JMBAG IME I PREZIME

# NUMERIČKA MATEMATIKA — 1. KOLOKVIJ

24. travnja 2015.

**Upute**: Na kolokviju je dozvoljeno koristiti samo pribor za pisanje i brisanje, neprogramabilni kalkulator, te službeni šalabahter. Sva rješenja napišite isključivo na papire sa zadacima, jer jedino njih predajete. Ne zaboravite se **potpisati** na svim papirima! Skice smijete raditi i na drugim papirima koje će vam dati dežurni asistent.

**Rezultati**: srijeda, 29. travnja 2015., kasno navečer na webu.
**Uvid u kolokvije**: četvrtak, 30. travnja 2015., u 13 sati.

1

## ZADATAK 1

(10 bodova.) Neka je $x_0 < x_1 < \cdots < x_n$ zadana mreža čvorova i neka je $f$ zadana funkcija na intervalu $[x_0, x_n]$.

(a) Što je **po dijelovima kubična Hermiteova** interpolacija $\varphi$ za funkciju $f$ na zadanoj mreži i koje uvjete interpolacije i glatkoće zadovoljava?

(b) Mora li ova interpolacija uvijek postojati i je li jedinstvena? Ukratko argumentirajte odgovor.

(c) Ukratko komentirajte je li ova interpolacija lokalna ili ne.

(d) Koliko je aritmetičkih operacija potrebno za nalaženje svih parametara funkcije $\varphi$, a koliko za računanje njezine vrijednosti u nekoj točki? Dovoljno je navesti samo red veličine, a ne točan broj.

(e) Kako se ponaša konvergencija prema funkciji $f$ i njezinim derivacijama, u ovisnosti o mrežama čvorova?

JMBAG

IME I PREZIME

# Numerička matematika — 1. kolokvij — Zadatak 2

24. travnja 2015.

$(8 + 2 = 10$ bodova.)

(a) Nađite matrice $P$, $L$ i $U$ koje realiziraju LU faktorizaciju matrice $A$ s parcijalnim pivotiranjem, ako je

$$A = \begin{bmatrix} 8 & 16 & -4 & 16 \\ -2 & -3 & 1 & -9 \\ 0 & 2 & 10 & -6 \\ 2 & 4 & 7 & -4 \end{bmatrix}.$$

(b) Pretpostavimo da matrica $A$, reda $n$, ima LU faktorizaciju bez pivotiranja. Koliko veliki mogu biti elementi u matricama $L$ i $U$?

JMBAG

IME I PREZIME

# Numerička matematika — 1. kolokvij — Zadatak 3

24. travnja 2015.

($8 + 2 = 10$ bodova.)

(a) Korištenjem faktorizacije Choleskog riješite linearni sustav $Ax = b$, gdje su

$$A = \begin{bmatrix} 25 & 20 & 25 & 25 \\ 20 & 17 & 25 & 23 \\ 25 & 25 & 51 & 45 \\ 25 & 23 & 45 & 60 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 45 \\ 37 \\ 50 \\ 48 \end{bmatrix}.$$

(b) Neka je $A$ simetrična matrica reda $n$. Mora li $A$ imati $LDL^T$ faktorizaciju, gdje je $D$ dijagonalna matrica? Ako $A$ ima $LDL^T$ faktorizaciju, mora li onda imati i faktorizaciju Choleskog? A obratno?

JMBAG

IME I PREZIME

# Numerička matematika — 1. kolokvij — Zadatak 4

24. travnja 2015.

(10 bodova.) Zadana je funkcija

$$f(x) = e^{-x} .$$

(a) Odredite korak $h$ uz koji uniformna pogreška interpolacijskog polinoma na ekvidistantnoj mreži $\{kh, k = 0, 1, 2, 3\}$ nije veća od $\varepsilon = 0.25$.

(b) Odredite broj čvorova za koji je uniformna pogreška interpolacije funkcije $f$ po dijelovima linearnom funkcijom na ekvidistantnoj mreži intervala $[0, 3h]$ manja ili jednaka od $\varepsilon = 0.25$ ($h$ je dobiven u (a) dijelu zadatka).

(c) Nađite interpolacijski polinom za funkciju $f$ na Čebiševljevoj mreži s 4 čvora na intervalu $[0, 3]$. Ocijenite grešku interpolacije u točki 0.5 i nađite pravu grešku u toj točki.

JMBAG

IME I PREZIME

# Numerička matematika — 1. kolokvij — Zadatak 5

24. travnja 2015.

(10 bodova.) Zadana je funkcija

$$f(x) = \sin\left(\frac{3\pi}{2}x\right)$$

i vrijednosti $f(0)$, $f(1)$, $f''(1)$, $f(2)$. Postoji li interpolacijski polinom stupnja najviše 3, za zadane vrijednosti u zadanim točkama? Ako postoji, nađite ga. Ako ne postoji, dodajte potreban uvjet interpolacije u nekom od zadanih čvorova, koji (bez provjere) garantira postojanje i jedinstvenost interpolacijskog polinoma stupnja najviše 4, ukratko argumentirajte zašto provjera nije potrebna i nađite takav polinom.

JMBAG                                IME I PREZIME

# Numerička matematika — 1. kolokvij

24. travnja 2015.

**Upute**: Na kolokviju je dozvoljeno koristiti samo pribor za pisanje i brisanje, neprogramabilni kalkulator, te službeni šalabahter. Sva rješenja napišite isključivo na papire sa zadacima, jer jedino njih predajete. Ne zaboravite se **potpisati** na svim papirima! Skice smijete raditi i na drugim papirima koje će vam dati dežurni asistent.

**Rezultati**: srijeda, 29. travnja 2015., kasno navečer na webu.
**Uvid u kolokvije**: četvrtak, 30. travnja 2015., u 13 sati.

1

## Zadatak 1

(10 bodova.) Neka je $x_0 < x_1 < \cdots < x_n$ zadana mreža čvorova i neka je $f$ zadana funkcija na intervalu $[x_0, x_n]$.

(a) Što je **potpuna kubična splajn** interpolacija $\varphi$ za funkciju $f$ na zadanoj mreži i koje uvjete interpolacije i glatkoće zadovoljava?

(b) Mora li ova interpolacija uvijek postojati i je li jedinstvena? Ukratko argumentirajte odgovor.

(c) Ukratko komentirajte je li ova interpolacija lokalna ili ne.

(d) Koliko je aritmetičkih operacija potrebno za nalaženje svih parametara funkcije $\varphi$, a koliko za računanje njezine vrijednosti u nekoj točki? Dovoljno je navesti samo red veličine, a ne točan broj.

(e) Kako se ponaša konvergencija prema funkciji $f$ i njezinim derivacijama, u ovisnosti o mrežama čvorova?

JMBAG

IME I PREZIME

# Numerička matematika — 1. kolokvij — Zadatak 2

24. travnja 2015.

($8 + 2 = 10$ bodova.)

(a) Nađite matrice $P$, $L$ i $U$ koje realiziraju LU faktorizaciju matrice $A$ s parcijalnim pivotiranjem, ako je

$$A = \begin{bmatrix} 9 & 15 & -6 & -18 \\ 6 & 6 & -4 & -10 \\ -3 & -1 & 1 & 5 \\ -3 & -15 & -8 & -4 \end{bmatrix}.$$

(b) Što je pivotni rast (ili faktor rasta) u Gaussovim eliminacijama? Koliko velik može biti pivotni rast u Gaussovim eliminacijama bez pivotiranja, a koliko s parcijalnim pivotiranjem?

JMBAG

IME I PREZIME

# Numerička matematika — 1. kolokvij — Zadatak 3

24. travnja 2015.

$(8 + 2 = 10$ bodova.)

(a) Korištenjem faktorizacije Choleskog riješite linearni sustav $Ax = b$, gdje su

$$A = \begin{bmatrix} 16 & 4 & 4 & 4 \\ 4 & 26 & 11 & 21 \\ 4 & 11 & 9 & 11 \\ 4 & 21 & 11 & 34 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 8 \\ 47 \\ 22 \\ 55 \end{bmatrix}.$$

(b) Neka je $A$ simetrična matrica reda $n$. Uz koje uvjete matrica $A$ ima faktorizaciju Choleskog? Ako taj uvjet nije ispunjen, što će se dogoditi u algoritmu za faktorizaciju Choleskog?

JMBAG

IME I PREZIME

# Numerička matematika — 1. kolokvij — Zadatak 4

24. travnja 2015.

(10 bodova.) Zadana je funkcija

$$f(x) = \sqrt{x}\,.$$

(a) Odredite korak $h$ uz koji uniformna pogreška interpolacijskog polinoma na ekvidistantnoj mreži $\{1 + kh, k = 0, 1, 2, 3\}$ nije veća od $\varepsilon = 0.25$.

(b) Odredite broj čvorova za koji je uniformna pogreška interpolacije funkcije $f$ po dijelovima linearnom funkcijom na ekvidistantnoj mreži intervala $[1, 1 + 3h]$ manja ili jednaka od $\varepsilon = 0.25$ ($h$ je dobiven u (a) dijelu zadatka).

(c) Nađite interpolacijski polinom za funkciju $f$ na Čebiševljevoj mreži s 4 čvora na intervalu $[1, 4]$. Ocijenite grešku interpolacije u točki 1.5 i nađite pravu grešku u toj točki.

JMBAG

IME I PREZIME

# Numerička matematika — 1. kolokvij — Zadatak 5

24. travnja 2015.

(10 bodova.) Zadana je funkcija

$$f(x) = \cos(\pi x)$$

i vrijednosti $f(0)$, $f(1)$, $f''(1)$, $f(2)$. Postoji li interpolacijski polinom stupnja najviše 3, za zadane vrijednosti u zadanim točkama? Ako postoji, nađite ga. Ako ne postoji, dodajte potreban uvjet interpolacije u nekom od zadanih čvorova, koji (bez provjere) garantira postojanje i jedinstvenost interpolacijskog polinoma stupnja najviše 4, ukratko argumentirajte zašto provjera nije potrebna i nađite takav polinom.

JMBAG

IME I PREZIME

# Numerička matematika — 1. kolokvij

24. travnja 2015.

**Upute**: Na kolokviju je dozvoljeno koristiti samo pribor za pisanje i brisanje, neprogramabilni kalkulator, te službeni šalabahter. Sva rješenja napišite isključivo na papire sa zadacima, jer jedino njih predajete. Ne zaboravite se **potpisati** na svim papirima! Skice smijete raditi i na drugim papirima koje će vam dati dežurni asistent.

**Rezultati**: srijeda, 29. travnja 2015., kasno navečer na webu.
**Uvid u kolokvije**: četvrtak, 30. travnja 2015., u 13 sati.

1

## Zadatak 1

(10 bodova.) Neka je $x_0 < x_1 < \cdots < x_n$ zadana mreža čvorova i neka je $f$ zadana funkcija na intervalu $[x_0, x_n]$.

(a) Što je **"nije čvor" (not-a-knot) kubična splajn** interpolacija $\varphi$ za funkciju $f$ na zadanoj mreži i koje uvjete interpolacije i glatkoće zadovoljava?

(b) Mora li ova interpolacija uvijek postojati i je li jedinstvena? Ukratko argumentirajte odgovor.

(c) Ukratko komentirajte je li ova interpolacija lokalna ili ne.

(d) Koliko je aritmetičkih operacija potrebno za nalaženje svih parametara funkcije $\varphi$, a koliko za računanje njezine vrijednosti u nekoj točki? Dovoljno je navesti samo red veličine, a ne točan broj.

(e) Kako se ponaša konvergencija prema funkciji $f$ i njezinim derivacijama, u ovisnosti o mrežama čvorova?

JMBAG

IME I PREZIME

# Numerička matematika — 1. kolokvij — Zadatak 2

24. travnja 2015.

($8 + 2 = 10$ bodova.)

(a) Nađite matrice $P$, $L$ i $U$ koje realiziraju LU faktorizaciju matrice $A$ s parcijalnim pivotiranjem, ako je

$$A = \begin{bmatrix} 8 & 0 & 8 & -12 \\ -6 & 1 & 1 & 4 \\ -2 & 2 & 4 & -5 \\ 2 & 0 & 1 & -3 \end{bmatrix}.$$

(b) Pretpostavimo da matrica $A$, reda $n$, ima LU faktorizaciju s parcijalnim pivotiranjem. Koliko veliki mogu biti elementi u matricama $L$ i $U$?

JMBAG

IME I PREZIME

# Numerička matematika — 1. kolokvij — Zadatak 3

24. travnja 2015.

($8 + 2 = 10$ bodova.)

(a) Korištenjem faktorizacije Choleskog riješite linearni sustav $Ax = b$, gdje su

$$A = \begin{bmatrix} 9 & 15 & 3 & 15 \\ 15 & 29 & 13 & 33 \\ 3 & 13 & 26 & 33 \\ 15 & 33 & 33 & 82 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 12 \\ 28 \\ 29 \\ 48 \end{bmatrix}.$$

(b) Neka je $A$ simetrična pozitivno definitna matrica reda $n$. Mora li onda postojati $LDL^T$ faktorizacija matrice $A$? Koje su algoritamske prednosti ili mane ove faktorizacije, obzirom na faktorizaciju Choleskog, kod rješavanja linearnog sustava $Ax = b$?

JMBAG

IME I PREZIME

# Numerička matematika — 1. kolokvij — Zadatak 4

24. travnja 2015.

(10 bodova.) Zadana je funkcija

$$f(x) = \ln x\,.$$

(a) Odredite korak $h$ uz koji uniformna pogreška interpolacijskog polinoma na ekvidistantnoj mreži $\{1 + kh, k = 0, 1, 2, 3\}$ nije veća od $\varepsilon = 0.5$.

(b) Odredite broj čvorova za koji je uniformna pogreška interpolacije funkcije $f$ po dijelovima linearnom funkcijom na ekvidistantnoj mreži intervala $[1, 1 + 3h]$ manja ili jednaka od $\varepsilon = 0.5$ ($h$ je dobiven u (a) dijelu zadatka).

(c) Nađite interpolacijski polinom za funkciju $f$ na Čebiševljevoj mreži s 4 čvora na intervalu $[1, 3]$. Ocijenite grešku interpolacije u točki 2 i nađite pravu grešku u toj točki.

JMBAG

IME I PREZIME

# Numerička matematika — 1. kolokvij — Zadatak 5

24. travnja 2015.

(10 bodova.) Zadana je funkcija

$$f(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)$$

i vrijednosti $f(0)$, $f(1)$, $f''(1)$, $f(2)$. Postoji li interpolacijski polinom stupnja najviše 3, za zadane vrijednosti u zadanim točkama? Ako postoji, nađite ga. Ako ne postoji, dodajte potreban uvjet interpolacije u nekom od zadanih čvorova, koji (bez provjere) garantira postojanje i jedinstvenost interpolacijskog polinoma stupnja najviše 4, ukratko argumentirajte zašto provjera nije potrebna i nađite takav polinom.

JMBAG  IME I PREZIME

# Numerička matematika — 1. kolokvij

24. travnja 2015.

**Upute**: Na kolokviju je dozvoljeno koristiti samo pribor za pisanje i brisanje, neprogramabilni kalkulator, te službeni šalabahter. Sva rješenja napišite isključivo na papire sa zadacima, jer jedino njih predajete. Ne zaboravite se **potpisati** na svim papirima! Skice smijete raditi i na drugim papirima koje će vam dati dežurni asistent.

**Rezultati**: srijeda, 29. travnja 2015., kasno navečer na webu.
**Uvid u kolokvije**: četvrtak, 30. travnja 2015., u 13 sati.

1

## Zadatak 1

(10 bodova.) Neka je $x_0 < x_1 < \cdots < x_n$ zadana mreža čvorova i neka je $f$ zadana funkcija na intervalu $[x_0, x_n]$.

(a) Što je **po dijelovima kubična kvazihermiteova** interpolacija $\varphi$ za funkciju $f$ na zadanoj mreži i koje uvjete interpolacije i glatkoće zadovoljava?

(b) Mora li ova interpolacija uvijek postojati i je li jedinstvena? Ukratko argumentirajte odgovor.

(c) Ima li smisla nagibe zadati proizvoljno, neovisno o funkcijskim vrijednostima? Kolika je tada ocjena greške na svakom podintervalu?

(d) Ukratko opišite kako možemo naći "dobre" vrijednosti za nagibe, koristeći samo funkcijske vrijednosti u čvorovima, tako da ova interpolacija ima bolju ocjenu greške od linearnog splajna. Koja je veza između kvalitete izbora nagiba i kvalitete aproksimacije funkcije?

(e) Koliko je aritmetičkih operacija potrebno za nalaženje svih parametara funkcije $\varphi$, a koliko za računanje njezine vrijednosti u nekoj točki? Dovoljno je navesti samo red veličine, a ne točan broj.

JMBAG

IME I PREZIME

# Numerička matematika — 1. kolokvij — Zadatak 2

24. travnja 2015.

($8 + 2 = 10$ bodova.)

(a) Nađite matrice $P$, $L$ i $U$ koje realiziraju LU faktorizaciju matrice $A$ s parcijalnim pivotiranjem, ako je

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 4 & 4 & -8 \\ 1 & 3 & 0 & -7 \\ -1 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & 7 & -7 & 14 \end{bmatrix}.$$

(b) Može li singularna matrica $A$ imati LU faktorizaciju? Ako da, može li ta faktorizacija biti jedinstvena?

JMBAG

IME I PREZIME

# Numerička matematika — 1. kolokvij — Zadatak 3

24. travnja 2015.

($8 + 2 = 10$ bodova.)

(a) Korištenjem faktorizacije Choleskog riješite linearni sustav $Ax = b$, gdje su

$$A = \begin{bmatrix} 25 & 25 & 25 & 5 \\ 25 & 26 & 29 & 9 \\ 25 & 29 & 50 & 24 \\ 5 & 9 & 24 & 19 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 30 \\ 38 \\ 74 \\ 43 \end{bmatrix}.$$

(b) U faktorizaciji Choleskog, koje "strukture" nul-elemenata u matrici $A$ se sigurno prenose u matricu $R$? Kolika je složenost računanja faktorizacije Choleskog za tridijagonalnu (simetričnu, pozitivno definitnu) matricu $A$, reda $n$?

JMBAG

IME I PREZIME

# Numerička matematika — 1. kolokvij — Zadatak 4

24. travnja 2015.

(10 bodova.) Zadana je funkcija

$$f(x) = \frac{1}{x}\,.$$

(a) Odredite korak $h$ uz koji uniformna pogreška interpolacijskog polinoma na ekvidistantnoj mreži $\{1 + kh, k = 0, 1, 2, 3\}$ nije veća od $\varepsilon = 0.5$.

(b) Odredite broj čvorova za koji je uniformna pogreška interpolacije funkcije $f$ po dijelovima linearnom funkcijom na ekvidistantnoj mreži intervala $[1, 1 + 3h]$ manja ili jednaka od $\varepsilon = 0.5$ ($h$ je dobiven u (a) dijelu zadatka).

(c) Nađite interpolacijski polinom za funkciju $f$ na Čebiševljevoj mreži s 4 čvora na intervalu $[1, 3]$. Ocijenite grešku interpolacije u točki 1.5 i nađite pravu grešku u toj točki.

JMBAG

IME I PREZIME

# Numerička matematika — 1. kolokvij — Zadatak 5

24. travnja 2015.

(10 bodova.) Zadana je funkcija

$$f(x) = \cos(2\pi x)$$

i vrijednosti $f(0)$, $f(1)$, $f''(1)$, $f(2)$. Postoji li interpolacijski polinom stupnja najviše 3, za zadane vrijednosti u zadanim točkama? Ako postoji, nađite ga. Ako ne postoji, dodajte potreban uvjet interpolacije u nekom od zadanih čvorova, koji (bez provjere) garantira postojanje i jedinstvenost interpolacijskog polinoma stupnja najviše 4, ukratko argumentirajte zašto provjera nije potrebna i nađite takav polinom.