JMBAG

IME I PREZIME

Numerička matematika — 1. kolokvij

18. travnja 2016.

Upute: Na kolokviju je dozvoljeno koristiti samo pribor za pisanje i brisanje, neprogramabilni kalkulator, te službeni šalabahter. Sva rješenja napišite isključivo na papire sa zadacima, jer jedino njih predajete. Ne zaboravite se **potpisati** na svim papirima! Skice smijete raditi i na drugim papirima koje će vam dati dežurni asistent.

Rezultati: četvrtak, 21. travnja 2016., kasno navečer na webu.
Uvid u kolokvije: petak, 22. travnja 2016., u 12 sati.

1

Zadatak 1

(10 bodova.) Neka je $x_0 < x_1 < \cdots < x_n$ zadana mreža čvorova i neka je f zadana funkcija na intervalu $[x_0, x_n]$.

(a) Napišite definiciju **linearne splajn** interpolacije za funkciju f na zadanoj mreži. Koje uvjete interpolacije i glatkoće zadovoljava ova interpolacija? Mora li uvijek postojati i je li jedinstvena?

(b) Ukratko komentirajte je li linearna splajn interpolacija lokalna ili ne.

(c) Uz koje uvjete na mreže čvorova dobivamo uniformnu konvergenciju linearne splajn interpolacije prema funkciji f? Kojeg reda je konvergencija za dovoljno glatke funkcije f?

JMBAG

IME I PREZIME

Numerička matematika — 1. kolokvij — Zadatak 2

18. travnja 2016.

(10 bodova.) Zadana je funkcija $f(q) =$ veće rješenje kvadratne jednadžbe

$$x^2 - 8x + q = 0,$$

gdje je q realni parametar, a funkciju f promatramo na prirodnoj domeni, kad zadana jednadžba ima bar jedno realno rješenje ("veće" rješenje znači da uzimamo predznak + pred korijenom). Promatramo uvjetovanost funkcije f za **male** promjene parametra q oko neke vrijednosti q_0 iz domene.

(a) Napišite izraze za apsolutnu i relativnu uvjetovanost funkcije f u točki q_0. Za koje vrijednosti q_0 je računanje vrijednosti $f(q_0)$ stabilno u apsolutnom, odnosno, u relativnom smislu, a za koje vrijednosti je nestabilno?

(b) Izračunajte apsolutnu i relativnu uvjetovanost funkcije f u točkama $q_0 = 12$ i $q_0 = 15.98$.

JMBAG IME I PREZIME

Numerička matematika — 1. kolokvij — Zadatak 3

18. travnja 2016.

(10 bodova.) Zadan je linearni sustav $Ax = b$, gdje su

$$A = \begin{bmatrix} 8 & 6 & 10 & -4 \\ 4 & 2 & 2 & -7 \\ -4 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 7 & 7 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} -30 \\ -20 \\ 7 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Za matricu A, nađite LR faktorizaciju s parcijalnim pivotiranjem, tj. nađite matricu permutacije P, te matrice L i R, takve da je $PA = LR$. Iz ove faktorizacije izračunajte rješenje zadanog sustava.

JMBAG

IME I PREZIME

Numerička matematika — 1. kolokvij — Zadatak 4

18. travnja 2016.

(10 bodova.) Definirajte pojam pozitivne definitnosti matrice. Zadana je matrica

$$A(x) = \begin{bmatrix} 9 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & x & 0 \\ 0 & x & 9 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

gdje je x realni parametar. Nađite sve vrijednosti x za koje je $A(x)$ pozitivno definitna matrica i izračunajte pripadnu faktorizaciju Choleskog matrice $A(x)$. Detaljno argumentirajte koje tvdnje koristite za rješenje zadatka.

JMBAG

IME I PREZIME

Numerička matematika — 1. kolokvij — Zadatak 5

18. travnja 2016.

(10 bodova.) U čvorovima x_0, $x_1 = x_0 + 3h$, $x_2 = x_0 + 4h$, gdje je $h > 0$, zadani su sljedeći podaci o funkciji f

$$f(x_0),\ f'(x_0),\ f(x_1),\ f(x_2),$$

tj. x_0 je dvostruki čvor. Neka je p_3 polinom stupnja najviše 3, koji interpolira ove zadane podatke.

(a) Ukratko argumentirajte postoji li jedinstveni polinom p_3.

(b) Prvu derivaciju $f'(x_1)$ aproksimiramo prvom derivacijom $p_3'(x_1)$. Nađite ovu aproksimaciju i zapišite ju kao linearnu kombinaciju $f'(x_0)$ i **prvih** podijeljenih razlika funkcije f u **susjednim** čvorovima mreže.

(c) Zadana je funkcija

$$f(x) = \sin x.$$

Za početni čvor $x_0 = 0$ i $h = \pi/8$, izračunajte (u decimalnim brojevima) opisanu aproksimaciju za $f'(x_1)$ i pripadnu pravu pogrešku.

JMBAG IME I PREZIME

Numerička matematika — 1. kolokvij

18. travnja 2016.

Upute: Na kolokviju je dozvoljeno koristiti samo pribor za pisanje i brisanje, neprogramabilni kalkulator, te službeni šalabahter. Sva rješenja napišite isključivo na papire sa zadacima, jer jedino njih predajete. Ne zaboravite se **potpisati** na svim papirima! Skice smijete raditi i na drugim papirima koje će vam dati dežurni asistent.

Rezultati: četvrtak, 21. travnja 2016., kasno navečer na webu.
Uvid u kolokvije: petak, 22. travnja 2016., u 12 sati.

1

Zadatak 1

(10 bodova.) Neka je A kvadratna matrica reda n.

(a) Napišite definiciju (stroge) **dijagonalne dominantnosti** po stupcima matrice A.

(b) Što vrijedi za takve matrice u Gaussovim eliminacijama bez pivotiranja i je li potrebno parcijalno pivotiranje? Ukratko obrazložite. Koliko velik može biti pivotni rast?

(c) Što vrijedi za elemente matrice L u LR faktorizaciji takve matrice A bez pivotiranja, odnosno, s parcijalnim pivotiranjem?

(d) Navedite primjer numeričkog problema koji se rješava linearnim sustavom s dijagonalno dominantnom matricom (po recima ili po stupcima).

JMBAG

IME I PREZIME

Numerička matematika — 1. kolokvij — Zadatak 2

18. travnja 2016.

(10 bodova.) Zadana je funkcija $f(p) =$ veće rješenje kvadratne jednadžbe

$$x^2 + px + 9 = 0,$$

gdje je p realni parametar, a funkciju f promatramo na prirodnoj domeni, kad zadana jednadžba ima bar jedno realno rješenje ("veće" rješenje znači da uzimamo predznak + pred korijenom). Promatramo uvjetovanost funkcije f za **male** promjene parametra p oko neke vrijednosti p_0 iz domene.

(a) Napišite izraze za apsolutnu i relativnu uvjetovanost funkcije f u točki p_0. Za koje vrijednosti p_0 je računanje vrijednosti $f(p_0)$ stabilno u apsolutnom, odnosno, u relativnom smislu, a za koje vrijednosti je nestabilno?

(b) Izračunajte apsolutnu i relativnu uvjetovanost funkcije f u točkama $p_0 = 10$ i $p_0 = 6.01$.

JMBAG

IME I PREZIME

Numerička matematika — 1. kolokvij — Zadatak 3

18. travnja 2016.

(10 bodova.) Zadan je linearni sustav $Ax = b$, gdje su

$$A = \begin{bmatrix} -4 & 3 & 2 & 1 \\ 12 & 9 & -3 & 3 \\ 4 & 0 & -7 & 2 \\ 8 & 5 & 7 & 1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} -9 \\ 30 \\ 11 \\ 12 \end{bmatrix}.$$

Za matricu A, nađite LR faktorizaciju s parcijalnim pivotiranjem, tj. nađite matricu permutacije P, te matrice L i R, takve da je $PA = LR$. Iz ove faktorizacije izračunajte rješenje zadanog sustava.

JMBAG

IME I PREZIME

Numerička matematika — 1. kolokvij — Zadatak 4

18. travnja 2016.

(10 bodova.) Definirajte pojam pozitivne definitnosti matrice. Zadana je matrica

$$A(x) = \begin{bmatrix} 4 & 8 & 0 & 0 \\ 8 & 25 & x & 0 \\ 0 & x & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix},$$

gdje je x realni parametar. Nađite sve vrijednosti x za koje je $A(x)$ pozitivno definitna matrica i izračunajte pripadnu faktorizaciju Choleskog matrice $A(x)$. Detaljno argumentirajte koje tvdnje koristite za rješenje zadatka.

JMBAG

IME I PREZIME

Numerička matematika — 1. kolokvij — Zadatak 5

18. travnja 2016.

(10 bodova.) U čvorovima x_0, $x_1 = x_0 + h$, $x_2 = x_0 + 4h$, gdje je $h > 0$, zadani su sljedeći podaci o funkciji f

$$f(x_0),\ f'(x_0),\ f(x_1),\ f(x_2),$$

tj. x_0 je dvostruki čvor. Neka je p_3 polinom stupnja najviše 3, koji interpolira ove zadane podatke.

(a) Ukratko argumentirajte postoji li jedinstveni polinom p_3.

(b) Drugu derivaciju $f''(x_1)$ aproksimiramo drugom derivacijom $p_3''(x_1)$. Nađite ovu aproksimaciju i zapišite ju kao linearnu kombinaciju **drugih** podijeljenih razlika funkcije f u **susjednim** čvorovima mreže.

(c) Zadana je funkcija

$$f(x) = \cos x$$

Za početni čvor $x_0 = 0$ i $h = \pi/8$, izračunajte (u decimalnim brojevima) opisanu aproksimaciju za $f''(x_1)$ i pripadnu pravu pogrešku.

JMBAG

IME I PREZIME

Numerička matematika — 1. kolokvij

18. travnja 2016.

Upute: Na kolokviju je dozvoljeno koristiti samo pribor za pisanje i brisanje, neprogramabilni kalkulator, te službeni šalabahter. Sva rješenja napišite isključivo na papire sa zadacima, jer jedino njih predajete. Ne zaboravite se **potpisati** na svim papirima! Skice smijete raditi i na drugim papirima koje će vam dati dežurni asistent.

Rezultati: četvrtak, 21. travnja 2016., kasno navečer na webu.
Uvid u kolokvije: petak, 22. travnja 2016., u 12 sati.

1

Zadatak 1

(10 bodova.) Neka je T_n **Čebiševljev** polinom prve vrste, za $n \geq 0$.

(a) Napišite definiciju polinoma T_n i navedite neka osnovna svojstva tih polinoma.

(b) Iskažite teorem o "minimalnom otklonu od nule".

(c) Opišite primjenu tog teorema na izbor čvorova kod interpolacije polinomom. Precizno argumentirajte što je "optimalno" kod takvog izbora čvorova.

JMBAG

IME I PREZIME

Numerička matematika — 1. kolokvij — Zadatak 2

18. travnja 2016.

(10 bodova.) Zadana je funkcija $f(q) =$ veće rješenje kvadratne jednadžbe

$$x^2 - 6x + q = 0,$$

gdje je q realni parametar, a funkciju f promatramo na prirodnoj domeni, kad zadana jednadžba ima bar jedno realno rješenje ("veće" rješenje znači da uzimamo predznak + pred korijenom). Promatramo uvjetovanost funkcije f za **male** promjene parametra q oko neke vrijednosti q_0 iz domene.

(a) Napišite izraze za apsolutnu i relativnu uvjetovanost funkcije f u točki q_0. Za koje vrijednosti q_0 je računanje vrijednosti $f(q_0)$ stabilno u apsolutnom, odnosno, u relativnom smislu, a za koje vrijednosti je nestabilno?

(b) Izračunajte apsolutnu i relativnu uvjetovanost funkcije f u točkama $q_0 = 5$ i $q_0 = 8.99$.

JMBAG

IME I PREZIME

Numerička matematika — 1. kolokvij — Zadatak 3

18. travnja 2016.

(10 bodova.) Zadan je linearni sustav $Ax = b$, gdje su

$$A = \begin{bmatrix} 10 & 20 & 15 & -5 \\ 2 & 5 & 6 & -3 \\ -2 & 6 & -8 & 1 \\ 5 & 5 & 3 & 2 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} -55 \\ -20 \\ -4 \\ -4 \end{bmatrix}.$$

Za matricu A, nađite LR faktorizaciju s parcijalnim pivotiranjem, tj. nađite matricu permutacije P, te matrice L i R, takve da je $PA = LR$. Iz ove faktorizacije izračunajte rješenje zadanog sustava.

JMBAG

IME I PREZIME

Numerička matematika — 1. kolokvij — Zadatak 4

18. travnja 2016.

(10 bodova.) Definirajte pojam pozitivne definitnosti matrice. Zadana je matrica

$$A(x) = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & x & 0 \\ 0 & x & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix},$$

gdje je x realni parametar. Nađite sve vrijednosti x za koje je $A(x)$ pozitivno definitna matrica i izračunajte pripadnu faktorizaciju Choleskog matrice $A(x)$. Detaljno argumentirajte koje tvdnje koristite za rješenje zadatka.

JMBAG

IME I PREZIME

Numerička matematika — 1. kolokvij — Zadatak 5

18. travnja 2016.

(10 bodova.) U čvorovima x_0, $x_1 = x_0 + 3h$, $x_2 = x_0 + 4h$, gdje je $h > 0$, zadani su sljedeći podaci o funkciji f

$$f(x_0),\ f'(x_0),\ f(x_1),\ f(x_2),$$

tj. x_0 je dvostruki čvor. Neka je p_3 polinom stupnja najviše 3, koji interpolira ove zadane podatke.

(a) Ukratko argumentirajte postoji li jedinstveni polinom p_3.

(b) Drugu derivaciju $f''(x_2)$ aproksimiramo drugom derivacijom $p_3''(x_2)$. Nađite ovu aproksimaciju i zapišite ju kao linearnu kombinaciju **drugih** podijeljenih razlika funkcije f u **susjednim** čvorovima mreže.

(c) Zadana je funkcija

$$f(x) = \sin x.$$

Za početni čvor $x_0 = 0$ i $h = \pi/8$, izračunajte (u decimalnim brojevima) opisanu aproksimaciju za $f''(x_2)$ i pripadnu pravu pogrešku.

JMBAG | IME I PREZIME

Numerička matematika — 1. kolokvij

18. travnja 2016.

Upute: Na kolokviju je dozvoljeno koristiti samo pribor za pisanje i brisanje, neprogramabilni kalkulator, te službeni šalabahter. Sva rješenja napišite isključivo na papire sa zadacima, jer jedino njih predajete. Ne zaboravite se **potpisati** na svim papirima! Skice smijete raditi i na drugim papirima koje će vam dati dežurni asistent.

Rezultati: četvrtak, 21. travnja 2016., kasno navečer na webu.
Uvid u kolokvije: petak, 22. travnja 2016., u 12 sati.

1

Zadatak 1

(10 bodova.) Neka je A kvadratna matrica reda n.

(a) Napišite iskaz teorema o egzistenciji i jedinstvenosti **LR faktorizacije** za matricu A. Ukratko komentirajte što se događa ako bitni uvjeti teorema nisu ispunjeni.

(b) Koliko veliki mogu biti elementi u matricama L i R, bez pivotiranja, a koliko s parcijalnim pivotiranjem (uz pretpostavku da odgovarajuća faktorizacija postoji)?

(c) Što je pivotni rast (ili faktor rasta) u Gaussovim eliminacijama? Koliko velik može biti pivotni rast u Gaussovim eliminacijama bez pivotiranja, a koliko s parcijalnim pivotiranjem?

JMBAG

IME I PREZIME

Numerička matematika — 1. kolokvij — Zadatak 2

18. travnja 2016.

(10 bodova.) Zadana je funkcija $f(p) =$ veće rješenje kvadratne jednadžbe

$$x^2 + px + 16 = 0,$$

gdje je p realni parametar, a funkciju f promatramo na prirodnoj domeni, kad zadana jednadžba ima bar jedno realno rješenje ("veće" rješenje znači da uzimamo predznak + pred korijenom). Promatramo uvjetovanost funkcije f za **male** promjene parametra p oko neke vrijednosti p_0 iz domene.

(a) Napišite izraze za apsolutnu i relativnu uvjetovanost funkcije f u točki p_0. Za koje vrijednosti p_0 je računanje vrijednosti $f(p_0)$ stabilno u apsolutnom, odnosno, u relativnom smislu, a za koje vrijednosti je nestabilno?

(b) Izračunajte apsolutnu i relativnu uvjetovanost funkcije f u točkama $p_0 = 10$ i $p_0 = 8.02$.

JMBAG

IME I PREZIME

Numerička matematika — 1. kolokvij — Zadatak 3

18. travnja 2016.

(10 bodova.) Zadan je linearni sustav $Ax = b$, gdje su

$$A = \begin{bmatrix} -4 & 3 & -14 & -1 \\ 2 & 11 & -1 & 0 \\ 6 & 5 & 8 & -9 \\ 12 & 6 & 24 & -6 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} -37 \\ -22 \\ 21 \\ 54 \end{bmatrix}.$$

Za matricu A, nađite LR faktorizaciju s parcijalnim pivotiranjem, tj. nađite matricu permutacije P, te matrice L i R, takve da je $PA = LR$. Iz ove faktorizacije izračunajte rješenje zadanog sustava.

JMBAG

IME I PREZIME

Numerička matematika — 1. kolokvij — Zadatak 4

18. travnja 2016.

(10 bodova.) Definirajte pojam pozitivne definitnosti matrice. Zadana je matrica

$$A(x) = \begin{bmatrix} 9 & 6 & 0 & 0 \\ 6 & 8 & x & 0 \\ 0 & x & 9 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix},$$

gdje je x realni parametar. Nađite sve vrijednosti x za koje je $A(x)$ pozitivno definitna matrica i izračunajte pripadnu faktorizaciju Choleskog matrice $A(x)$. Detaljno argumentirajte koje tvdnje koristite za rješenje zadatka.

JMBAG

IME I PREZIME

Numerička matematika — 1. kolokvij — Zadatak 5

18. travnja 2016.

(10 bodova.) U čvorovima x_0, $x_1 = x_0 + h$, $x_2 = x_0 + 4h$, gdje je $h > 0$, zadani su sljedeći podaci o funkciji f

$$f(x_0),\ f'(x_0),\ f(x_1),\ f(x_2),$$

tj. x_0 je dvostruki čvor. Neka je p_3 polinom stupnja najviše 3, koji interpolira ove zadane podatke.

(a) Ukratko argumentirajte postoji li jedinstveni polinom p_3.

(b) Prvu derivaciju $f'(x_2)$ aproksimiramo prvom derivacijom $p_3'(x_2)$. Nađite ovu aproksimaciju i zapišite ju kao linearnu kombinaciju $f'(x_0)$ i **prvih** podijeljenih razlika funkcije f u **susjednim** čvorovima mreže.

(c) Zadana je funkcija

$$f(x) = \cos x$$

Za početni čvor $x_0 = 0$ i $h = \pi/8$, izračunajte (u decimalnim brojevima) opisanu aproksimaciju za $f'(x_2)$ i pripadnu pravu pogrešku.