intervalu $[-1, 1]$. Neprekidnom metodom najmanjih kvadrata nađite funkciju oblika

$$\varphi(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$$

koja aproksimira funkciju f na zadanom intervalu s težinskom funkcijom

$$w(x) = |x|(1 + x^2).$$

Nađite maksimalnu apsolutnu pogrešku ove aproksimacije na zadanom intervalu.

NUMERIČKA MATEMATIKA — 2. KOLOKVIJ — ZADATAK 3

19. lipnja 2017.

(10 bodova.) Zadan je integral

$$\int_0^1 x \sqrt{x^2 + 2} dx$$

i tražena točnost $\varepsilon = 10^{-4}$. Nađite potrebne brojeve podintervala n_T i n_S za garantiranu točnost ε u produljenoj trapeznoj i produljenoj Simpsonovoj formuli. Jednom od ovih formula izračunajte približnu vrijednost zadanog integrala s točnošću ε . Izračunajte egzaktnu vrijednost integrala i pripadnu pogrešku.

Napomena: Detaljno obrazložite sve tvrdnje vezane za ocjenu greške!

NUMERIČKA MATEMATIKA — 2. KOLOKVIJ — ZADATAK 4

19. lipnja 2017.

(10 + 5 = 15 bodova.)

- (a) Odredite čvor
- x_0
- i težinu
- w_0
- u Gaussovoj integracijskoj formuli reda 1

$$\int_{-1}^1 e^x f(x) dx \approx w_0 f(x_0),$$

te čvor x_1 i težine w_1, w_2 u Gauss–Radauovoj integracijskoj formuli reda 2, oblika

$$\int_{-1}^1 e^x f(x) dx \approx w_1 f(x_1) + w_2 f(1).$$

Koliki je polinomni stupanj egzaktnosti ovih formula?

Pomoću ovih formula izračunajte približne vrijednosti integrala za $f(x) = \cos x$ i nađite prave greške.

- (b) Napišite iskaz teorema o karakterizaciji interpolacijskih integracijskih formula (kod kojih možemo uzeti da su čvorovi unaprijed zadani, kao kod Newton–Cotesovih formula). Što vrijedi za težinske koeficijente u interpolacijskim integracijskim formulama? Jesu li ti koeficijenti uvijek pozitivni? Moraju li ove formule uvijek konvergirati kad broj čvorova raste?

NUMERIČKA MATEMATIKA — 2. KOLOKVIJ — ZADATAK 5

19. lipnja 2017.

(10 bodova.) Nađite sva pozitivna rješenja jednadžbe

$$2 \cos^2 x - 2x^2 - x + 1 = 0,$$

s točnošću $\varepsilon = 10^{-6}$.

Napomene: Duljina početnog intervala za nalaženje rješenja mora biti barem $1/2$. Detaljno obrazložite sve tvrdnje vezane za lokaciju nultočke i ocjenu greške!

NUMERIČKA MATEMATIKA — 2. KOLOKVIJ

19. lipnja 2017.

Upute: Na kolokviju je dozvoljeno koristiti samo pribor za pisanje i brisanje, kalkulator, te službeni šalabahter. Sva rješenja napišite isključivo na papire sa zadacima, jer jedino njih predajete. Ne zaboravite se **potpisati** na svim papirima! Skice smijete raditi i na drugim papirima koje će vam dati dežurni asistent.

Izračunata rješenja (brojevi i funkcije), **bez opisa postupka kako se do njih dolazi**, odnosno, rezultati **bez odgovarajuće ocjene pogreške** koja garantira traženu točnost — **ne vrijede**, tj. donose 0 bodova!

Rezultati: nedjelja, 25. lipnja 2017., kasno navečer na webu.

Uvid u kolokvije: ponedjeljak, 26. lipnja 2017., u 10 sati.

ZADATAK 1

1

(15 bodova.)

- (a) Koja je veza između iterativnih metoda za nalaženje nultočke funkcije f i jednostavnih iteracijskih funkcija φ ?
- (b) Što je rješenje funkcijskih iteracija?
- (c) Koje uvjete mora zadovoljavati funkcija φ da bi metoda funkcijskih iteracija imala red konvergencije (barem) p ?
- (d) Pokažite da Newtonova metoda u okolini jednostruke nultočke ima red konvergencije barem 2.
- (e) U kojem slučaju Newtonova metoda može imati i veći red konvergencije od 2? Dokažite tvrdnju.

NUMERIČKA MATEMATIKA — 2. KOLOKVIJ — ZADATAK 2

19. lipnja 2017.

(15 bodova.) Zadana je funkcija

$$f(x) = 1 + |x|$$

na intervalu $[-1, 1]$. Neprekidnom metodom najmanjih kvadrata nađite funkciju oblika

$$\varphi(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$$

koja aproksimira funkciju f na zadanom intervalu s težinskom funkcijom

$$w(x) = |x|(1 + x^2).$$

Nađite maksimalnu apsolutnu pogrešku ove aproksimacije na zadanom intervalu.

NUMERIČKA MATEMATIKA — 2. KOLOKVIJ — ZADATAK 3

19. lipnja 2017.

(10 bodova.) Zadan je integral

$$\int_0^1 3x \sqrt{6-x^2} dx$$

i tražena točnost $\varepsilon = 10^{-4}$. Nađite potrebne brojeve podintervala n_T i n_S za garantiranu točnost ε u produljenoj trapeznoj i produljenoj Simpsonovoj formuli. Jednom od ovih formula izračunajte približnu vrijednost zadanog integrala s točnošću ε . Izračunajte egzaktnu vrijednost integrala i pripadnu pogrešku.

Napomena: Detaljno obrazložite sve tvrdnje vezane za ocjenu greške!

NUMERIČKA MATEMATIKA — 2. KOLOKVIJ — ZADATAK 4

19. lipnja 2017.

(10 + 5 = 15 bodova.)

- (a) Odredite čvor
- x_0
- i težinu
- w_0
- u Gaussovoj integracijskoj formuli reda 1

$$\int_{-1}^1 e^{-x} f(x) dx \approx w_0 f(x_0),$$

te čvor x_1 i težine w_1, w_2 u Gauss-Radauovoj integracijskoj formuli reda 2, oblika

$$\int_{-1}^1 e^{-x} f(x) dx \approx w_1 f(x_1) + w_2 f(1).$$

Koliki je polinomni stupanj egzaktnosti ovih formula?

Pomoću ovih formula izračunajte približne vrijednosti integrala za $f(x) = \cos x$ i nađite prave greške.

- (b) Neka je
- $\{p_n \mid n \geq 0\}$
- niz ortogonalnih polinoma obzirom na integralni skalarni produkt definiran težinskom funkcijom
- $w \geq 0$
- na intervalu
- $[a, b]$
- , gdje je
- p_n
- polinom stupnja
- n
- . Kako izgleda tročlana rekurzija za polinome
- p_n
- ? Što se zna o nultočkama ortogonalnog polinoma
- p_n
- i koje to veze ima s Gaussovima integracijskim formulama?

NUMERIČKA MATEMATIKA — 2. KOLOKVIJ — ZADATAK 5

19. lipnja 2017.

(10 bodova.) Nađite sva negativna rješenja jednadžbe

$$\sin^2 x - x^2 + x + 6 = 0,$$

s točnošću $\varepsilon = 10^{-6}$.

Napomene: Duljina početnog intervala za nalaženje rješenja mora biti barem 1/2. Detaljno obrazložite sve tvrdnje vezane za lokaciju nultočke i ocjenu greške!