

**NUMERIČKA MATEMATIKA**

Drugi kolokvij – 23. lipnja 2014.

**Upute:** Na kolokviju je dozvoljeno koristiti samo pribor za pisanje i brisanje, neprogramabilni kalkulator, te službeni šalabahter. Sva rješenja napišite isključivo na papire sa zadacima, jer jedino njih predajete. Ne zaboravite se potpisati na svim papirima! Skice smijete raditi i na drugim papirima koje će vam dati dežurni asistent.

Rezultati i uvid u kolokvije: ponedjeljak. Točno vrijeme objavit ćemo na webu naknadno.

**ZADATAK 1.**

(10 bodova)

Nađite integracijsku formulu oblika

$$\int_{-1}^2 f(x) dx \approx w_0 f(-1/2) + w_1 f(1) + w_2 f(2)$$

iz uvjeta egzaktnosti formule na polinomima što većeg stupnja.

**NUMERIČKA MATEMATIKA**

Drugi kolokvij – 23. lipnja 2014.

**ZADATAK 2.**

(15 bodova)

Zadan je integral

$$\int_{-1}^0 (x+1)\ln(2x+3)dx$$

i tražena točnost  $\varepsilon = 10^{-5}$ . Nađite potrebne brojeve podintervala  $n_T$  i  $n_S$  za garantiranu točnost  $\varepsilon$  u produljenoj trapeznoj i produljenoj Simpsonovoj formuli. Jednom od ovih formula izračunajte približnu vrijednost zadanog integrala s točnošću  $\varepsilon$ .

Izračunajte egzaktnu vrijednost integrala i pripadnu pogrešku. Formule za integrale:  $\int \ln x dx = x \ln x - x$ ,  $\int x \ln x dx = (x^2/2)\ln x - x^2/4$ .

**Napomena:** Detaljno obrazložite sve svoje tvrdnje vezane za ocjenu greške!

**NUMERIČKA MATEMATIKA**

Drugi kolokvij – 23. lipnja 2014.

**ZADATAK 3.**

(10 bodova)

Zadana je funkcija

$$f(x) = e^{px}$$

na intervalu  $[0, 1]$ , gdje je  $p > 0$  zadani realni parametar. Neprekidnom metodom najmanjih kvadrata nađite funkciju oblika

$$\varphi(x) = a_0 + a_1x$$

koja aproksimira funkciju  $f$  na zadanom intervalu s težinskom funkcijom  $w(x) = 1$ . Vodite računa o parnosti.

**NUMERIČKA MATEMATIKA**

Drugi kolokvij – 23. lipnja 2014.

**ZADATAK 4.**

(15 bodova)

- (a) Kako izgleda tročlana rekurzija za niz **moničnih** ortogonalnih polinoma  $\{p_n | n \geq 0\}$  (vodeći koeficijent svakog polinoma je jednak 1)?
- (b) Izvedite relacije za **koeficijente** u toj rekurziji, u terminima pripadnog skalarnog produkta  $\langle , \rangle$ .

**NUMERIČKA MATEMATIKA**

Drugi kolokvij – 23. lipnja 2014.

**ZADATAK 5.**

(10 bodova)

Napišite formulu za Newtonove iteracije koje aproksimiraju lokalni ekstrem funkcije  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ .  
Nadalje, izračunajte lokalni minimum

$$f(x, y) = [x \ y] \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + [0 \ 1] \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

**NUMERIČKA MATEMATIKA**

Drugi kolokvij – 23. lipnja 2014.

**Upute:** Na kolokviju je dozvoljeno koristiti samo pribor za pisanje i brisanje, neprogramabilni kalkulator, te službeni šalabahter. Sva rješenja napišite isključivo na papire sa zadacima, jer jedino njih predajete. Ne zaboravite se potpisati na svim papirima! Skice smijete raditi i na drugim papirima koje će vam dati dežurni asistent.

Rezultati i uvid u kolokvije: ponedjeljak. Točno vrijeme objavit ćemo na webu naknadno.

**ZADATAK 1.**

(10 bodova)

Nađite integracijsku formulu oblika

$$\int_1^2 f(x)dx \approx w_0 f(2) + w_1 f(1/2) + w_2 f(1/3)$$

iz uvjeta egzaktnosti formule na polinomima što većeg stupnja.

**NUMERIČKA MATEMATIKA**

Drugi kolokvij – 23. lipnja 2014.

**ZADATAK 2.**

(15 bodova)

Zadan je integral

$$\int_{-1}^0 (x+2)\ln(2x+4)dx$$

i tražena točnost  $\varepsilon = 10^{-5}$ . Nađite potrebne brojeve podintervala  $n_T$  i  $n_S$  za garantiranu točnost  $\varepsilon$  u produljenoj trapeznoj i produljenoj Simpsonovoj formuli. Jednom od ovih formula izračunajte približnu vrijednost zadanog integrala s točnošću  $\varepsilon$ .

Izračunajte egzaktnu vrijednost integrala i pripadnu pogrešku. Formule za integrale:  $\int \ln x dx = x \ln x - x$ ,  $\int x \ln x dx = (x^2/2)\ln x - x^2/4$ .

**Napomena:** Detaljno obrazložite sve svoje tvrdnje vezane za ocjenu greške!

**NUMERIČKA MATEMATIKA**

Drugi kolokvij – 23. lipnja 2014.

**ZADATAK 3.**

(10 bodova)

Zadana je funkcija

$$f(x) = \operatorname{ch}(px)$$

na intervalu  $[-1, 1]$ , gdje je  $p > 0$  zadani realni parametar. Neprekidnom metodom najmanjih kvadrata nađite funkciju oblika

$$\varphi(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$$

koja aproksimira funkciju  $f$  na zadanom intervalu s težinskom funkcijom  $w(x) = 1$ . Vodite računa o parnosti.



**NUMERIČKA MATEMATIKA**

Drugi kolokvij – 23. lipnja 2014.

**ZADATAK 4.**

(15 bodova)

(15 bodova.) Težinska integracijska formula ima oblik

$$\int_a^b w(x)f(x)dx = I_n(f) + E_n(f), \quad I_n(f) = \sum_{k=1}^n w_k f(x_k),$$

gdje su  $x_k$  čvorovi integracije, a  $w_k$  su težinski koeficijenti.

- (a) Napišite definiciju **polinomnog** stupnja egzaktnosti  $d$  ovakve integracijske formule.
- (b) Napišite iskaz teorema o **karakterizaciji** integracijskih formula “visokog” stupnja egzaktnosti, kad je  $d > n - 1$ .
- (c) Koliki je **maksimalni** stupanj egzaktnosti? Ukratko komentirajte zašto.

**NUMERIČKA MATEMATIKA**

Drugi kolokvij – 23. lipnja 2014.

**ZADATAK 5.**

(10 bodova)

Napišite formulu za Newtonove iteracije koje aproksimiraju lokalni ekstrem funkcije  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ .  
Nadalje, izračunajte lokalni minimum

$$f(x, y) = [x \ y] \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + [0 \ 1] \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$